BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kumas, Kōnstantinos M., 1777-1836

Seiras stoicheioōdus tōn mathēmatikōn kai physikōn pragmateiōn

Bd.: T. 4

en Bienn ē tēs Austrias (1807)
Math.u. 91 m-4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594037-9

J 24 a th. u. 91m

R

ΣΕΙΡΑΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ

ΕΚ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ ΣΥΛΛΕΧΘΕΙΣΩΝ

ΥΠΟ Κ. Μ. ΚΟΥΜΑ

ΛΑΡΙΣΣΑΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΣ

Περιέχων τὴ Λογισμῆ τῶν Ἀπείροσῶν τὰ ἐχόμενα, τὸν Ὁλοκληρωτικὸν Λογισμὸν, καὶ τὴν Γενικὴν Φυσικήν.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗ, ΤΗΣ ΑΥΣΤΡΙΑΣ

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΕΝΔΩΤΟΥ.

Α Ω Ζ.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

ΣΕΙΡΑ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ.

Τȣ̃ λογισμȣ̃ τῶν Ἀπειροςῶν

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ τῶν Μεγίςων ϗ Ἐλαχίςων.

82. Ὅταν ᾖ δυ = ο, ἡ ἁπτομένη, ἣν ἐμφαίνει τὸ $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}$ παράλληλος γίνεται ταῖς ἀποτετμημέναις (76)· ἐὰν ȣ̃ν καμπύλης τῆς ΑΝα (χ. 1) αἱ τεταγμέναι προϊȣ̃σαι αὔξωσι μέχρι μονίμȣ τινὸς σημείȣ, μεθ' ὃ μειȣ̃σθαι ἄρχωνται, ἡ μὲν κατὰ τὰ Μ, τὰ μεταξὺ Α ϗ Ν κείμενα σημεῖα, τῆς καμπύλης ἁπτομένη συναντήσῃ τῷ ἄξονι, ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ Α προαχθέντι· ἡ δὲ κατὰ τὰ μ, τὰ μεταξὺ α ϗ Ν, πρὸς τ' ἀντίθετα μέρη τȣ̃ ἄξονος· ἡ ἄρα κατ' αὐτὸ τὸ Ν ἁπτομένη ȣ̓δαμȣ̃ συναντήσει τῷ ἄξονι, ἀλλ' ἔςαι αὐτῷ παράλληλος· πρόδηλον ἄρα, ὅτι τȣτὶ

γίνεται κατὰ τὸ σημεῖον Ν, καθ' ὃ αἱ τεταγμέναι, τῇ αὔξειν παυόμεναι, μεῖσθαι αὐτίκα ἄρχονται, τοῦτ' ἔστι κατὰ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ τεταγμένη ΚΝ μείζων ἐστὶ τῶν προσεχεσάτων αὐτῇ τεταγμένων ΠΜ, πμ, κειμένων, τῆς μὲν ἐν δεξιοῖς, τῆς δ' ἑτέρας κατὰ τὰ λαιά· ἡ δὲ ΚΝ μεγίστη τηνικαῦτα ἀκέει· ἐὰν δὲ ἡ καμπύλη Μ Νμ (χ. 2) τὰ κυρτὰ ἑαυτῆς ἔχῃ ἐστραμμένα πρὸς τὸν ἄξονα ΠΚ, ἐνδέχεται συμβῆναι τὰς τεταγμένας προϊούσας, μεῖσθαι μὲν ἕως τοῦ Ν, ἐντεῦθεν δὲ αὔξειν ἄρχεσθαι, ὡς τὴν ΚΝ ἐλάττω ὑπάρχειν τῶν ἑκατέρωθεν προσεχεσάτων αὐτῇ τεταγμένων· τηνικαῦτα ἓν ἡ ΚΝ ἐλαχίστη καλεῖται, ἡ δὲ ἁπτομένη Νν παράλληλος ταῖς ἀποτετμημέναις καθίσταται· κἀντεῦθεν ἄρα προῆλθεν ἐξαίσιόν τι χρῆμα ἡ περὶ τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων μέθοδος χρησιμωτάτη τῶν ἐν τῇ ἀναλύσει, ἐχ' ὅπως τὰ ἐν ταῖς καμπύλαις ἀνερευνῶσα ἐλάχιστα καὶ μέγιστα, ἀλλὰ καὶ ἐν ἐκ εὐαρίθμοις ἄλλοις γεωμετρικοῖς ζητήμασιν, ὡς ἐκ τῶν ἑφεξῆς ἡμῖν ἔσαι κατάδηλον.

83. Ε'ὰν ἓν ἡ ἁπτομένη ταῖς ἀποτετμημέναις παράλληλος ᾖ, δυνατὸν εὑρεῖν ἓν μέγιστον, ἢ ἓν ἐλάχιστον· δυνατὸν δὲ καὶ ἡνίκα ταῖς τεταγμέναις ἡ ἁπτομένη ἐστὶ παράλληλος· ἡ γὰρ ΚΝ (χ. 3) συμπίπτει τῇ κατὰ τὸ Ν ἁπτομένῃ, μᾶλλον δὲ, ἁπτομένη ἐστὶν ἑκατέρα τῶν κλωνῶν ΜΝ, μΝ· τὸ δ' ἀπειροστὸν τόξον Νι ἐκλαμβάνεται γραμμὴ εὐθεῖα, ἥτις δύναται ἐπινοηθῆναι ὡς συνιστῶσα γωνίαν ἀπειροστὴν μετὰ τῆς τεταγμένης Λι· ἐν δὲ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ιΝσ, τιθεμένης τῆς ἀκτῖνος = 1, ἔστι σι = δυ : σΝ = ΛΚ = δχ :: 1 : ἀπ. σιΝ = $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}$.

ταύτης δὲ τῆς γωνίας ὄσης ἀπειροστῆς, ὁ λόγος δχ : δυ

ἔσαι ἀπειροσὸς, τῦτ' ἔσι δυ ἔσι τηνικαῦτα ἀπείρως μεῖζον τῦ δχ· κρατεῖ δὲ τῦτο ὐδὲν ἧττον κἀπὶ τῦ 4 χήματος, πλὴν ὅτι ΚΝ, ἐν μὲν τῷ 3 ἐλάχισον, ἐν δὲ τῷ 4 χήματι ὑπάρχει μέγισον· δυνατὸν ἄρα εὑρεῖν τὸ μέγισον, ἢ τὸ ἐλάχισον, ὅταν ὁ λόγος δυ: δχ τοιῦτος ᾖ, ὥσε τὸ δυ παρατιθέμενον τῷ δχ ὑπάρχειν ποσὸν ἀπείρως μέγισον. Ἀλλὰ γὰρ ὐκ ἀεὶ, ὄντος δυ = ο, συνάγειν χρὴ, ὅτι πάντως εὑρεθήσεται τὸ μέγισον, ἢ τὸ ἐλάχισον· τῦτὶ γὰρ μόνον ἐμφαίνει τὴν ἁπτομένην παράλληλον ἔταν τῇ τῶν ἀποτετμημένων γραμμῇ· δυνατὸν μέντοι τὴν μὲν ἁπτομένην Νν (χ. 5) παράλληλον εἶναι τῇ τῶν χ γραμμῇ, τὰς δὲ τῷ Ν προσεχεῖς τεταγμένας μὴ ὑπερβάλλειν, ἢ ἐλαττῦσθαι τῆς ΚΝ· τῦτὶ δὲ γίνεται, ἡνίκα ἡ καμπύλη ΑΝ τὰ κυρτὰ εἰς κοῖλα, ἢ τἀναντίον, μεταβάλλει· ἀλλὰ τηνικαῦτα ἡ εὐθεῖα Νν δύναται εἶναι παράλληλος τῇ ΑΠ, ναὶ μὴν χ ἁπτομένη τῦτε κυρτῦ ΑΝ, χ τῦ κοίλυ Νμ· ἐν δὲ τῷ 6 χήμ. ἡ εὐθεῖα Νν ἐφάπτεται ἑκατέρυ τῶν κλωνῶν μΝ, ΜΝ· τῇ δὲ ΚΝ ὐδεμία τεταγμένη παράκειται δεξιόθεν· ὐκῦν, ὅτε μεγίση αὕτη ἔσαι, ἔτ' ἐλαχίση, καθ' ὃν ἡμῖν ἐνταῦθα νοῦν ἐκλαμβάνονται τὰ μέγιστα χ ἐλάχιστα· ὡσαύτως ἡ τεταγμένη ΝΚ (χ. 5) = υ (τιθεμένης τῆς μὲν ΑΚ = χ, τῆς δὲ κΝ = υ) παράλληλος δύναται εἶναι ταῖς τεταγμέναις, μήτε μεγίση, μήτε μὴν ἐλαχίση, ὑπάρχυσα· τῦτὶ δὲ συμβαίνει ἐπὶ μόνυ τῦ τῆς καμπῆς σημείυ (*).

34. Ἵνα δὲ γνωσθῇ τὸ μέγιστον, ἢ τὸ ἐλάχιστον,

(*) Σημεῖον Καμπῆς καλεῖται τὸ N (χ. 5, 7), καθ' ὃ καμπύλη τις τὰ πρὸς τὸν ἄξονα κοῖλα μεταβάλλει εἰς κυρτὰ, ἢ τ' ἀνάπαλιν.

ὑποκείσθω πρῶτον $\delta v = 0$, καὶ ἐντεῦθεν ἀπενεχθήσεται ἡ δύναμις τῆς τῷ μεγίστῳ, ἢ ἐλαχίστῳ, συσοιχάσης ἀποτετμημένης· μηδενὸς δὲ συναγομένου ἐκ τῆς ὑποθέσεως τοῦ $\delta v = 0$, γενέσθω $\delta\chi = 0$, καὶ $\frac{\delta v}{\delta\chi} = \infty$, καὶ, ὃ δὴ ταὐτὸν, $\delta v = \infty$· εἴγε ἐκ τῶν ὑποθέσεων $\frac{\delta v}{\delta\chi} = \frac{A}{B} = \infty$, καὶ $B = 0$, καὶ $A = \infty$, τὸ αὐτὸ ἀείποτε συνάγεται ἀποτέλεσμα· ἑξῆς δὲ, ἵν' εἰδῶμεν, εἴπερ εἴη τι μέγιστον, ἢ ἐλάχιστον, ηὐξήσθω πρῶτον, εἶτα ἠλαττώσθω ἡ χ ποσότητι ἀπειροσῇ τῇ $\delta\chi$· καὶ ἐν ταύταις ταῖς δυσὶ περιπτώσεσι τοῦ υ ἐλάττονος ὄντος τοῦ εὑρεθέντος, εὕρηται πάντως τὸ μέγιστον· μείζονος δὲ, τὸ ἐλάχιστον· ἐὰν δὲ, ἐκείνως μὲν ἡ μείζων ἡ δύναμις τοῦ υ, ἄτω δ' ἐλάττων, τῆς ἐν ἀρχῇ εὑρημένης, ἡ εὑρημένη ἔτε μεγίστη, ἔτε μὴν ἐλαχίστη, ὑπάρχει. Πρὶν ἢ δὲ ἐφαρμόσαι τὰ εἰρημένα σημειωτέον, ὅτι καμπύλη, δύναται μὲν ἔχειν μεγίστην, ἐλαχίστην δ' ἀ, οἵα η AN (χ. 1), ἢ ἐλαχίστην καὶ μεγίστην ἀδεμίαν, οἵα ἡ MN (χ. 2), ἢ τέλος μεγίστας τε καὶ ἐλαχίστας πολλὰς, οἵαι εἰσὶν αἱ KN ἐν τῷ 8 σχήματι.

85. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Εὑρεῖν τὴν μεγίστην τῶν τεταγμένων ἐν τῇ ἐλλείψει ANα (χ. 1).

ΛΥΣΙΣ. Ἡ τῆς ἐλλείψεως ἐξίσωσις ἔστιν $v^2 = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(2\alpha\chi - \chi\chi)$ (Τ΄ψ. Γ. 92), $2v\delta\chi = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(2\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi)$· ὑποτεθέντος $\delta v = 0$, ἔσαι $2v\delta v = 2v \times 0 = 0 = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} \times (2\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi)$, καὶ $2\alpha\delta\chi = 2\chi\delta\chi$, $2\alpha = 2\chi$,

α = χ, τῦτ' ἔσιν ἡ μεγίση τεταγμένη συσοιχεῖ τῇ ΑΚ ἀποτετμημένη = τῷ πρώτῳ ἡμιάξονι, ἢ, ὃ ταὐτὸν, ἡ μεγίση τῆς ἐλλείψεως τεταγμένη συσοιχεῖ τῷ κατ' αὐτὴν κέντρῳ.

Ε'ὰν δὲ ἐν τῇ ἐξισώσει $v^2 = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(2\alpha\chi - \chi\chi)$ ὑποτεθῇ β = α, ἔσαι υυ = 2αχ — χχ ἐξίσωσις τῦ κύκλυ, ὅστις ἐσὶν ἔλλειψις, τὰς ἄξονας ἰσαλλήλυς ἔχυσα· ἐν ἄρα τῷ κύκλῳ ἡ μεγίση τεταγμένη διήκει διὰ τῦ κέντρυ.

86. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Εὑρεῖν τὴν μεγίσην τῶν τεταγμένων ἐν καμπύλῃ τῇ ΑΝα (χ. 9), ἧς αἱ τεταγμέναι ΚΝ = ψ μέσον ἀνάλογον ἔχυσι πρὸς τὰς τεταγμένας Κμ = υ, καὶ τὰς τεταγμένας ΑΚ = χ τῦ ἡμικυκλίυ Αμα.

ΛΥΣΙΣ. Ε"σω διάμετρος τῦ κύκλυ 2α, καὶ ἡ αὐτῦ ἐξίσωσις υυ = 2αχ — χχ· ἔσαι ἄρα ἡ τῆς καμπύλης ἐξίσωσις ψψ = χυ· καὶ τὰ μὲν τῆς κυκλικῆς ἐξισώσεως ἀπειροσὰ εἰσὶ 2υδυ = 2αδχ — 2χδχ, $\delta u = \frac{\alpha\delta\chi - \chi\delta\chi}{u}$.

τὰ δὲ τῆς προτεθείσης καμπύλης, 2ψδψ = υδχ + χδυ

$= u\delta\chi + \frac{\alpha\chi\delta\chi - \chi\chi\delta\chi}{u}$ (ἀντικαθισαμένης τῆς τῦ δυ δυνάμεως) $= \frac{u^2\delta\chi + \alpha\chi\delta\chi - \chi\chi\delta\chi}{u}$. ἀλλὰ πρὸς τῷ τῆς μεγίσης σημείῳ ἔσι δψ = 0, καὶ 2ψδψ = 0· ἄρα $\frac{u^2\delta\chi + \alpha\chi\delta\chi - \chi\chi\delta\chi}{u} = 0$, $u^2\delta\chi + \alpha\chi\delta\chi - \chi\chi\delta\chi = 0$,

$u^2 + \alpha\chi - \chi\chi = 0$· ἀντικαθισαμένης δὲ τῆς τῦ u^2 δυνά-

μεως, τῆς ἐκ τῆς κυκλικῆς ἐξισώσεως πορισομένης, πρακύπτει $2\alpha x - x^2 + \alpha x - x^2 = 0$, $3\alpha x - 2xx = 0$, $3\alpha - 2x = 0$, $3\alpha = 2x$, $x = \frac{3\alpha}{2}$. ἐὰν ἓν τεθῇ $AK = \frac{3\alpha}{2}$, ἕξαι τὸ σημεῖον K, ᾧ συσοιχεῖ ἡ τῶν τεταγμένων μεγίση.

87. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Εὑρεῖν τὴν μεγίσην τῶν τεταγμένων ἐν ταῖς παντὸς γένους ἐλλείψεσι.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ αὐτῶν ἐξίσωσις ἔσιν $\frac{\alpha}{\pi} \upsilon^{\mu+\nu} = x^{\mu}$ $(\alpha - x)^{\nu}$, $(\mu+\nu)\frac{\alpha}{\pi}\upsilon^{\mu+\nu-1}\delta\upsilon = \mu x^{\mu-1}(\alpha - x)^{\nu}\delta x - \nu x^{\mu}\delta x(\alpha - x)^{\nu-1} = 0$ (ὑποτιθεμένου $\delta\upsilon = 0$, ὅπερ τὸ πρῶτον τῆς ἐξισώσεως μέλος, ᾗ δὴ ᾗ τὸ δεύτερον, ἀπεργάζεται $= 0$)· διαιρέσει ἄρα διὰ δx, ᾗ μεταθέσει, $\mu x^{\mu-1} \times (\alpha - x)^{\nu} = \nu x^{\mu}(\alpha - x)^{\nu-1}$. διαιρέσει δὲ διὰ $x^{\mu-1} \times (\alpha - x)^{\nu-1}$, πρόεισι $\mu(\alpha - x) = \nu x$, $\mu\alpha - \mu x = \nu x$, $\mu\alpha = \mu x + \nu x$, $x = \frac{\mu\alpha}{\mu+\nu}$.

Ἡ δ' ἐξίσωσις τῶν παντὸς γένους κύκλων, μηδενὶ διαφέρουσα τῆς τῶν ἐλλείψεων, πλὴν ὅτι ἐν τοῖς κύκλοις ἔσιν $\alpha = \pi$, ὅπερ ὐδέποτε συμβαίνει ταῖς ἐλλείψεσι, κατὰ τὴν αὐτὴν ἔφοδον τῆς πράξεως διαπερανθείσης, προβαλεῖ μεγίσην τῶν τεταγμένων τὴν συσοιχοῦσαν κἀνταῦθα τῇ ἀποτετμημένῃ $x = \frac{\mu\alpha}{\mu+\nu}$· ἐὰν ἦ $\mu = 5$ ᾗ $\nu = 3$, εὑρε-

σεται $\chi = \frac{5\alpha}{6}$· εἰδ' εἴη $\mu = 6$, ϗ $\nu = 1$, πορισθήσεται $\chi = \frac{6\alpha}{7}$, ϗ ἐξῆς ὡσαύτως, εἴτε περὶ ἐλλείψεως, εἴτε περὶ κύκλου τῶν καθυπερτέρων ὁ λόγος γίνοιτο.

88. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ δὲ τῆς καμπύλης σχήματος ἀγνοουμένου ὅλως οἷόν ἐσι, βουλομένοις εἰδέναι, εἰ δυνατὸν εὑρεῖν ἐν αὐτῇ τὰ μέγισα ϗ ἐλάχισα, ἐπιχειρητέον τῷ ζητήματι, ὡς ἐν τῆς ἐφεξῆς προβλήμασι.

89. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Εὑρεῖν τὰ μέγισα ϗ ἐλάχισα καμπύλης, ἧς ἐξίσωσίς ἐσιν ἡ $\frac{\chi}{\alpha} + \frac{\alpha}{\chi} = \frac{\upsilon}{\alpha}$.

ΛΥΣΙΣ. Ἐν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἔσι $\frac{\delta\chi}{\alpha} - \frac{\alpha\delta\chi}{\chi^2} = \frac{\delta\upsilon}{\alpha} = 0$· ὑποτεθέντος δὲ $\delta\upsilon = 0$, ϗ ἐπομένως $\frac{\delta\chi}{\alpha} = \frac{\alpha\delta\chi}{\chi^2}$, $\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\chi^2}$, $\frac{\chi^2}{\alpha} = \alpha$, $\chi^2 = \alpha^2$, $\chi = \pm\sqrt{\alpha^2} = \pm\alpha$· ἄρα ἀπτόμεναι αἱ συσοιχοῦσαι τῇ τε ὑπαρκτικῇ ἀποτετμημένῃ $+\alpha$, ϗ τῇ λειπτικῇ $-\alpha$, ἔσονται παράλληλοι ταῖς ἀποτετμημέναις· ἵνα δὲ γνωσὸν γένοιτο, εἴπερ ἡ τῇ ἀποτετμημένῃ $+\alpha$ συσοιχοῦσα τεταγμένη μεγίση εἴη, ἢ γοῦν ἐλαχίση, ἀντικατασαθήτω α ἀντὶ χ ἐν τῇ τῆς καμπύλης ἐξισώσει· ϗ δὴ ἔσαι $\frac{\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{\upsilon}{\alpha}$, ἢ $2 = \frac{\upsilon}{\alpha}$, ϗ $\upsilon = 2\alpha$· αὐξηθείσης τῆς ἀποτετμημένης α ποσόσητι ἀπειροσῇ τῇ $\delta\chi$, ϗ ἀντικατασαθέντος ἐν τῇ τῆς καμπύλης ἐξισώσει τοῦ $\alpha + \delta\chi$

ἀντὶ χ, προέρχεται $\frac{\alpha+\delta\chi}{\alpha}+\frac{\alpha}{\alpha+\delta\chi}=\frac{\upsilon}{\alpha}$, ἢ (ἀναχθέντων τῶν κλασμάτων ἐπὶ κοινὸν ὄνομα, καὶ συναφθέντων, τοῦ δὲ παρονομαστοῦ α ἀφανισθέντος) $\frac{2\alpha\alpha+2\alpha\delta\chi+\delta\chi^2}{\alpha+\delta\chi}=\upsilon$, εἴτ' ἔν $2\alpha+\frac{\delta\chi^2}{\alpha+\delta\chi}\upsilon$, ποσότης μείζων τοῦ 2α· ἐὰν δὲ ἡ ἀποτετμημένη α ἀπομειωθῇ τῷ ποσῷ $\delta\chi$, καὶ εἰσαχθῇ $\alpha-\delta\chi$ ἀντὶ χ, εὑρεθήσεται $\upsilon=2\alpha+\frac{\delta\chi^2}{\alpha-\delta\chi}$, ἥτις ἔτι μείζων ἐστὶ τοῦ 2α· ἐπεὶ ἄρα αἱ τεταγμέναι ἑκατέρωθεν αὔξουσι, πρόδηλον ὅτι ἡ τεταγμένη 2α, ἡ τῇ ἀποτετμημένῃ α συνοιχοῦσα, ἐστὶν ἐλαχίστη.

Τῇ δ' αὐτῇ ἐφόδῳ τῆς πράξεως, λαμβανομένης τῆς ἀποτετμημένης χ λειπτικῆς καὶ $=-\alpha$, πορισθήσεται $\upsilon=-2\alpha$· ἀντικατασταθέντος δὲ ἀντὶ χ τοῦ $-\alpha+\delta\chi$, εὑρεθήσεται $\upsilon=-2\alpha+\frac{\delta\chi^2}{-\alpha+\delta\chi}=-2\alpha-\frac{\delta\chi^2}{\alpha-\delta\chi}$ (μεταβαλλομένων πάντων τῶν συμβόλων τοῦτε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ, ἢ, εἰ βούλει, πολλαπλασιαζομένων τοῦτε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ -1)· ἀντικαθισταμένου δὲ τοῦ $-\alpha-\delta\chi$ ἀντὶ τοῦ χ, εὑρίσκεται $\upsilon=-2\alpha-\frac{\delta\chi^2}{\alpha+\delta\chi}$. ἐπεὶ ἄρα αἱ τῇ -2α τεταγμένῃ προσεχεῖς ἑκατέρωθεν λειπτικαὶ τεταγμέναι μείζους εἰσὶ τῆς -2α, ἡ τεταγμένη -2α ἐστὶν ἐλαχίστη τῶν λειπτικῶν.

90. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'. Εὑρεῖν τὰ μέγιστα, καὶ ἐλά-

χιςα ἐν καμπύλῃ, ἧς ἐξίσωσίς ἐςιν ἡ ααυ $= \chi^3 - 3\alpha\chi^2 + 3\alpha^2\chi$.

ΛΥΣΙΣ. Τῶν ἀπειροςῶν τῆς ἐξισώσεως ληφθέντων, ϗ τεθέντος $\delta\upsilon = 0$, εὑρίσκεται $3\chi\chi\delta\chi - 6\alpha\chi\delta\chi + 3\alpha\alpha\delta\chi = 0$, ἢ (διαιρέσει διὰ $3\delta\chi$) $\chi^2 - 2\alpha\chi + \alpha\alpha = 0$, ἢ (ἐξαγωγῇ ῥίζης) $\chi - \alpha = 0$, $\chi = \alpha$· ἄρα ἡ τῆς καμπύλης ἁπτομένη κατὰ σημεῖον συςοιχοῦν τῇ ἀποτετμημένῃ $\chi = \alpha$, ἐςὶ ταῖς ἀποτετμημέναις παράλληλος· ἀλλ' οὐ παρὰ τοῦτο ἡ συςοιχοῦσα πεταγμένη ἔςαι μεγίςη, ἢ ἐλαχίςη· ϗ γὰρ ἀντικαταςαθέντος α ἀντὶ χ ἐν τῇ τῆς καμπύλης ἐξισώσει, πρόεισιν $\upsilon = \alpha$· ἑξῆς δὲ ἀντικαταςαθέντος μὲν τοῦ $\alpha + \delta\chi$ ἀντὶ χ, εὑρίσκεται $\upsilon = \alpha + \frac{\delta\chi^3}{\alpha\alpha}$, ἀντικαταςαθέντος δὲ $\alpha - \delta\chi$, προκύπτει $\upsilon = \alpha - \frac{\delta\chi^3}{\alpha\alpha}$· ἐπεὶ ἄρα αἱ τεταγμέναι, ἔνθεν μὲν ἄυξουσιν, ἔνθεν δ' ἀπομειοῦνται, ἡ τεταγμένη $\upsilon = \alpha$ οὐκ ἔςιν οὔτε μεγίςη, οὔτε ἐλαχίςη.

91. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς'. Εὑρεῖν τὴν μεγίςην ϗ ἐλαχίςην τεταγμένην ἐν τῇ παραβολῇ.

ΛΥΣΙΣ. Ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς ἐςιν $\upsilon^2 = \pi\chi$, $2\upsilon\delta\upsilon = \pi\delta\chi$· ὑποτεθέντος δὲ $\delta\upsilon = 0$, εὑρίσκεται $\pi\delta\chi = 0$, ὅθεν οὐδεμία τοῦ χ ἀποφέρεται δύναμις· ὑποτεθείσθω τοίνυν $\delta\upsilon = \infty$· ϗ δὴ ἔςαι $\pi\delta\chi = \infty$· ὅθεν οὐδὲν ἧττον οὐδεμία ἐξαρύεται τοῦ χ δύναμις· οὐκ ἔςιν ἄρα τῇ παραβολῇ οὔτε μεγίςη τις οὔτ' ἐλαχίςη τεταγμένη.

92. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'. Ἀπὸ σημείου Λ δοθέντος ἐπὶ ἄξονος καμπύλης τινὸς, ἀγαγεῖν πρὸς τὴν καμπύλην τὴν ἐλαχίςην εὐθεῖαν ΛΜ (χ. 10.).

ΛΥΣΙΣ. Ε"ςω ΑΛ = β, ϗ ΑΠ = χ, ϗ ΠΜ = υ· ἄρα ΠΛ = β — χ· ἔςι δὲ ὀρθογώνιον τὸ τρίγωνον ΜΑΠ, ἄρα ΜΛ² = ΠΛ² + ΠΜ² = ββ — 2βχ + χχ + υυ = ψψ, ὑποτιθεμένης τῆς ΜΛ = ψ· Ε'ὰν ἓν ἐκληφθῇ ψ ὡς ἐνηρμοσμένη τῇ καμπύλῃ, ϗ τεθῇ δψ = ο ἐν τῇ περιπτώσει τοῦ ἐλαχίςου, ποριωθήσεται — 2βδχ + 2χδχ + 2υδυ = 2ψ· δψ = ο, υδυ = βδχ — χδχ (μεταθέσει δήπου ϗ διαιρέσει διὰ 2)· ἄρα $\frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi} = \beta -$ χ = ΠΛ· ἀλλὰ (κατὰ τὰ προειρημένα) $\frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi}$ ἔςι τύπος τῆς ὑποκαθέτου· ἄρα ΠΛ ἔςιν ὑποκάθετος· ἐὰν ἓν ἐπὶ τοῦ σημείου Γ, κειμένου ἐντὸς τῆς κατὰ τὴν καμπύλην κοιλότητος, ἀγαγεῖν προτεθῇ τὴν ἐλαχίςην ΓΜ, ἀχθεισῶν τῆς μὲν ΓΜ παραλλήλου, τῆς δὲ Γπ καθέτου τῷ ἄξονι, γενέσθω Απ = φ, ϗ Κπ = μ Π = γ· ὠκοῦν ἔςαι Μμ = υ — γ, ϗ Γμ = ϖΠ = φ — χ, ϗ τιθεμένης ΓΜ = χ, προκύπτει ψψ = Μμ² + Γμ² = υ² — 2γυ + γ² + φφ — 2φχ + χχ· τῶν δὲ ἀπειροςῶν ληφθέντων, ϗ ὑποτεθέντος δψ = ο, ἔςαι ο = 2υδυ — 2γδυ — 2φδχ + 2χδχ· μεταθέσει δὲ ϗ διὰ 2 διαιρέσει, προέρχεται δυ × (υ — γ) = δχ × (φ — χ), $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi} = \frac{\varphi - \chi}{\upsilon - \gamma}$. πολλαπλασιασμῷ δὲ ἐπὶ υ, $\frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi} = \frac{\upsilon \times (\varphi - \chi)}{\upsilon - \gamma}$· ὅθεν Μμ = υ — γ : Γμ = φ — χ :: υ = ΠΜ : ΠΛ = $\frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi}$· ἄρα ΓΜ ἔςι κάθετος.

Ε'κτὸς δὲ τῆς καμπύλης κειμένου τοῦ σημείου Ν, ἀφ'

ἕ πρόκειται ἀγαγεῖν τὴν ἐλαχίσην εὐθεῖαν, ἐσάθω τῷ ἄξονι κάθετος ἡ NB, ἥτις ὡς γνωσὴ (τῦ γὰρ σημείυ N δοθέντος, τὸ αὐτῦ ἀπὸ τῦ ἄξονος ἀπόσημα δεδομένον ἐκλαμβάνεται) ἔσω = γ, ϗ AB = φ, ϗ ἤχθω Mν παράλληλος τῷ ἄξονι AΠ· ἐκῦν ἔσαι Mν = BΠ = χ — φ, ϗ Nν = γ — υ, ϗ τιθεμένης τῆς NM = ψ, προέρχεται ψ² = Nν² + Mν² = (γ — υ)² + (χ — φ)²· ληφθέντων δὲ τῶν ἀπειροστῶν, ἔσαι 2ψδψ = — 2δυ (γ — υ) + 2δχ × (χ — φ). ὑποτιθεμένυ δὲ δψ = 0, διαιρέσει διὰ 2 ϗ μεταθέσει, προκύπτει δχ × (χ — φ) = δυ × (γ — υ), $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi} = \frac{\chi-\varphi}{\gamma-\upsilon}$, $\frac{\iota\delta\upsilon}{\delta\chi} = \frac{(\chi-\varphi)\upsilon}{\gamma-\upsilon}$, ὅθεν γ — υ = Nν : χ — φ = νM :: υ = MΠ : ΠΛ = $\frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi}$· ἡ ἄρα NM ἔσι κάθετος.

Τῆς δὲ καμπύλης ϗ ἕτερον κλῶνα ἐχύσης τὸν Aσ, ἕ τὰ συσοιχῆντα τοῖς τῦ AM σημεῖα ἴσον ἀπέχυσι τῦ ἄξονος AΠ, δῆλον ὅτι ἡ Pσ κάθετος τῷ κλωνὶ Aσ ἔσαι ἡ ἐλαχίση τῶν ἀχθῆναι δυναμένων ἀπὸ τῦ σημείυ P τῦ κειμένυ ὑπὸ τὸν ἄξονα ἐν τῷ κλωνὶ Aσ.

93. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ῥᾷσα δὲ καταναεῖται, ὡς τῆς AM εὐθείας ἀντὶ καμπύλης ὕσης, ἡ ἐλαχίση εὐθεῖα τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου, Λ, Γ, N ἀγομένων, ἔσαι ἡ κάθετος.

94. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἵνα δὲ ἀπειράριθμα μονονὲ προβλήματα, ἐξεχόμενα τῆς τῶν μεγίσων ϗ ἐλαχίσων μεθόδυ, ἐπιλυθεῖεν, ἐμφαινέτω συνέκθεσίς τις τῦ χ τὴν ποσότητα, ἥν δέοι μεγίσην εἶναι ἢ ἐλαχίσην, ϗ ἰσωθήτω βαθμῷ τινι τῦ υ, ϗ εἰλήφθω ἐκ τῆς ἐξισώσεως τὰ ἀπει-

ρος ἀ· τὰ δ ἄλλα γενέσθω, ὡς εἰ ζητοῖτο ἡ μεγίση ἢ ἐλάχιση τῶν καμπύλη ἐνηρμοσμένων.

95. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η΄. Εὑρεῖν ὀρθογώνιον μέγιστον ἁπάντων, ὧν τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τὸ ἄθροισμα ἔσιν = 2α.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω χ ἡ βάσις τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου· τοιγαροῦν τὸ αὐτοῦ ὕψος ἔσι 2α — χ, ὅπερ, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ χ, ποιεῖ 2αχ — χχ ἐπιφάνειαν τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου· γενέσθω ἴσον 2αχ — χχ = υυ· λημθέντων δὲ αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως τῶν ἀπειροσῶν, ᾗ τεθέντος δυ = 0, πορισθήσεται 2αδχ — 2χδχ = 0, 2α = 2χ, α = χ· ἔσιν ἄρα ἡ βάσις ἴση τῷ ὕψει· τὸ δὲ ὀρθογώνιον μεταβάλλει εἰς τετράγωνον, οὗ πλευρὰ = α ἡμίσειά ἐσι τοῦ ἀθροίσματος 2α.

96. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πρόδηλον δὲ, ὅτι τ' αὐτὸν ἂν ἀποτελεσθείη, λαμβανομένων τῶν ἀπειροσῶν τοῦ 2αχ — χχ, ᾗ τιθεμένων = 0· δυνατὸν ἄρα παραλείπειν τὴν υ.

97. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τοῦ 2α ἐμφαίνοντος εὐθεῖαν, ἣν δεῖ ἔτω δίχα τεμεῖν, ὅπως τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων χ, 2α — χ ὑπάρχῃ τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον, εὑρεθήσεται χ = α, τοῦτ' ἔσι δεήσει τὴν εὐθεῖαν εἰς δύω ἰσάλληλα μέρη τεμεῖν· τοῦ δ' αὐτοῦ 2α παρισῶντος ἀριθμὸν, ὃν πρόκειται διελεῖν εἰς δύω μέρη χ, 2α — χ, ὅπως ὁ γινόμενος ὑπ' αὐτῶν ᾖ ὁ μέγιστος, ἔσαι χ = α, τοῦτ' ἔσιν ἔσονται τὰ δύω μέρη ἰσάλληλα ᾗ ἑκάτερον τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ τὸ ἥμισυ· ὡς εἴπερ ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς εἴη 12, ἑκάτερον τῶν δύω μερῶν ἔσαι = 6, ὁ δ' ὑπ' αὐτῶν παραγόμενος 36 ἔσαι ὁ μέγιστος τῶν δυναμένων γενέσθαι ὑπ' ἄλλων ὡντινωνοῦν δυοῖν τμημάτων τοῦ 12 εἰς δύω τμηθέντος.

98. ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἰ δέ τις ἀμφιβάλλοι, ὡς ἄρα τὸ εὑρεθὲν μὴ εἴη μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, ἀντικατασησάτω $\alpha + \delta\chi$ ἐν τῇ ἐξισώσει $2\alpha\chi - \chi^2 = \upsilon^2$· καὶ δὴ ἔξει $2\alpha^2 + 2\alpha\delta\chi - \alpha\alpha - 2\alpha\delta\chi - \delta\chi^2 = \alpha\alpha - \delta\chi^2$· ἀντικατασησάτω εἶτα $\alpha - \delta\chi$ ἀντὶ χ· καὶ δὴ ἔξει $2\alpha\alpha - 2\alpha\delta\chi - \alpha\alpha + 2\alpha\delta\chi - \delta\chi^2 = \alpha\alpha - \delta\chi^2$· ἐπεὶ ἓν ἑκάτερον τῶν δύω ἀποτελεσμάτων ἔσιν ἔλαττον ἢ $\alpha\alpha$, ὃ ἀποτελεῖται ἐκ τῆς ὑποθέσεως τοῦ $\delta\upsilon = 0$· ἄρα τὸ εὑρεθὲν ἔσι μέγιστον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'. Κύκλῳ ἐγγράψαι τὸ μέγιστον ἁπάντων τῶν ἐγγραφῆναι δυναμένων ὀρθογωνίων (κ. 11).

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω τὸ ΑΒνμ τὸ ζητούμενον· ἐὰν ἓν αἱ ΖΘ, ηι διάμετροι ἐπιζευχθῶσι παραλλήλως ταῖς τοῦ ὀρθογωνίου πλευραῖς, τὸ ὀρθογώνιον διαιρεθήσεται εἰς τέσσαρα ὀρθογώνια ἰσάλληλα (*), ὧν ἕν ἐσι τὸ ΛΚΘΒ, οὗ τὸ τετραπλάσιον προδήλως ἐξισωθήσεται τῷ ζητουμένῳ ὀρθογωνίῳ· ἔσω οὖν ἡ τοῦ κύκλου ἀκτὶς $= \alpha$, καὶ ληφθεισῶν τῶν πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένων, ἡ τεταγμένη ΒΘ ἔσαι $= \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$· καὶ δὴ τὸ ὀρθογώνιον ΛΚΘΒ $= \chi \times \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, οὗ τὸ τετραπλοῦν $4\chi\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} = \beta\chi\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, ὑποτεθέντος $4 = \beta$, ἔσαι τὸ ζητούμενον μέγιστον ὀρθογώνιον· ταύτης οὖν τῆς ποσότητος τοῦ ἀπειροσοῦ ληφθέντος, καὶ τεθέντος $= 0$, ἔσαι $\beta\delta\chi\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} - \beta\chi\chi\delta\chi(\alpha\alpha - \chi^2)^{-\frac{1}{2}} = 0$, διαιρέσει δὲ διὰ $\beta\delta\chi$, καὶ μεταθέσει, $\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} = \chi\chi \cdot (\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$,

---

(*) Διάμετρος γὰρ χορδὴν κάθετος ἐφισαμένη, δίχα ταύτην τέμνει (Γεωμ. 157).

πολλαπλασιασμῷ δὲ ἐπὶ $(\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$, γίνεται $\alpha\alpha - \chi\chi = \chi\chi . (\alpha\alpha - \chi\chi)^{\circ} = \chi\chi$· ἄρα $\alpha\alpha = 2\chi\chi$, $\chi\chi = \frac{\alpha\alpha}{2}$, $\chi = \sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}}$· ἀντικατασαθείσης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν $4\chi\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, πρόεισι $4\sqrt{(\alpha x - \frac{\alpha\alpha}{2})}\,x$ $\frac{\alpha\alpha}{2} = \mathrm{AB}\mu\nu$, ᾗ $\mathrm{B}\vartheta = \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} = \sqrt{(\alpha x - \frac{1}{2}\alpha\alpha)} = \sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}} = \chi$· ἄρα τὸ ὀρθογώνιον $\mathrm{B}\vartheta\mathrm{K}\Lambda$ ἔχει δύω πλευρὰς τὰς $\mathrm{B}\vartheta$, $\mathrm{K}\vartheta$ ἴσας· ἄρα αὐτό τε ᾗ ἑπομένως τὸ τετραπλάσιον αὐτῷ ἔσι τετράγωνον· ἄρα τὸ μέγισον ὀρθογώνιον τῶν κύκλῳ ἐγγραφῆναι δυναμένων ἔσι τετράγωνον.

100. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Η' ἄρτι εὑρημένη δύναμις τῷ χ ἡ αὐτὴ ἔσαι ᾗ εἰ, πρὶν λαβεῖν τὰ ἀπειροσὰ, ἀποβληθῇ ὁ ἄτρεπτος πολλαπλασιασὴς 6. ἐκεῖν ὡσαύτως ἂν ποιήσειέ τις, ὁσάκις ἂν προκέηται εὑρεῖν τι μέγισον, ἢ ἐλάχισον· ἐμφαινέτω γὰρ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}\upsilon$ ποσότητα τὴν μεγίσην, ἢ ἐλαχίσην, τῶν ἐν τῷ προβλήματι· ἐκεῖν τὸ αὐτῆς ἀπειροσὸν, ὑποτεθέντος $\delta\upsilon = 0$, ἔσαι $\frac{\alpha}{\beta}\delta\upsilon = \frac{\alpha}{\beta} \times 0 = 0$, ὅπερ ἂν εὐρεθείη πάντως, ἀποβληθέντων πρῶτον τῶν ποιητῶν α, $\frac{1}{\beta}$· ἐὰν δὲ τὸ ἀπειροσὸν ὑποτεθῇ $\frac{\alpha}{\beta}\delta\upsilon = \frac{\mu(\gamma - \chi)^{\mu}\delta\chi}{(\alpha - \chi)^{\nu}}$, ᾗ ὑποτεθῇ $\delta\upsilon = \infty$, πορισθήσεται $(\alpha - \chi)^{\nu} = 0$, $\alpha - \chi = 0$, $\chi = \alpha$· τὸ αὐτὸ ὡς εἴπερ μόνη ἡ υ εἴη ἡ μεγί-

ση, ἡ ἐλαχίση· ἄχρησοι ἄρα οἵ τε πολλαπλασιασαὶ, καὶ οἱ διαιρέται οἱ ἄτρεπτοι τῆς ζητυμένης μεγίσης, ἢ ἐλαχίσης, ποσότητος· διὸ πρὶν ἢ λαβεῖν αὐτῆς τὰ ἀπειροσὰ ἀπεξῄρίφθων· ὅπερ καὶ τὸν λογισμὸν ἁπλούσερον ἀπεργάζεται.

101. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι΄. Γωνίας ὀρθῆς τῆς ὑπὸ ZBM ἐντὸς τῶν ἀδιορίσων σκελῶν ZB, BM σημείυ δοθέντος τυ Δ, εὑρεῖν τὴν δι' αὐτυ μὲν ἀγομένην ἐλαχίσην εὐθεῖαν, ὑπὸ δὲ τῶν σκελῶν ἀπολαμβανομένην (κ. 12).

ΛΥΣΙΣ. Συσαθέντος τυ ὀρθογωνίυ ΔΓΒΑ ἔσω AB $= \alpha$, καὶ $B\Gamma = \beta$, καὶ $AZ = \chi$, ὁπυ ἔσαι $Z\Delta^2 = AZ^2 + A\Delta^2 = AZ^2 + B\Gamma^2 = \chi^2 + \beta^2$, καὶ $Z\Delta = \sqrt{(\beta^2 + \chi\chi)}$· ἀλλὰ διὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ZAΔ, ZBM, ἔσι $ZA : Z\Delta :: ZB : ZM$, ἢ $\chi : \sqrt{(\beta\beta + \chi\chi)} :: \alpha + \chi :$

$$ZM = \frac{\alpha + \chi}{\chi} \times \sqrt{(\beta\beta + \chi\chi)}$$

· ὑποτεθείσης ταύτης τῆς ποσότητος $= \upsilon$, καὶ τῶν ἀπειροσῶν λιφθέντων, προέρχεται

$$\delta\upsilon = \frac{(\chi\delta\chi - \alpha\delta\chi - \chi\delta\chi)}{\chi^2} \times \sqrt{(\beta\beta + \chi\chi)} + \frac{(\alpha + \chi)}{\alpha} \times \frac{1}{2} \times 2\chi\delta\chi \cdot (\beta\beta + \chi\chi)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\alpha\delta\chi}{\chi\chi}$$

$$\times \sqrt{(\beta\beta + \chi\chi)} + \frac{\alpha\chi\delta\chi + \chi\chi\delta\chi}{\chi\sqrt{(\beta\beta + \chi\chi)}}$$

· ἀναγωγῇ δὲ ἐπὶ κοινὸν ὄνομα πορισθήσεται $\delta\upsilon =$

$$\frac{-\alpha\beta\beta\delta\chi - \alpha\chi\chi\delta\chi + \alpha\chi\chi\delta\chi + \chi\chi\chi\delta\chi}{\chi^2\sqrt{(\beta\beta + \chi\chi)}},$$

ἀναγωγῇ δὲ, καὶ ὑποθέσει τῷ $\delta\upsilon = 0$, καὶ διαιρέσει διὰ $\delta\chi$, προέρχεται, $-\alpha\beta\beta + \chi^3 = 0$, $\chi^3 = \alpha\beta\beta$, $\chi = \sqrt[3]{\alpha\beta\beta}$· ἐὰν ἓν ζητηθῶσι δύω μέσαι ἀνάλογοι μεταξὺ β καὶ α, ἡ πρώτη

ἔσαι $= \chi$ (*)· ληφθείσης ἄρα τῆς AZ ἴσης τῇ πρώτῃ ταύτῃ μέσῃ ἀναλόγῳ, διὰ τῶν σημείων Z, Δ ἀχθεῖσα ἡ εὐθεῖα ZΔM ἔσεται ἡ ζητουμένη ἐλαχίστη· ἐὰν δὲ ἐν τῷ τύπῳ $\frac{-\alpha\beta\beta\delta\chi - \alpha\chi\chi\delta\chi + \alpha\chi\chi\delta\chi + \chi\chi\chi\delta\chi}{\chi^2 \surd(\beta\beta+\chi\chi)} =$ $\delta v = \frac{-\alpha\beta\beta\delta\chi + \chi^3\delta\chi}{\chi^2\surd(\beta\beta+\chi\chi)}$ ὑποτεθῇ $\delta v = \infty$, ποριοθήσεται $\chi^2\surd(\beta\beta+\chi\chi) = 0$, $\beta\beta+\chi\chi = 0$, $\chi\chi = -\beta\beta$, $\chi = \pm\surd-\beta\beta$, ποσότης ἀνύπαρκτος, συνιδεῖν παρεχομένη, μηδὲν ἄλλο ὑπάρχειν ἐλάχιστον, ὅτι μὴ τὸ ἐμφαινόμενον διὰ $\chi = \sqrt[3]{\alpha\beta\beta}$.

102. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Εἰς εὕρεσιν τῆς χ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὸν AM παραμέτρῳ $= \beta$ ἡ AΔΠ παραβολή (χ. 13), καὶ εἰλήφθω AB $= \frac{\beta}{2}$, καὶ BK ἐσάθω κάθετος τῷ ἄξονι AM $= \frac{\alpha}{2}$· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ K, διαστήματι δὲ τῷ KA, γεγράφθω κύκλου τόξον τὸ ANΔ, τέμνον τὴν AΠ παραβολὴν καθ' ἓν σημεῖον τὸ Δ· φημὶ δὴ τὴν τεταγμένην ΔM ὑπάρχειν $= \chi$· καὶ γὰρ $\Delta Z = \Delta M - KB = \chi - \frac{\alpha}{2}$· ἀλλὰ, διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς παραβολῆς, ἔστιν AM × $\beta = \Delta M^2$, ἢ AM $= \frac{\chi\chi}{\beta}$· ἄ-

---

(*) Ἔστω χ μὲν ἡ πρώτη, ψ δὲ ἡ δευτέρα μέση ἀνάλογος· ἀκὸν ἔσαι ∴ β : χ : ψ : α, καὶ (Συμβ. λογ. 270) $\beta^3 : \chi^3$ :: β : α, $\beta^3\alpha = \chi^3\beta$, $\chi^3 = \beta^2\alpha$, καὶ $\chi = \sqrt[3]{\beta^2\alpha}$.

ρα $BM = \frac{\beta}{2} - \frac{\chi\chi}{\beta}$. καὶ ἐπείπερ $KE = BM$, ἔσαι

$K\Delta^2 = (\chi - \frac{\alpha}{2})^2 + (\frac{\beta}{2} - \frac{\chi\chi}{\beta})^2$, ποσότης ἀ-

ναγομένη εἰς $-\alpha\chi + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\chi^4}{\beta\beta} + \frac{\beta^2}{4}$. ἔσι δὲ καὶ

$K\Delta = KA$, καὶ $KA^2 = AB^2 + KB^2 = \frac{\beta\beta}{4} + \frac{\alpha\alpha}{4}$. ἄρα

$\frac{\beta\beta}{4} + \frac{\alpha\alpha}{4} = -\alpha\chi + \frac{\chi^4}{\beta\beta} + \frac{\alpha\alpha}{4} + \frac{\beta^2}{4}$. μεταθέ-

σει ἄρα καὶ ἀναγωγή, $\frac{\chi^4}{\beta\beta} = \alpha\chi$, $\chi^4 = \beta\beta\alpha\chi$, $\chi^3 = \beta$

$\beta\alpha$, $\chi = \sqrt[3]{\beta\beta\alpha}$. ἄρα $\Delta M = \chi$.

103. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐκ τῆς προόδου ∴ β : χ : ψ : α (ὡς ἀνωτέρω ὑποσεσημείωται) προέρχεται β : α :: β^3 : χ^3, εἴτ' ἂν χ^3 : β^3 :: α : β. ἐὰν ἄρα α ᾖ διπλοῦν, τριπλοῦν, τετραπλοῦν κτ. τοῦ β, ὁ ἐκ τοῦ χ κύβος ἔσαι διπλάσιος, ἢ τριπλάσιος κτ. τοῦ ἐκ τοῦ β. εὐπετῶς ἄρα ἐπιλύεται τὸ περὶ τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου πρόβλημα διὰ κύκλου καὶ παραβολῆς, ὃ φθάσαντες δι' ὑπερβολῆς καὶ παραβολῆς ἐπελύσαμεν (Υ'ψ. Γεωμ. 309).

104. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ΄. Ἡμικυκλίῳ τῷ ΑΒμ ἐγγράψαι τὸ μέγιστον τῶν ἐγγραφῆναι δυναμένων τριγώνων (χ. 14).

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ἡ διάμετρος $A\mu = \alpha$, καὶ ἡ πλευρὰ $AB = \chi$. ἐπεὶ δὲ ἡ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία B ἔσιν ὀρθὴ (Γεωμ. 180), τὸ τρίγωνον ΑΒμ ἔσαι ὀρθογώνιον. καὶ δὴ ἔσαι $B\mu^2 = A\mu^2 - BA^2$, $B\mu = \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$. τὸ

δὲ τρίγωνον ΑΒμ ἔσαι $= \frac{1}{2}$ ΑΒ . Βμ $= \frac{1}{2}\chi \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, ἔπερ τὰ ἀπειροσὰ, ἰσέμενα τῷ ο, παρέχεσι $\frac{\delta\chi}{2} \times \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\chi \times -2\chi\delta\chi \times (\alpha\alpha - \chi\chi)^{\frac{1}{2}}$ $= o = \frac{\delta\chi}{2} \cdot \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} - \frac{\chi\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}} = o$, εἴτ' ἓν (ἀναγωγῇ ἐπὶ κοινὸν ὄνομα) $\frac{\alpha\alpha\delta\chi - 2\chi\chi\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}} =$ $\delta u = o$· ἄρα $\alpha\alpha - 2\chi\chi = o$, $\alpha\alpha = 2\chi\chi$, $\chi\chi = \frac{\alpha\alpha}{2}$, $\chi = \alpha\sqrt{\frac{1}{2}}$· ἀντικαταταθείσης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν Βμ $= \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, εὑρεθήσεται Βμ $= \sqrt{(\frac{2\alpha\alpha}{2} - \frac{\alpha\alpha}{2})} = \alpha\sqrt{\frac{1}{2}}$· ἄρα ΒΑ $=$ Βμ, τοῦτ' ἔσι τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔσι τὸ μέγισον ἁπάντων τῶν ἡμικυκλίῳ ἐγγραφῆναι δυναμένων.

Ε' ἀν ὑποτεθῇ $\delta u = \frac{\alpha\alpha\delta\chi - 2\chi\chi\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}} = \infty$, εὑρεθήσεται $2\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} = o$, $\alpha\alpha - \chi\chi = o$, $\alpha\alpha = \chi\chi$, $\alpha = \chi$· ἄρα ἡ ΑΒ πλευρὰ ἔσαι ἴση τῇ Αμ διαμέτρῳ, ἥ χ' συμπίπτει, χ' ἑπομένως ἀδὲν συνίσαται τρίγωνον, ἢ, εἰ βέλει, τὸ τρίγωνον ἔσαι $= o$· ἀδεμία ἄρα λύσις τοῦ προβλήματος ἔσαι ἀποδεκτέα, εἰμὴ ἡ ἄρτι ἀποδεδομένη.

105. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒ'. Σφαίρᾳ δοθείσῃ ἐγγράψαι κῶνον, οὗ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια μεγίση εἴη πάντων τῶν ἐγγραφῆναι δυναμένων (χ. 15).

ΛΥΣΙΣ. Ε'ςω τῆς σφαίρας ἡ διάμετρος $= \alpha$, χ'

τῦ ζητυμένυ κώνυ ΓΑμ τὸ ὕψος ΑΔ = χ· ἐπεὶ δὲ ἡ κυρτὴ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς περιφερείας, ἧς ἀκτὶς ἡ ΔΓ, καὶ τῦ ἡμίσεος τῆς ΑΓ, αἱ δὲ κυκλικαὶ περιφέρειαι εἰσὶν ἐν τῷ λόγῳ τῶν ἀκτίνων, ἡ ζητυμένη ἐπιφάνεια ἔσαι ἀνάλογος τῷ ΓΔ × ΑΓ· ἀλλὰ ΑΓ = √(α. χ) καὶ ΓΔ = √(αχ — χχ), ὡς δῆλον, ἄρα ΑΓ . ΓΔ = √αχ × √(αχ — χχ) = √(α²χχ — αχ³)· ἐπεὶ δὲ αὕτη ἡ ποσότης ζητεῖται εἶναι μεγίςη· καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς ἄρα τετράγωνον α²χχ — αχ³ ἔσαι ὡσαύτως μέγιςον· ἄρα 2α²χδχ — 3αχ²δχ = ο, 2α — 3χ = ο, 2α = 3χ, $\chi = \frac{2\alpha}{3}$· δεῖ ἄρα εἶναι τὸν τῦ ζητυμένυ κώνυ ἄξονα δύω τριτημόρια τῆς σφαιρικῆς διαμέτρυ.

106. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῷ δε τῷ προβλήματι ἐλήφθησαν τὰ ἀπειροςὰ, τῆς μὲν κωνικῆς ἐπιφανείας ἐχὶ, ποσότητος δὲ ἀναλόγυ ταύτῃ, εἴτ' ἓν τῆς πρὸς ἐκείνην λόγον δεδομένον ἐχύσης· ἐφεῖται δὲ τῦτο ἀεί ποτε ἐν τῇ ζητήσει τῦ μεγίςυ καὶ ἐλαχίςυ· ἔςω γὰρ ποσότης ἡτισῦν ἡ γχ — χ³ = υ, ἧς πρόκειται εὑρεῖν τὸ μέγιςον, ἢ τὸ ἐλάχιςον· ἐὰν ἕν ἀντὶ τῶν ταύτης τῆς ποσότητος ἀπειροσῶν ληφθῶσι τὰ ἀπειροςὰ τῆς ποσότητος $\frac{\beta}{\alpha}$ (γχ — χ³), ἥτις ἐςὶν ἐκείνῃ ἀνάλογος, εἴτ' ἓν ἔχει πρὸς τὴν προτεθεῖσαν ποσότητα λόγον ὃν α : β· ἐπεί ἐςιν α : β :: $\gamma\chi - \chi^3 : \frac{\beta}{\alpha} \times (\gamma\chi - \chi^3)$, εὑρεθήσεται (100) ἡ αὐτὴ δύναμις τῦ χ· λυσιτελεῖ δὲ αὕτη ἡ σημείωσις ἐν πολλαῖς περιπτώσεσι.

107. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ΄. Ἐπὶ τῆς εὐθείας Αμ, ὡς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τεθείσης, συςήσασθαι τὸ μέγιςον τῶν δυνατῶν ὀρθογωνίων τριγώνων (χ. 14).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἡ εὐθεῖα Αμ = α, καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ = χ· ἡ τρίτη ἄρα πλευρὰ ἔςαι = $\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$· ἔςαι δὲ ΑΒ × Βμ = $\frac{\chi}{2} \times \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, τύπος τῆς τοῦ τριγώνου ἐπιφανείας· γενομένων οὖν τῶν αὐτῶν, ἃ καὶ ἀνωτέρω (104), εὑρεθήσεται ΑΒ = Βμ = $\sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}}$, τοῦτ' ἔςι τὸ ζητούμενον μέγιςον τρίγωνον ἔςαι ἰσοσκελές· ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς Αμ διαμέτρου γραφῇ ἡμικύκλιον, καὶ ἐκ τοῦ ἐν αὐτῷ μέσου σημείου β ἐπιζευχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΒΑ, Βμ, ποριοθήσεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

108. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔ΄. Ἁπάντων τῶν ἀπειραρίθμων κυλίνδρων, τῶν σφαίρᾳ ἐγγραφῆναι δυναμένων, εὑρεῖν τὸν τὴν μεγίςην ἐπιφάνειαν ἔχοντα ΒΝΜΖ (χ. 16).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἡ τῆς σφαίρας ἀκτὶς Κα = α, καὶ ἐμφαινέτω ἡ Ππ τὸν τοῦ κυλίνδρου ἄξονα, καὶ ΚΠ ἔςω = χ· οὐκοῦν διὰ τὴν κυκλικὴν ἰδιότητα ἔςαι $\Pi\mu^2 = \alpha\alpha - \chi\chi$· ἀλλ' ἡ κυκλικὴ περιφέρεια, ἧς ἀκτὶς ἡ Πμ, ἔςιν ὥσπερ αὕτη ἡ ἀκτὶς, καὶ Ππ = 2χ (ἐὰν γὰρ ἐκ τοῦ Κ κέντρου ἀχθῇ ἡ Κσ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΜΝ, ἡ ΜΝ = πΠ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ σ)· ἄρα ἡ ποσότης 2χ. $\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$ ἔςιν ἀνάλογος τῇ κυρτῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ζητουμένου κυλίνδρου· οὐκοῦν ὑποτιθεμένου υ = 2χ. $\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, ἢ υυ = $4\chi\chi\alpha\alpha - 4\chi^4$, εὑρεθήσεται 2υδυ = 0 = 8χ. ααδχ — $16\chi^3\delta\chi$, αα — 2χχ = 0, αα = 2χχ, $\chi^2 = \frac{\alpha\alpha}{2}$, $\chi = \sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}}$· λαμβανομένης ἄρα ΚΠ

$= \sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}}$, εἴτ' ἔν μέσης ἀναλόγω μεταξὺ α καὶ $\frac{\alpha}{2}$, πορι-

σθήσεται τὸ σημεῖον Π, δι' ὃ ἀχθεῖσα ἡ τεταγμένη Πμ ἔσαι ἀκτὶς τοῦ κύκλω, ὃς ὑποβληθήσεται βάσις· ἡ δὲ Πτ ἔσαι ἄξων τοῦ ζητουμένω κυλίνδρω.

109. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ε'ὰν ἡ καμπύλη AMZB ὑπάρχῃ ἔλλειψις, ἧς μείζων μὲν ἡμιάξων εἴη = α, ἐλάττων δὲ = β, εὑρεθήσεται $\Pi\mu = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$·

αὕτη δὲ ἡ ποσότης, πολλαπλασιαθεῖσα ἐπὶ 2χ, ἀνάλογος ἔσαι τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τῇ ἐλλειπτικῇ κωνοΐδι ἐγγεγραμμένω κυλίνδρω· ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦτο ἔσι πρὸς τὸ ὑπὲρ τῆς σφαίρας εὑρεθὲν ἐν λόγῳ δεδομένῳ (106)· ἄρα ἡ αὐτὴ τοῦ χ εὑρεθήσεται δύναμις· ἡ αὐτὴ δ' ἂν εὑρεθείη δύναμις, κἂν ζητηθείη τὸ μέγισον ὀρθογώνιον ἐλλείψει ἐγγράψαι· ἔσαι γὰρ τόδε τὸ ὀρθογώνιον = 2Πμ

$\times 2\chi = 4\chi\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$· ἄρα τό, τε μέγισον τῶν, ἅπερ ἂν ἐλλείψει ἐγγραφείη, ὀρθογωνίων, καὶ ὁ τὴν μεγίσην ἔχων ἐπιφάνειαν τῶν ἐλλειπτικῇ κωνοΐδι ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων, εὑρεθήσονται, λαμβανομένης ΚΠ =

$\chi = \sqrt{\frac{\alpha\alpha}{2}}$· ἀντικαθισαμένης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν τῇ τοῦ $\Pi\mu^2$, εὑρίσκεται $\Pi\mu^2 = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} \times \frac{\alpha\alpha}{2} = \frac{\beta\beta}{2}$, καὶ Πμ

$= \sqrt{\frac{\beta\beta}{2}}$, ἥτις ἔσὶ μέση ἀνάλογος τῶν β, $\frac{\beta}{2}$.

Ἀλλὰ τῆς σερεότητος τοῦ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένω κυλίνδρω ἴσης ἀναλόγω τῷ $2\chi \cdot \Pi\mu^2$, εἴτ' ἴν τῷ $2\alpha\chi\chi$

— $2\chi^3$, εἰς εὕρεσιν τῦ μεγίσυ ἰσωθήτω τῷ ο τὰ ταύτης τῆς ποσότητος ἀπειροσά· ὅθεν ἔσαι $2\alpha\alpha\delta\chi - 6\chi^2\delta\chi = 0$, $\chi = \sqrt{(\frac{\alpha}{3} . \alpha)}$, καὶ $2\chi = 2\sqrt{(\frac{\alpha}{3} . \alpha)}$· τοσόνδε ἓν ἔσαι τὸ ὕψος τῦ μεγίσυ κυλίνδρυ τῶν δυναμένων ἐγγραφῆναι σφαίρᾳ, ἧς ἡ ἀκτὶς $= \alpha$· ὡς ἓν πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἀκτῖνα εὐπετὲς συνιδεῖν, ὅτι τηνικαῦτα ἔσαι

$$\Pi\mu = \sqrt{(\frac{2\alpha}{3} . \alpha)}.$$

110. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΕ΄. Εὐθεῖαν δοθεῖσαν τὴν Αβ ἕτως εἰς δύω κατὰ τὸ γ τεμεῖν, ὅπως τὸ γινόμενον ὑπὸ $A\gamma^\mu$ καὶ $\gamma\beta^\nu$ τὸ μέγισον ἢ ἀπάντων (κ. 17).

ΛΤΣΙΣ. Ἔσω εὐθεῖα ἡ $A\beta = \alpha$, καὶ $A\gamma = \chi$· ἄρα $\gamma\beta = \alpha - \chi$· τοιγαρῦν ὑποτιθεμένυ $v = \chi^\mu \times (\alpha - \chi)^\nu$, ἔσαι $\delta v = 0 = \mu\chi^{\mu-1}\delta\chi \times (\alpha - \chi)^\nu - \nu\chi^\mu\delta\chi(\alpha - \chi)^{\nu-1} = 0$· ἄρα μεταθέσει καὶ διαιρέσει διὰ $\chi^{\mu-1} \times (\alpha - \chi)^{\nu-1}\delta\chi$, πρόεισι $\mu\alpha - \mu\chi = \nu\chi$, $\mu\alpha = \mu\chi + \nu\chi$, $\chi = \frac{\mu\alpha}{\mu+\nu}$· ἐὰν ἄρα ἡ $\mu = 2$, καὶ $\nu = 1$, εὑρεθήσεται $\chi = \frac{2\alpha}{3}$, τῦτ' ἔσι τὸ μέγισον τῶν δυνατῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν βάσις μὲν τὸ ἀπὸ τῦ τμήματος $A\gamma$ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὸ λοιπὸν τῆς $A\beta$ εὐθείας, συσαθήσεται, ὅταν $A\gamma$ ἢ $\frac{2}{3}$ τῆς εὐθείας $A\beta$· ἐὰν δὲ ἢ $\mu = \nu = 1$, ἔσαι $\chi = \frac{\alpha}{2}$· ὀκῦν τὸ μέγισον τῶν ὀρθογωνίων, τῶν περιεχομένων ὑπὸ δύω τμημάτων εὐθείας τῆς α, συσαθήσεται, ὅταν τὰ τμήματα ὦσιν ἰσάλληλα· τῦ δὲ α ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος, ὑποτεθέντων $\mu = 3$, καί

$\nu = 2$, ἔσαι $\chi = \frac{3\alpha}{5}$, καὶ ἑπομένως $\gamma\beta = \alpha - \chi = \frac{2\alpha}{5}$. τὸ ἄρα μέγιστον γινόμενον, ὧν ἄντις ποιήσειε, διελὼν ἀριθμὸν εἰς δύω μέρη, καὶ πολλαπλασιάσας τὸν ἐκ θατέρου κύβον ἐπὶ τὸν ἐκ θατέρου τετράγωνον, συσαθήσεται, ὅταν τὸ μὲν ἧ $\frac{3}{5}$ τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ, θάτερον δὲ μέρος $\frac{2}{5}$. ἔτω, προτεθέντος τοῦ ἀριθμοῦ 10, τὸ μὲν πρῶτον μέρος ἔσαι $= 6$, τὸ δὲ $= 4$, ὁ δὲ ὑπὸ 216 καὶ 16 γινόμενος ὁ μέγιστος ἔσαι ἀριθμὸς τῶν ἔτω γενέσθαι δυναμένων. Τοῦ δὲ ν ἀριθμὸν λειπτικὸν ἐμφαίνοντος, ἡ ποσότης $\chi^{\mu}(\alpha - \chi)^{\nu}$ ἔσαι τηνικαῦτα ἐλαχίση· ἔτω, φέρε, ὑποτιθεμένων τοῦ μὲν $\mu = 3$, τοῦ δὲ $\nu = -2$, εὑρεθήσεται $\chi = 3\alpha$, καὶ

$$\chi^{\mu}(\alpha - \chi)^{\nu} = (3\alpha)^{3} \cdot (-2\alpha)^{-2} = \frac{27\alpha\alpha\alpha}{4\alpha\alpha} = \frac{27\alpha}{4},$$

ὅπερ ἔσαι ἐλάχιστον· ὄντων δὲ, τοῦ μὲν $\nu = -1$, τοῦ δὲ $\mu = 2$, εὑρεθήσεται $\frac{\chi^2}{\alpha - \chi}$, ὅπερ, ὑποτεθέντος $\chi = \frac{2\alpha}{2-1} = 2\alpha$, γίνεται $= \frac{4\alpha\alpha}{\alpha - 2\alpha} = \frac{4\alpha\alpha}{-\alpha} = -4\alpha$. τηνικαῦτα ἄρα τὸ σημεῖον Γ εὑρεθήσεται ἐπὶ τῆς Αβ, ἐπὶ θάτερα προαχθείσης, ὡς εἶναι $\mathbf{A\Gamma} = 2\alpha = \frac{\mu\alpha}{\mu - \nu} = 2\alpha$· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ὁ παρονομασὴς $\alpha - \chi = 0$, ἔσαι $\frac{4\alpha\alpha}{\alpha - \alpha} = \frac{4\alpha\alpha}{0} = \infty$· ἔσιν ὃν μέγισόν τι ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει· καὶ γὰρ εἰ τὸ χ ὑποτεθείη ἔλαττον ἢ μεῖζον τοῦ α, εὑρίσκεται ποσότης ἐλάττων ἢ ὅταν ὑποτεθῇ $\chi = \alpha$.

111. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ις΄. Τριχοτομῆσαι τὴν δοθεῖ-

σαν εὐθεῖαν α εἰς τμήματα τὰ $A = \chi$, $B = \psi$, $\Gamma = \alpha - \chi - \psi$, ὅπως τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον $\vartheta = \chi^{\mu} \psi^{\nu} (\alpha - \chi - \psi)^{\rho}$ μέγιστον ἢ πάντων τῶν ἕτω γενέσθαι δυναμένων.

ΛΥΣΙΣ. Εἰλήφθω τὰ ἀπειροστὰ τοῦ γινομένου ϑ, ἐπιλαμβανομένου τοῦ ψ ὡς ἀτρέπτου· καὶ δὴ ἔσται $d\chi . \chi^{\mu-1} \psi^{\nu} \times (\alpha - \chi - \psi)^{\rho} - \rho d\chi . \chi^{\mu} \psi^{\nu} (\alpha - \chi - \psi)^{\rho-1} = 0$· διαιρέσει δὲ διὰ $d\chi \chi^{\mu-1} \psi^{\nu} \times (\alpha - \chi - \psi)^{\rho-1}$, προέρχεται $\mu \cdot (\alpha - \psi - \chi) - \rho\chi = 0$· ὅθεν $\chi = \frac{\mu\alpha - \mu\psi}{\mu + \rho}$· ταύτης δὲ τῆς τοῦ χ δυνάμεως ἀντικαταστα-θείσης ἐν τῷ γινομένῳ ϑ, ἀποβαλλομένου τοῦ ἀτρέπτου ποιητοῦ προκύψει $\psi^{\nu} (\alpha - \psi)^{\mu+\rho}$· τῶν δὲ ταύτης τῆς ποσότητος ἀπειροστῶν διαιρεθέντων διὰ $d\psi . \psi^{\nu-1}$, καὶ ἰσωθέντων τῷ 0, προέρχεται $\nu\alpha - \nu\psi - \mu\psi - \rho\psi = 0$, εἴτ' ἕν $\psi = \frac{\nu\alpha}{\mu + \nu + \rho}$· ταύτης δὲ τῆς δυνάμεως ἐν τῇ τῆς χ ἀντικαταστα-θείσης, εὑρίσκεται $A = \frac{\mu\alpha}{\mu + \nu + \rho}$· ἀντικαταστα-θεισῶν δὲ τῶν δυνάμεων τῆς ψ καὶ τῆς χ, τῶν ἄρτι εὑρημένων ἐν τῇ τοῦ Γ, πορισθήσεται $\Gamma = \frac{\rho\alpha}{\mu + \nu + \rho}$· ἐὰν ἓν ἢ $\mu = \nu = \rho = 1$, τὰ τρία τμήματα ἰσάλληλα ἔσονται, καὶ ἕκαστον τριτημόριον τῆς εὐθείας α· τ' αὐτὸν ἔσαι καὶ εἰ ἀριθμὸς προκέοιτο εἰς τοιάνδε διάτμησιν. Βουλομένοις δὲ διατεμεῖν εὐθεῖαν, ἢ ἀριθμὸν δοθέντα τὸν α, εἰς τέσσαρα μέρη $A = \chi$, $B = \psi$, $\Gamma = \omega$, $\Delta = \alpha - \chi - \psi - \omega$, ὅπως τὸ γινόμενον $A^{\mu} B^{\nu} \Gamma^{\rho} \Delta^{\sigma}$ ὑπάρχῃ μέγιστον, δεμένοις $\mu + \nu + \rho + \sigma = \tau$, ἔσαι $A =$

$\frac{\mu\alpha}{\tau}$, ϗ Β $= \frac{\nu\alpha}{\tau}$, ϗ Γ $= \frac{\rho\alpha}{\tau}$, ϗ Δ $= \frac{\sigma\alpha}{\tau}$, ὡς τὰ μέρη τῆς εὐθείας, ἢ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ α, ὑπάρχειν πρὸς ἄλληλα, ὡς οἱ αὐτῶν δεῖκται· ἐὰν ἓν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ᾖ ϛ, ϗ μ = 3, ϗ ν = 2, ϗ ρ = 1, τὰ τρία μέρη ἔσονται 3, 2, 1· ὁ δὲ γινόμενος ἐκ τοῦ κύβου τοῦ πρώτου, ϗ τοῦ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου, ϗ τοῦ πρώτου βαθμοῦ τοῦ τρίτου, εἴτ' ἓν ὁ 108 ἐστὶν ὁ μέγιστος τῶν, ὧν ἄντις ποιήσειεν ἐκ τριῶν τοῦ 6 τμημάτων, πολλαπλασιάσας τὸν ἐκ τοῦ πρώτου κύβον ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον, ϗ τὸν ἐκ τούτων γενόμενον ἐπὶ τὸν πρῶτον βαθμὸν τοῦ τρίτου.

112. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἰ'σέον δὲ ὡς, ὅτε ἡ ζητουμένη ποσότης ἀντιστοιχεῖ πολλοῖς ἀγνώστοις ἐχομένοις ἀλλήλων, δυνατὸν ὑποθέσθαι, τινὰ μὲν αὐτῶν τρεπτὰ, τὰ δ' ἄλλα ἄτρεπτα, εἰσάγοντας τὰς εὑρημένας δυνάμεις ἐν τῇ πρώτῃ ἐνθέσει, μέχρις ἂν ἀφικώμεθα εἰς ἓν μόνον ἄγνωστον· ϗ τηνικαῦτα εὑρεθήσεται ἡ ζητουμένη ποσότης διὰ τῆς λημφθείσης εἰς χρῆσιν ἀνωτέρω (111) μεθόδου.

113. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΖ'. Τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως Αμ συσταθῆναι δυναμένων ἰσοπεριμέτρων τριγώνων τὸ μεγίστον εὑρεῖν (χ. 18).

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ἡ περίμετρος = 2π, ἡ δὲ βάσις Αμ = α, ϗ ἡ πλευρὰ Αβ = χ· ἀνὴν ἡ πλευρὰ βμ ἔσαι = 2π — α — χ· ἀλλ' ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια ἔστιν (Γεωμ. 562) $= \sqrt{\pi . (\pi - \alpha) . (\pi - \chi) . (\alpha + \chi - \pi)}$· ταύτης τῆς ποσότητος ὑποτεθείσης = υ ϗ τετραγωνισθείσης, προέρχεται υυ = π × (π — α) × (π — χ) × (α + χ — π)· ἐκδηλοῦντες ἓν τὸν λογάριθμον διὰ Λ, καὶ ἀναμιμνησκόμενοι, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν

ποιητῶν ἔσιν ἴσον τῷ λογαρίθμῳ τοῦ γινομένου, ἔξομεν Λπ $+ \Lambda(\pi - \alpha) + \Lambda(\pi - \chi) + \Lambda(\alpha + \chi - \pi) =$ $2\Lambda v$· ἐπεὶ π καὶ α εἰσὶ ποσότητες ἄτρεπτοι· ἄρα $\frac{-\delta\chi}{\pi - \chi}$ $+ \frac{\delta\chi}{\alpha + \chi - \pi} = \frac{2\delta v}{v} = 0$, ὑποτιθεμένου τοῦ $\delta v = 0$· ἄρα $\frac{1}{\alpha + \chi - \pi} - \frac{1}{\pi - \chi} = 0$, εἴτ' ὂν $\frac{1}{\alpha + \chi - \pi} = \frac{1}{\pi - \chi}$, ἢ $\pi - \chi = \alpha + \chi - \pi$· ἄρα $2\pi - \alpha = 2\chi$· ἄρα αἱ πλευραὶ Αβ καὶ βμ εἰσὶν ἴσαι καὶ τὸ ζητούμενον τρίγωνον ἰσοσκελές.

114. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πάντων ἄρα τῶν ἰσοπεριμέτρων τριγώνων μέγισόν ἐσι τὸ ἰσόπλευρον· ἐὰν γὰρ ᾖ τὸ ζητούμενον τρίγωνον τὸ Αβμ, καὶ ζητῆται ἡ βάσις αὐτοῦ Αμ, ἐπεὶ ἐκ τῶν εἰρημένων αἱ δύω λοιπαὶ πλευραὶ εἰσὶν ἰσάλληλοι, κληθείσης 2χ τῆς βάσεως, τὸ ἄθροισμα τῶν δύω λοιπῶν πλευρῶν ἔσαι $2\pi - 2\chi$, καὶ $\pi - \chi$ ἑκατέρα τῶν δυεῖν· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἔσαι $v = \sqrt{\pi(\pi - 2\chi) \cdot (\chi) \cdot (\chi)}$, $2\lambda v = \lambda\pi + \lambda(\pi - 2\chi) + 2\lambda\chi$, $\frac{2\delta v}{v} = 0 = \frac{-2\delta\chi}{\pi - 2\chi}$ $= \frac{2\delta\chi}{\chi}$, $\frac{-2}{\pi - 2\chi} + \frac{2}{\chi} = 0$, $\frac{2}{\chi} = \frac{2}{\pi - 2\chi}$, $\pi - 2\chi = \chi$, $\pi = 3\chi$, $\chi = \frac{\pi}{3}$, $2\chi = \frac{2\pi}{3}$· ἡ βάσις ἄρα τριτημόριόν ἐσι τῆς περιμέτρου· καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν τριῶν ἔσιν $= \pi - \chi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, τὸ τρίγωνον ἔσιν ἰσόπλευρον.

115. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΗ΄. Πάντων τῶν παραλληλεπιπέδων, τῶν ἴσων δοθέντι κύβῳ τῷ β^3, ἐν ὧν μία τῶν πλευρῶν δεδομένη ἐστὶν ἡ α, εὑρεῖν τὸ ἔχον ἐλαχίστην ἐπιφάνειαν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω μία τῶν ζητουμένων πλευρῶν ἡ χ· τὸ ἓν γινόμενον α.χ ἔσαι ἴσον ἑνὶ τῶν περιεχόντων ἐπιπέδων, ὃ δυνάμεθα ἐκλαβεῖν ὡς βάσιν· διαιροῦντες τοίνυν τὴν στερεότητα β^3 διὰ τῆς βάσεως αχ εὑρίσκομεν τὸ ὕψος $\frac{\beta 3}{\alpha\chi}$, ὃ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ α καὶ χ χωρὶς ἔξομεν δύω γινόμενα, ὧν τὸ ἄθροισμα ἔσαι τὸ ἥμισυ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας· ἄρα $\alpha\chi + \frac{\beta 3}{\chi} + \frac{\beta 3}{\chi}$ ἔστι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπιφανείας· ἐξισοῦντες ἓν τῷ ο τὰ ταύτης τῆς ποσότητος ἀπειροστὰ, εὑρίσκομεν $\alpha d\chi - \frac{\beta\beta\beta d\chi}{\chi\chi} = 0$, $\alpha = \frac{\chi^3}{\chi^2}$, $\chi^2 = \frac{\beta 3}{\alpha}$, $\chi = \sqrt{\frac{\beta 3}{\alpha}}$· ἄρα ἡ πλευρὰ $\frac{\beta 3}{\alpha\chi} = \sqrt{\frac{\beta^6}{\alpha\alpha\chi\chi}} = \sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha}}$· ἄρα ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ἐστιν $= \alpha$, τῶν δὲ λοιπῶν δυεῖν ἑκατέρα $= \sqrt{(\frac{\beta^3}{\alpha})}$.

116. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΘ΄. Πάντων τῶν παραλληλεπιπέδων τῶν ἴσων τῷ δοθέντι κύβῳ β3 εὑρεῖν τὸ ἔχον ἐλαχίστην ἐπιφάνειαν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐὰν μία τῶν πλευρῶν κληθῇ χ, ἑκατέρα τῶν λοιπῶν δύω ἔσαι $= \sqrt{\frac{\beta 3}{\chi}}$, ὡς ἕπεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος· λαμβάνοντες ἓν τὸ ἄθροισμα τῶν γι-

νομένων ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν, εὑρίσκομεν τὴν ἡμίσειαν ἐπιφάνειαν $= 2\chi\sqrt{\frac{\beta 3}{\chi}} + \sqrt{\frac{\beta 3}{\chi}} \times \sqrt{\frac{\beta 3}{\chi}} = 2\sqrt{(\beta 3\,\chi)}$

$+ - \frac{\beta 3}{\chi} = \upsilon$, $\delta\upsilon = 0 = \frac{\beta 3\,\delta\chi}{\sqrt{(\beta 3\,\chi)}} - \frac{\beta 3\,\delta\chi}{\chi^2}$· ἄρα $\chi^2 =$ $\sqrt{(\beta 3\,\chi)}$, $\chi^4 = \beta 3\,\chi$, $\chi^3 = \beta^3$, $\chi = \beta$· ἄρα ἡ πλευρὰ $\chi = \beta$· ᾗ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν λοιπῶν ἔσιν $=$ $\sqrt{\frac{\beta^3}{\chi}} = \sqrt{\frac{\beta^3}{\beta}} = \sqrt{\beta^2} = \beta$· δῆλον ἄρα, ὅτι ὁ προτεθεὶς κύβος ἐξικανοῖ πρὸς ἐπίλυσιν τῦ προβλήματος.

117. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Κ΄. Πάντων τῶν τὴν αὐτὴν ἐχόντων δεδομένην στερεότητα κώνων εὑρεῖν τὸν ἔχοντα ἐλαχίσην ἐπιφάνειαν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω υ ἡ τῆς βάσεως ἀκτὶς, ᾗ χ τὸ ὕψος· $\sqrt{(\upsilon\upsilon + \chi\chi)}$ ἔσαι ἡ τῦ κώνυ πλευρά· τιθεῖσι δὲ $1 : \pi :: \upsilon : \pi\upsilon$, εὑρεθήσεται ἡ κυκλικὴ περιφέρεια, ἧς ἀκτὶς $= 1$· ἄρα $\pi\upsilon\sqrt{(\upsilon\upsilon + \chi\chi)}$ ἔσαι, ὥσπερ ἡ ζητυμένη ἐπιφάνεια, ἥτις ὑποτεθείσθω $= \psi$· ἀποβολῇ ἄρα τῦ ἀτρέπτυ ποιητῦ, $\psi^2 = \upsilon^4 + \chi\chi\upsilon^2$· λαμβανομένων δὲ τῶν ἀπειροστῶν, ᾗ ὑποτιθεμένυ $\delta\psi = 0$, εὑρίσκεται $2\psi\delta\psi = 0 = 4\upsilon^3\,\delta\upsilon + 2\chi\upsilon\upsilon\delta\chi + 2\chi^2\,\upsilon\delta\upsilon$· ἡ ἓν στερεότης, ἴσα ὡς τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς βάσεως (ἥτις ἐσὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος υ τετράγωνον) ᾗ τῦ ὕψυς, ἔσαι ἀνάλογος τῷ $\chi\upsilon\upsilon$· ἀλλ' ἔσιν ἄτρεπτος ἐξ ὑποθέσεως ἡ στερεότης· ἄρα τὸ ἀπειροστὸν τῦ $\upsilon^2\chi$ ἔσαι $= 0$· ὁμῦ $2\upsilon\chi\delta\upsilon + \upsilon^2\delta\chi = 0$, $\upsilon\delta\chi = -2\chi\delta\upsilon$· ἀντικαθισαμένης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως τῦ $\upsilon\delta\chi$ ἐν τῷ τῆς ἐπιφανείας ἀπειροστῷ, εὑρίσκεται $4\upsilon^3\,\delta\upsilon - 4\chi^2\,\upsilon\delta\upsilon + 2\chi^2\,\upsilon\delta\upsilon = 0$, $4\upsilon^2 - 2\chi^2 = 0$, $4\upsilon^2 = 2\chi^2$, $2\upsilon^2 = \chi\chi$·

ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως τετράγωνον δεῖ εἶναι ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τοῦ ὕψους τετραγώνου.

Ε'ὰν δοθείσης στερεότητος ἄγγους κυλινδρικοῦ, πλήρους ὕδατος, ζητηθῶσιν αἵ τινες εἶεν αὐτοῦ αἱ διαστάσεις, ἵνα χωρήσῃ ποσότητα δεδομένην ὑγροῦ, τῆς αὐτοῦ ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας ἐλαχίστης ἁπασῶν τῶν δυνατῶν ὅσης, γενέσθω = α3 ἡ δοθεῖσα ποσότης τοῦ ὑγροῦ, ἡ ἡ στερεότης, ἡ τὸ ἐσωτερικὸν διάστημα τοῦ ἄγγους, καὶ χ ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος, καὶ ψ τὸ ἐσωτερικὸν ὕψος, καὶ ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος = 1 : π· ἡ ἄρα βάσις τοῦ ἄγγους ἔσαι = $\frac{\gamma\chi^2}{4}$, ἡ αὐτοῦ χωρητικότης = α3 = $\frac{\gamma\chi^2\psi}{4}$,

ἡ δὲ κοίλη ἐπιφάνεια = γχψ· ἐπεὶ δὲ α3 = $\frac{\gamma\chi^2\psi}{4}$,

ἢ ψ = $\frac{4\alpha^3}{\gamma\chi^2}$, ἔσαι γχψ = $\frac{4\alpha^3}{\chi}$· ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως ἔστιν = $\frac{\gamma\chi^2}{4}$· ἄρα ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια ἔστιν = $\frac{4\alpha^3}{\chi} + \frac{\gamma\chi^3}{4}$, ὅπερ δεῖ εἶναι ἐλάχιστον· εὑρεθήσεται ἄρα $\frac{-4\alpha^3\delta\chi}{\chi^2} + \frac{\gamma\chi\delta\chi}{2} = 0$, εἶτ' ὧν $-4\alpha3 + \frac{\gamma\chi^3}{2} = 0$,

$\gamma\chi^3 = 8\alpha^3$, $\chi^3 = \frac{8\alpha^3}{\gamma}$, $\chi = \frac{2\alpha}{\sqrt[3]{\gamma}}$, καὶ $\psi = \frac{4\alpha^3}{\gamma\chi^2} =$

$= \frac{\alpha\sqrt[3]{\gamma^2}}{\gamma} = \frac{\alpha\sqrt[3]{\gamma^3}}{\sqrt[3]{\gamma}\sqrt[3]{\gamma}} = \frac{\alpha}{\sqrt[3]{\gamma}}$· ἄρα τὸ ἐσωτερικὸν ὕψος τοῦ ἄγγους δεῖ εἶναι ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς ἐσωτερι-

κῆς βάσεως· δεῖ δὲ εἶναι τὴν κοίλην ἐπιφάνειαν $= \frac{4\alpha^3}{\chi} + \frac{\gamma\chi^2}{4} = 2\alpha\alpha \times \sqrt[3]{\gamma} + \alpha^2\sqrt[3]{\gamma} = 3\alpha^2\sqrt[3]{\gamma}$.

118. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑ΄. Ἐν τριγώνῳ εὑρεῖν σημεῖον τὸ ο, ἀφ' ἑ τῶν πρὸς τὰς τρεῖς γωνίας ἀχθεισῶν εὐθειῶν τὸ ἄθροισμα εἴη ἐλάχιστον (κ. 19).

ΛΥΣΙΣ. Κέτρῳ τῷ βγεγράφθω κύκλου τόξον διήκον διὰ τοῦ ζητουμένου σημείου ο· ὑποτεθείσθω δὲ ἡ τοῦδε τοῦ τόξου ἀκτὶς ἄτρεπτος κὴ $= \vartheta$, κὴ αο $= \upsilon$, κὴ ογ $= \chi$· ἐκῶν ἔσαι $\vartheta + \upsilon + \chi$ τὸ ζητούμενον ἐλάχιστον· ἄρα δυ $+ \delta\chi = 0$, δυ $= -\delta\chi$· ἄρα τὸ ἀπειροστὸν τόξον οι, ὅπερ ἐκλεπτέον ὡς εὐθεῖαν, ἐμφαίνει τὸ ἀπειροστὸν τοῦ τόξου ζο, τὰ μέρη ομ, ον τῶν γραμμῶν αο, γο τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπὸ τοῦ ο, κὴ αἱ ταῖς γο, αο πρὸς ὀρθὰς ἐφισάμεναι εὐθεῖαι ιμ, ιν σημαινοῦσι τὰ ἀπειροστὰ τούτων τῶν γραμμῶν, αἵτινες ἑπομένως εἰσὶν ἴσαι, κὴ ἡ γωνία ὑπὸ νοι $=$ μοι (*)· προσεθεῖσαι δὲ αὗται αἱ γωνίαι ταῖς ὀρθαῖς ιοβ, βορ (ἰσέον δὲ, ὅτι αἱ γωνίαι ιον, τορ, ὡς κατὰ κορυφὴν ἀντικείμεναι, εἰσὶν ἴσαι, κὴ ἀντὶ ιον λαβεῖν ἔξεσι τὴν ὑπο τορ) ποιήσουσιν ἴσας τὰς γωνίας βογ, βοα· ἐπινοήσασι δὲ κύκλου τόξον γεγραμμένον ἐπὶ τοῦ σημείου α, δειχθείσεται, ὅτι κὴ αἱ ὑπὸ αοβ, αογ γωνίαι εἰσὶν ἴσαι· ἄρα αἱ πρὸς τῷ ο ὑπὸ τῶν πρὸς τὰς τρεῖς γωνίας τοῦ τριγώνου ἀχθεισῶν εὐθειῶν συναθησόμεναι γωνίαι εἰσὶν ἴσαι· καὶ ἐπεὶ συνάμα δύνανται 360°, ἑκάστη αὐτῶν δύναται 120°.

(*) Ἐὰν ἀπὸ τοῦ τῆς ὑποτεινούσης οι τετραγώνου ἀφαιρεθῶσι τὰ ἀπὸ ον, ομ τετράγωνα, αἱ ῥίζαι τῶν καταλοίπων ἴσων παρέξουσιν ἴσας πλευρὰς τὰς ιν, ιμ· ἄρα τὰ τρίγωνα ομι, οὐι ἔχουσι πάσας τὰς ἑαυτῶν πλευρὰς ἴσας, κὴ δὴ κὴ τὰς γωνίας.

119. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οὐκ ἀεὶ μέντοι δυνατόν ἐςὶ τὸ πρόβλημα· εἰ γὰρ εἴη τὸ αβγ τρίγωνον ἰσοσκελὲς, ὡς τὴν ὑπὸ αγβ γωνίαν ὑπάρχειν = 140°, τὸ σημεῖον ο ἐκτὸς πεσεῖται τῦ τριγώνυ αγβ· ἐν ἄρα τῷ προτεθέντι τριγώνῳ ὐδὲν ἔσαι σημεῖον ο, ἀφ' ἕ ἂν ἀχθεῖεν εὐθεῖαι αἱ ογ, οβ, οα, ὡς ἑκάσην τῶν ὑπ' αὐτῶν συνισαμένων γωνιῶν δύνασθαι 120°.

120. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΒ'. Τῶν κύκλῳ ἐγγεγραμμένων ἀπειραρίθμων τριγώνων εὑρεῖν τὸ μέγισον. (χ. 20).

ΛΥΣΙΣ. Ε'ὰν ἐπινοηθῶσι πολλὰ τρίγωνα γεγραμμένα ἐπὶ τῆς αὐτῆς χορδῆς ΑΔ, εὐπετῶς προσδιορίζεται τὸ μέγισον· τμηθείσης γὰρ δίχα τῆς ΑΔ κατὰ τὸ μ, ϗ διὰ τῦ κέντρυ Κ ἀχθείσης τῆς εὐθείας Κμ, ἥτις συμβάλλει τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Β, τὸ ΒΑΔ τρίγωνον ἔσαι τὸ μέγισον τῶν συναθῆναι δυναμένων ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΔ· ϗ γὰρ βάσεως τῆς αὐτῆς ὄσης, τὰ τρίγωνα ἔσονται ὡς τὰ ὕψη, ἢ ὡς αἱ τῇ βάσει κάθετοι· ἀλλὰ Βμ προδήλως ἐςὶν ἡ μεγίςη κάθετος τῶν, ὧν ἄντις ἀγάγοι ἀπὸ παντὸς σημείυ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΔ· ἄρα τὸ ζητηθὲν τρίγωνον δεῖ εἶναι ἰσοσκελές· ἔςω ἡ τῦ κύκλυ ἀκτὶς = α, ϗ ἡ ἀποτετμημένη Κμ = χ· ἄρα, διὰ τὴν ἰδιότητα τῦ κύκλυ, μΔ = $\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$· τὸ δὲ τρίγωνον ΒΑΔ ἔσαι = $(\alpha + \chi) \cdot \sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, ὅπερ ὑποτεθείσθω = υ· ἄρα $\upsilon^2 = (\alpha + \chi)^2 \times (\alpha\alpha - \chi\chi)$, ϗ $2\upsilon\delta\upsilon = 0 = 2\delta\chi \times (\alpha + \chi) \times (\alpha\alpha - \chi\chi) - 2\chi\delta\chi \cdot (\alpha + \chi)^2 = 0$· ἄρα $2 \cdot (\alpha + \chi) \cdot (\alpha\alpha - \chi\chi) = 2\chi(\alpha + \chi)^2$, $(\alpha\alpha - \chi\chi) = \chi \times (\alpha + \chi)$, ϗ διαιρέσει διὰ $\alpha + \chi$, $\alpha - \chi = \chi$, $\alpha = 2\chi$, $\chi = \frac{\alpha}{2}$· τμηθείσης ἄρα δί-

χα τῆς ΚΖ κατὰ τὸ μ, ϗ ἀχθείσης τῆς χορδῆς ΑμΔ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΚΖ, τὸ τρίγωνον ΑΔΒ ἔσαι τὸ μέγισον· ἔσι δὲ τῦτο ἰσόπλευρον, ϗ ἑκάση αὐτῦ πλευρὰ $= \alpha\sqrt{3}$, ὅπερ εὐπετῶς εὑρίσκεται, ἀντικαθισαμένης τῆς τῦ χ δυνάμεως ἐν τῇ τῆς μΔ, ϗ διπλασιαζομένης· ϗ γὰρ μΔ $=$ $\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} = \sqrt{\frac{3\alpha\alpha}{4}} = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{3}$, ὃ τὸ διπλῦν $= \alpha\sqrt{3}$· ὡσαύτως ἐὰν ἀντικαταςαθῶσιν αἱ δυνάμεις τῆς Βμ, ϗ μΔ ἐν τῇ ΔΒ $= \sqrt{(\mu\Delta)^2 + (\mathrm{B}\mu)^2}$, εὑρεθήσεται ΔΒ $=$ ΑΒ $= \alpha\sqrt{3}$· δυνατὸν δὲ ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΔ συςήσαθαι ἕτερον τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΖΔ, ὅπερ ἐκτὸς κεῖται τὸ τῦ κύκλυ κέντρον· ἀλλ' ἐπεὶ τῆς Κμ αὐξομένης, ἢ μειυμένης, αὔξει ἢ μειῦται ϗ τὸ τρίγωνον, ὁκ ἔσιν ὅτε μέγισον, ὅτ' ἐλάχισον.

121. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΓ'. Κύκλῳ περιγράψαι τὸ ἐλάχισον τῶν περιγραφῆναι δυναμένων τριγώνων (χ. 21).

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω τὸ ζητηθὲν τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΘΖ· φημὶ δὴ ὡς εἰ διὰ τῆς κατὰ τὴν Α γωνίαν κορυφῆς ϗ τῦ κυκλικῦ κέντρυ Κ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΚν, ἡ πλευρὰ ΘΖ κάθετος ἐπιςήσεται ταύτῃ τῇ εὐθείᾳ, ϗ συμβαλεῖ αὐτῇ κατὰ τὸ ν, ὡς εἶναι ἰσοσκελὲς τὸ τρίγωνον ΑΘΖ· ἐὰν γὰρ ἀχθῇ ἑτέρα ἁπτομένη ἡ σΛη, τὸ τρίγωνον Αησ μεῖζον ἔσαι τῦ ΑΘΖ· εἰς δέγε τὴν τύτυ δεῖξιν, ἤχθω ἡ ζμ εὐθεῖα παράλληλος τῇ σΘ· ϗ τῶν τριγώνων σιΘ, ζμι ὁμοίων ὄντων, ἔσι ζι : Θι :: ζμ : Θσ· ἀλλὰ ζι $>$ Θι· ἄρα ζμ $>$ Θσ· ἔσι δὲ ϗ ζι : ιΘ :: ιμ : σι· ἄρα μι $>$ ισ· ἄρα πολλῷ μᾶλλον ιη $>$ ισ· ἄρα ϗ ζμ × ηι $>$ Θσ × σι· ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ιζη ἔσιν ὡς τὸ γινόμενον ιη × ζμ· τὸ δὲ γινόμενον Θσ × σι ὡς τὸ τρί-

γωνον ϑσι (*)· ἄρα τὸ τριγωνον ιζη > ισϑ· κοινῇ δὲ προσεϑέντος τῷ τετραπλεύρῳ Ασιζ, ἔσαι Αση > Αϑζ· ἄρα τὸ Αϑζ ἔσι τὸ ἐλάχισον τρίγωνον· ἵνα δε διορισϑῇ τὸ σημεῖον Α, ἀφ' ἧ ἀχθεῖσαι αἱ ἁπτόμεναι Αϑ, Αζ μετὰ τῆς ἁπτομένης ϑζ περιέχοιεν ἂν τὸ ζητέμενον ἐλάχισον τρίγωνον, διὰ τῦ σημείυ ν ϗ τῦ κέντρυ Κ ἤχθω ἡ εὐθεῖα νΚΑ, ϗ ὑποτεθείωϑω ΚΑ = χ, ϗ ἡ ἀκτὶς Κβ = α· ἐκῶν ἔσαι Αν = χ + α, πΑ = χ — α, Αβ = √(χχ — αα)· ἀλλὰ Αβ : κβ :: Αν : ϑν (διὰ τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ΑβΚ, Αϑν), ἢ √(χχ — αα) : α :: χ + α : ϑν = $\frac{\alpha(\chi+\alpha)}{\sqrt{(\chi\chi-\alpha\alpha)}}$· πολλαπλασιαϑείσης δὲ ταύτης τῆς ποσότητος ἐπὶ χ + α, εὑρίσκεται τὸ ζητέμενον τρίγωνον = α . $\frac{(\chi+\alpha)^2}{\sqrt{(\chi\chi+\alpha\alpha)}}$ = υ, $\upsilon^2 = \frac{\alpha\alpha.(\chi+\alpha)^4}{\chi\chi-\alpha\alpha}$ = $\frac{\alpha\alpha(\chi+\alpha)^3}{\chi-\alpha}$, 2υδυ = 0 =

$$\frac{3\,\alpha\alpha\delta\chi.(\chi+\alpha)^2.(\chi-\alpha)-\alpha\alpha\delta\chi.(\chi+\alpha)^3}{(\chi-\alpha)^2},$$

εἶτ' ἔν 3.

$(\chi+\alpha)^2.(\chi-\alpha) = (\chi+\alpha)^3$, $3.(\chi-\alpha) = \chi+\alpha$, $3\chi-\chi = \alpha+3\alpha$, $2\chi = 4\alpha$, $\chi = 2\alpha$· διὸ δὴ λημφθείσης τῆς ΚΑ ἴσης τῇ διαμέτρῳ, ϗ ἀπὸ τῦ σημείυ Α ἀχθεισῶν τῶν ἁπτομένων, μέχρις ἂν συμβάλωσι τῇ ἁπτομένῃ ϑνζ, ποριϑήσεται τὸ ζητέμενον τρίγωνον· ὅπερ ἰσόπλευρόν ἐσι, ϗ ἑκάση τῶν αὐτῦ πλευρῶν = $2\alpha\sqrt{3}$·

(*) Ε'ὰν γὰρ ἐκ τῶν γωνιῶν ϑ, ζ ἀχϑῶσι κάϑετοι ταῖς αὐτὰς ὑποτεινέσαις πλευραῖς, αὗται, ὕψη ὄσαι τῶν τριγώνων, ἔσονται ὡς αἱ ὁμόλογοι πλευραί (Γεωμ. 324).

ἡ γὰρ ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΑβΚ, ΑνΘ πρόεισιν Αβ : ΑΚ :: Αν : ΑΘ, ἤ, τετραγωνιζομένων ἡ εἰσαγομένων τῶν ἀναλυτικῶν δυνάμεων, ααα (εἴγε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑβΚ ἔστιν $Αβ^2 = ΑΚ^2 - βΚ^2 = 4αα - αα = 3αα$) : 4αα :: 9αα : $ΑΘ^2 = 12αα = 4αα \times 3$· ἄρα $ΑΘ = Αζ = 2α\sqrt{3}$· ἀλλὰ $νΘ^2 = ΑΘ^2 - Αν^2 = 12αα - 9αα = 3αα$· ἄρα $νΘ = α\sqrt{3}$, καὶ $Θζ = 2α\sqrt{3}$.

122. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῷ ΚΒ΄ προβλήματι εὕρηται ἡ τοῦ μεγίστου τῶν κύκλῳ ἐγγραφῆναι δυναμένων τριγώνων πλευρὰ ἴσα $= α\sqrt{3}$, τοῦ α ἀκτῖνος τοῦ κύκλου ὄντος· ἔστιν ἄρα αὕτη ἡ πλευρὰ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐλαχίστου τῶν κύκλῳ περιγραφῆναι δυναμένων τριγώνων· εἰσὶν ἄρα ταῦτα τὰ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ὡς 1 : 4· εὐπετῶς δ' ἐνίοτε τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα ἀνιχνεύονται δίχα τῆς τοῦ τῶν ἀπείρων λογισμοῦ βοηθείας.

123. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΔ΄. Δύω εὐθειῶν δοθεισῶν τῶν ΑΜ, ΑΒ, εὑρεῖν τὸ μέγιστον ἐμβαδὸν, ὧν ἂν αἷται περικλείσειαν μετὰ τῆς ἀδιορίστου εὐθείας ΜΒ (κ. 22).

ΛΥΣΙΣ. Δῆλον, ὅτι τὸ τρίγωνον ΜΑΒ ἔσαι μέγιστον, ὅταν ἡ Α γωνία ᾖ ὀρθή· τηνικαῦτα γὰρ μεῖζον ἔξει ὕψος παντὸς ἄλλου τριγώνου αβμ, ὅπερ ἂν ἔχοι τὰς πλευρὰς αμ, αβ ἴσας ταῖς ΑΜ καὶ ΑΒ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἀμβλεῖαν δὲ τὴν ὑπὸ μαβ γωνίαν.

124. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΕ΄. Τεσσάρων εὐθειῶν δοθεισῶν, καὶ μιᾶς ἀδιορίστου, εὑρεῖν τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀπολαμβανομένων (κ. 23).

ΛΥΣΙΣ. Φημὶ δὴ ταύτας τὰς δεδομένας εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΠ, ΠΔ ἐνηρμοσμένας εἶναι ἡμικυκλίῳ, οὗ διάμετρον εἶναι τὴν ἀδιόριστον ΑΔ· δέδεικται γὰρ ἀνω-

τέρω τὴν μεγίσην τῶν περιεχομένων ὑπὸ δύω δοθεισῶν εὐθειῶν ϗ μιᾶς ἀδιορίσϑ ἐπιφανειῶν ὑπάρχειν, ὅταν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι ποιῶσι γωνίαν ὀρθήν· ἐϗεν, εἴπερ αἱ γωνίαι ΑΒΔ, ΑΓΔ μὴ εἶεν ὀρθαὶ, δυνατὸν αὐξηθῆναι, ἢ μειωθῆναι, ταῦτα τὰ τρίγωνα, μηδὲν ὅλως, μήτ' αὐξηθέντος, μήτε μειωθέντος, τῦ καταλοίπϑ ϗήματος· εἰ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία μὴ εἴη ὀρθὴ, δυνατὸν αὐξηθῆναι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, γινομένης ὀρθῆς τῆς ὑπὸ ΑΓΔ γωνίας· ὃ δὴ εὐπετῶς τελεῖται, περισρεφομένϑ τῦ ΒΓΑ τριγώνϑ περὶ τὸ Γ σημεῖον, ἐπεὶ μήτε τὸ τρίγωνον τῦτο, μήτε ἡ ἐπιφάνεια ΓΠΔ, ἐϗ τύτϑ ἀπομειωθήσονται.

125. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Τὸ αὐτὸ δὲ ὡσαύτως δειχθήσεται, ὅσαι πότ' ἂν ὦσιν αἱ δεδομέναι εὐθεῖαι Αβ, βγ, γζ, ζϑ, ϑΒ (χ. 24)· ὥσε ἡ περιεχομενένη ὑπὸ πέντε δοθεισῶν εὐθειῶν ϗ μιᾶς ἔϗτης ἀδιορίσϑ ἐπιφάνεια μεγίση ἔσαι, ὅταν αἱ δοθεῖσαι ἐννηρμοσμέναι ὦσιν ἡμικυκλίῳ, ἧ διάμετρος ἡ ἀδιόριϛος· ἐντεῦθεν ἄρα τὸ χωρίον αβζϑ μέρος τῆς εἰρημένης ἐπιφανείας τὸ μέγιϛον ἔσαι, ὅταν αἱ περιέχϑσαι αὐτὴν εὐθεῖαι ὦσι χορδαὶ κυκλικαί· ἄλλως γὰρ ἡ ἐπιφάνεια Αβγζϑβ αὐξηθῆναι δύναται, εἴπερ ἓν τῶν αὐτῆς μερῶν αὐξηθείη, τῦ λοιπῦ ϗήματος τῦ αὐτῦ μένοντος.

126. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐντεῦθεν ἄρα τὸ μέγιϛον χωρίον, ὧν ἂν περικλείσειαν εὐθεῖαι δεδομέναι, ἔϛι ϗῆμα κύκλῳ ἐγγεγραμμένον· ὡς, εἴπερ αἱ εὐθεῖαι εἶεν ἄπειροι τὸν ἀριθμὸν, ϗ ἐλάχιϛαι τὸ μέγεθος, ἑκάϛη δύναται ἐκλιφθῆναι ὥϛπερ τόξον ἀπειροϛόν· τὸ δὲ πάντων ἄθροισμα ὡς κυκλικὴ περιφέρεια· διὸ δὴ ὁ κίκλος μέγιϛόν ἐϛι πάντων τῶν ἰϛοπεριμέτρων ϗημάτων, καθὰ ϗ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ εἴρηται.

Ἀλλ' εἴπωμεν ἤδη περὶ τῶν ἐν ταῖς εἰδικαῖς συνεκθέσεσι μεγίσων ϗ ἐλαχίσων· ὅταν εἰδικὴ συνέκθεσις μίαν μόνην τρεπτὴν χ περιέχῃ, δυνατὸν ὑποθέσθαι ταύτην ἴσην τῷ υ, ϗ λαβεῖν αὐτῆς τὰ ἀπειροσὰ, ὡς εἴπερ ζητοῖτο ἡ μεγίση ἢ ἐλαχίση ἐν καμπύλῃ τεταγμένη.

127. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Κς'. Εὑρεῖν, καθ' ἃς περιπτώσεις ἡ συνέκθεσις $\chi^4 - 8\chi^3 + 22\chi^2 - 24\chi + 12$ γίνεται μέγισον ἢ ἐλάχισον.

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω ἡ ποσότης αὕτη = υ· λημφθέντων ἓν αὐτῆς τῶν ἀπειροστῶν, ϗ ὑποτεθέντος δυ = 0, ἔσαι $4\chi^3 - 24\chi^2 + 44\chi - 24 = \delta\upsilon = 0$, $\chi^3 - 6\chi^2 + 11\chi - 6 = 0$, ἧς διαιρέται $\chi - 1$, $\chi - 2$, $\chi - 3$· ἄρα δυνάμεις τῆς χ εἰσὶ $\chi = 1$, $\chi = 2$, $\chi = 3$· ἐὰν ἓν ἀντὶ $\chi = 1$ ἀντικατασταθῇ $1 + \delta\chi$, ϗ εἶτα $1 - \delta\chi$, εὑρεθήσεται ἐν ἑκατέρᾳ περιπτώσει δύναμις τοῦ υ μείζων, ἢ ἀντικαθισαμένης τῆς 1· ἄρα ἡ πρώτη δύναμις τοῦ χ ἐμφαίνει ἐλάχισον· δυνατὸν δὲ ὡσαύτως εὑρεῖν, τὴν μὲν δευτέραν ἐμφαίνουσαν μέγισον, τὴν δὲ τρίτην ἐλάχισον.

128. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δυνατὸν ἰδεῖν ἐν τῷ δε τῷ ὑποδείγματι τὰ μέγιστα ϗ ἐλάχιστα διαλλήλως διαδεχόμενα· ἐν γένει δὲ, εἴπερ καμπύλη ἡ βμ (χ. 25) πολλὰ ἔχει μέγιστα ϗ ἐλάχιστα αβ, αν κτ, ὡς τὴν ἀποτετμημένην Αα συσοιχεῖν ἐλαχίστῳ τῷ αβ, δῆλον ὡς ἡ τεταγμένη απ ἐπὶ ἂν γένοιτο ελάχιστον, εἰ μὴ τὸ μέρος βνπ· τοῦ ἄξονος ἀποχωρήσειε ποσότητι μείζονι τῆς τεταγμένης αβ, ἥτις ἐστὶ τὸ πρῶτον ἐλάχιστον· δεῖ δὴ ὑπάρχειν μέγιστον μεταξὺ τῶν δύω ἐλαχίστων· ἄρα ἅπαν ἐλάχιστον απ ἐκ ἐπακολουθήσει ἐλαχίστῳ, ἀλλὰ μεγίστῳ· ἐὰν ἓν τῇ ἀποτετμημένῃ Αα = χ (χ. 26) συσοιχῇ μέγιστον τὸ αβ, τοῦ-

τῳ μὲν ἐπακολυθήσει ἐλάχισον· τῷ δὲ, μέγισον· ὥϛε τὰ μέγισα ϗ ἐλάχισα (ὁπηνίκα πολλὰ ἐφεξῆϛ εὑρίσκονται) ἀλληλοδιαδόχως θάτερον κείσονται μετὰ θάτερον· δυνατὸν δὲ ἐφαρμόσαι τὴν τῶν μεγίσων ϗ ἐλαχίσων μέθοδον, ϗ τῆς ἐκθέσεως, ἣ ὑποτίθεται = υ, ποσότητας ὑπερβατικὰς περιεχούσης.

129. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΖ'. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς, διαιρεθεὶς διὰ τοῦ αὐτοῦ λογαρίθμου, προβάλλει πηλίκον ἐλάχισον.

ΛΥΣΙΣ. Ἔϛω χ ὁ ζητέμενος ἀριθμός· ἐκεῖν $\frac{\chi}{\lambda\chi}$ ἔϛαι ἐλάχισον, ϗ $\frac{\lambda\chi}{\chi}$ μέγισον· ἐὰν ἓν ὑποτεθῇ $\frac{\lambda\chi}{\chi} =$ υ, εὑρεθήσεται $\frac{\delta\chi}{\chi\chi} - \frac{\delta\chi\,.\,\lambda\chi}{\chi\chi} = \delta\upsilon$, ϗ ὑποτιθεμένου τοῦ $\delta\upsilon = 0$, εὑρίσκεται $\frac{1}{\chi\chi} - \frac{\lambda\chi}{\chi\chi} = 0$, $1 = \lambda\chi$· ἐπεὶ δὲ ἐνταῦθα ὁ λόγος περὶ τῶν ὑπερβολικῶν λογαρίθμων, ἐὰν γένηται = ε ὁ ἀριθμὸς, ἕ ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος = 1, εὑρεθήσεται $\chi = \varepsilon$· ἄρα $\frac{\lambda\varepsilon}{\varepsilon}$ ἔϛαι μέγισον, ϗ $\frac{\varepsilon}{\lambda\,\varepsilon}$ ἐλάχισον.

130. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΗ'. Εὑρεῖν ἀριθμὸν τὸν χ, ὅπως $(\chi)^{\frac{1}{\chi}}$ ἢ μέγισον.

ΛΥΣΙΣ. Ἔϛω $(\chi)^{\frac{1}{\chi}} = \upsilon = \lambda^{\psi}$, ὑποτιθεμένου τοῦ $\frac{1}{\chi} = \psi$· ἄρα $\lambda\upsilon = \psi\lambda\chi$, $\frac{\delta\upsilon}{\upsilon} = \delta\psi\,.\,\lambda\,.\,\chi + \psi\,.\,\frac{\delta\chi}{\chi} =$

$\frac{-\delta\chi\lambda\chi}{\chi^2} + \frac{\delta\chi}{\chi\chi}$ (ἀντικαθισαμένου $\frac{-\delta\chi}{\chi\chi}$ ἀντὶ $\delta\psi$, εἴγε τὸ ἀπειροσὸν τοῦ $\frac{1}{\chi} = \frac{-\delta\chi}{\chi\chi}$)· ἐκῶν ὑποτιθεμένου $\delta u =$ ο, διαιρέσει διὰ $\delta\chi$, καὶ μεταθέσει, εὑρίσκεται $\frac{1}{\chi\chi} = \frac{\lambda\chi}{\chi\chi}$, $\lambda\chi = 1$, $\lambda\varepsilon = 1$, $\chi = \varepsilon$· ἄρα $(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$ ἔσι μέγισον· ἐὰν δ' ὑποτεθῇ $\chi = 1$, εὑρίσκεται $\chi^{\frac{1}{\chi}} = (1)^{\frac{1}{1}} = 1,000000$· ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi = 2$, εὑρίσκεται $\chi^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1,414213$ (*) ἐὰν $\chi = 3$, $3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3} = 1,442250$· ἐὰν $\chi = 4$, $4^{\frac{1}{4}} = 1,414213$· ὅθεν σαφὲς ὅτι $(\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ ἔσι μέγισον, ἀλλ' ἐκ ἐλάχισον· τοιγαροῦν ἐν καμπύλῃ, ἧς ἐξίσωσις $u = \chi^{\frac{1}{\chi}}$, τεταγμένη συσοιχοῦσα ἀποτετμημένῃ $\chi = \varepsilon$ ἔσαι μέγισον.

131. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΘ'. Τόξον τὸ χ εὑρεῖν, οὗ τὸ ἡμίτονον ἔσι μέγισον.

ΛΥΣΙΣ. Ἔσω $u =$ ἡμ. χ· ἐκῶν ἔσαι $\delta u = \delta\chi$ συνημ. χ, ὑποτιθεμένου δὲ τοῦ $\delta u = 0$, γίνεται συνημ. $\chi = 0$· ἀλλὰ τὸ συνημίτονον τῶν 90 μοιρῶν ἔσι μηδέν· ἄρα τὸ ζητέμενον τόξον ἔσι μοιρῶν 90· τὸ δ' αὐτοῦ ἡμίτονον ἴσεται τῇ ἀκτῖνι, ἣν ὑποτιθέμεθα $= 1$.

(*) Αἱ τρεῖς ἔχαται τοῦ χ δυνάμεις ἐκ εἰσὶν ἀκριβεῖς, ἀλλὰ τῶν ἀκριβῶν ἔγγισα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ ἐξειλιγμένων καὶ τῶν φιλεσῶν ἡμιδιαμέτρων.

132. Ε'ὰν νῆμα ἐφηρμοσμένον καμπύλῃ τῇ ΑΒΓ (χ. 27) κατὰ μικρὸν αὐτῆς ἀποχωρίζηται, ἡ ἐκ τοῦ κατὰ τὸ νῆμα πέρατος Α γραφησομένη καμπύλη ΑΖΝ ἐξειλιγμένη ἀκέει, ἡ δὲ ΑΒΓ ἐνειλιγμένη, τὰ δὲ μέρη ΒΕ, ΓΖ τοῦ ἐξειλισσομένου νήματος, ἀκτῖνες τῆς ἐξειλιγμένης, ἢ φιλοῦσαι ἡμιδιάμετροι.

133. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ε'ὰν τὸ νῆμα περατῶται πρὸς τῇ Α κορυφῇ τῆς ἐνειλιγμένης, ἕκασον μὲν μέρος ΒΕ τοῦ νήματος ἴσον ἔσαι τῷ ΑΒ τόξῳ τῆς ἐνειλιγμένης· ἀλλ' ἑκάστη ἀκτὶς ΖΓ μείζων ἔσαι τοῦ συσοιχοῦντος τόξου, ἐὰν ἡ τῆς ἐνειλιγμένης κορυφὴ ὑποτεθῇ κατὰ τὸ Β, ὡς εἶναι τὴν ΑΒ γραμμὴν εὐθεῖαν· ἐν γένει δὲ ἡ φιλοῦσα ἡμιδιάμετρος ἴση ἐσὶ τῷ τῆς ἐνειλιγμένης τόξῳ, προσιθεμένου, εἰ δέοι, ποσοῦ ἀτρέπτου.

134. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ε'κάστης φιλούσης ἡμιδιαμέτρου ἐκληφθῆναι δυναμένης ὡς προαγωγῆς τόξου ἀπειροσοῦ τοῦ ΒΓ, ὅπερ ἐκληφθῆναι δύναται ὡς γραμμὴ εὐθεῖα, δῆλον ά. ὅτι ἑκάστη ἀκτὶς τῆς ἐξειλιγμένης ἀπτομένη ἐσὶ τῆς ἐνειλιγμένης· β'. τὸ νῆμα ΒΕ, μεταβαῖνον ἐκ τοῦ ΕΒ ἐπὶ ΖΓ, γράφει τόξον μικρὸν τὸ ΕΖ, ὅπερ δυνατὸν ἐκληφθῆναι ὡς τόξον κύκλου, οὗ τὸ κέντρον ἔσιν ἐν τῷ Γ, ὡς τὴν ἀκτῖνα ΓΖ κάθετον ἐφίσασθαι τῇ κατὰ τὸ Ζ τῆς ἐξειλιγμένης ἀπτομένῃ ΖΤ· ἡ γὰρ ἀκτὶς τοῦ κύκλου κάθ-

ετος ἐφίςαται τῇ τῦ κύκλυ κατὰ τὸ πέρας τῆς ἀκτῖνος ἁπτομένη (Γεωμ. 151)· ἐὰν ἄρα ἐκ τῶν περάτων τόξυ ἀπειρο,ῦ καμπύλης ἀχθῶσι δύω κάθετοι ΕΓ, ΖΓ, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ὅπερ ἔςαι σημεῖον τῆς ἐνειλιγμένης τῆς δοθείσης καμπύλης· τὸ δὲ τόξον ΕΖ ἐκληφθῆναι δύναται ὡς κυκλικὸν, γεγραμμένον διὰ κέντρυ τῦ Γ· ἀλλ' ἐπείπερ οἱ κύκλοι τοσύτῳ ἔλαττον εἰσὶ καμπύλοι, ὅσῳ μείζυς εἰσὶν αὐτῶν αἱ ἀκτῖνες, δῆλον ὅτι ἡ ἐξειλιγμένη τοσύτῳ ἔλαττον ἔςαι καμπύλη, ὅσῳ μᾶλλον ἀποςήσεται τῦ σημείυ Α, ὅπυ τελευτᾷ ἡ ἀκτὶς τῆς ἐξειλιγμένης, ἥτις ἐςὶν = ο, ἢ ἐλαχίςη· ἄρα ἡ μεγίςη καμπυλότης εὑρεθήσεται, ζητυμένης τῆς ἐλαχίςης ἀκτῖνος, ἡ δ' ἐλαχίςη, τῆς μεγίςης· τυτὶ δὲ γίνεται διὰ τῆς μεθόδυ τῶν μεγίςων ϗ ἐλαχίςων.

135. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ε'ἀν κέντρῳ μὲν τῷ Π, διαςήματι δὲ τῷ ΖΠ, μείζονι τῦ ΒΓ, γραφῇ κύκλυ τόξον, διαβήσεται ὕπερθεν τῦ ΕΖ τόξυ· τὐναντίον δὲ, ἔνερθεν διήξει, εἰ γραφείη διαςήματι τῷ ΠΖ, ἐλάττονι τῦ ΖΓ· ἄρα ὁ, κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαςήματι δὲ τῷ ΖΓ, γραφεὶς κύκλος ἀνριβέςερον συμπεσεῖται τῷ ἀπειροςῷ τόξῳ ΕΖ· καλεῖται δὲ, ὁ μὲν κύκλος ἕτος κύκλος φιλῶν, ἡ δ' αὐτῦ ἀκτὶς φιλῦσα ἡμιδιάμετρος, ἢ ἀκτὶς φιλῦσα, ἀκτὶς τῆς ἐξειλιγμένης, ἀκτὶς τῦ συμπίπτοντος τόξυ, ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος· ἡ γὰρ καμπυλότης τῦ ἀπειροςῦ τόξυ ΕΖ τῆς ἐξειλιγμένης καμπύλης ἐςὶν ἡ αὐτὴ τῇ τῦ συναιχῦντος τόξυ τῦ φιλῦντος κύκλυ.

136. Τόξυ (χ. 28) καμπύλης τῦ ΕΖ γωνία τῆς καμπυλότητος ἀκύει ἡ ΕΓΖ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ δύω εὐθειῶν καθέτων τῷ δε τῷ τόξῳ· αὕτη δὲ ἡ γωνία ἰσῦ-

ται τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ δύω ἁπτομένων, αἳ ἄγονται ἀπὸ τῶν περάτων αὐτοῦ τοῦ τόξου· αἱ γὰρ γωνίαι τῇ τεταπλεύρῳ ΜΕΓΖ δύνανται τέσσαρας γωνίας ὀρθάς· ἀλλ᾽ αἱ γωνίαι ΓΕΜ, ΓΖΜ εἰσὶν ὀρθαὶ, ἄρα ΖΜ Ε + ΖΓΕ δύνανται δύω γωνίας ὀρθάς· ἀλλὰ καὶ ΖΕΜ + ΖΜΝ δύνανται δύω γωνίας ὀρθάς· ἄρα ΕΓΖ = ΖΜΝ· ἐπιλαμβανομένῳ δὲ τοῦ ἀπειροστοῦ τόξου ΕΖ ὡς κυκλικοῦ, καὶ ἐπιζευγνυμένης τῆς χορδῆς ΕΖ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΝΜΖ τῷ τριγώνου ΕΜΖ δύναται τὰς δύω ἐντὸς γωνίας Ε, Ζ· ἀλλ᾽ αὗται εἰσὶν ἴσαι, εἴγε, περιεχόμεναι ὑπὸ χορδῆς ἧ ἁπτομένης, μετρῶνται ἑκατέρα τῷ ἡμίσει τῷ τόξῳ ΕΖ· ἄρα ἑκατέρα τῶν δε τῶν γωνιῶν ἡμίσειά ἐσι τῆς κατὰ τὴν καμπυλότητα γωνίας· ἐὰν μέντοι ὑποτεθῇ τὸ τόξον εζ = ΕΖ, ἡ δὲ ἀκτὶς εγ ἡμίσεια τῆς ἀκτῖνος ΕΓ, δῆλον ὡς ἡ γωνία εγζ διπλασία ἔσαι τῆς γωνίας ΕΓΖ, ἡ δὲ γωνία νμζ διπλασία τῆς ΝΜΖ· ὥσε ἐν γένει αἱ γωνίαι τῆς καμπυλότητος ἐν λόγῳ εἰσὶν ἀντιστρόφῳ τῶν φιλτσῶν ἀκτίνων· ἄρα ἧ αἱ τῶν κύκλων καμπυλότητες εἰσὶν ἐν λόγῳ ἀντιπεπονθότι τῶν κατ᾽ αὐτὲς ἀκτίνων.

137. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ ἄρα ΕΜΖ τρίγωνον ἰσοσκελές ἐσιν· ἡ δὲ τῆς καμπυλότητος γωνία ΝΜΖ, μετρυμένη ὑπὸ τῷ ἐξ ὑποθέσεως ἀπειροστῷ τόξῳ ΕΖ, ἔσι ἧ αὐτὴ ἀπειροστή.

138. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ε᾽κ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι τόξον καμπύλης τὸ ΕΖ ὡς κυκλικὸν ἐκληφθῆναι ἐ δύναται· ἢ, ὃ ταὐτὸν, ἐ δύναται ἔχειν καμπυλότητα κυκλικὴν, ἢ κύκλον φιλτντα, εἰμὴ αἱ γωνίαι Ε, Ζ ἑκατέρα εἶεν ἡμίσεια τῆς ὑπὸ ΝΜΖ γωνίας, τῆς ἐκτὸς ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχομένης, ἢ, ὃ ταὐτὸν, εἰμὴ αἱ

γωνίαι Ε, Ζ, αἱ ὑπὸ χορδῆς ϗ ἐφαπτομένης περιεχόμεναι, εἶεν ἰσάλληλοι.

139. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ε'ϗ τέτων καταφανὲς, ὡς ἔσι τόξα καμπύλων, μηδεμίαν ἔχοντα κυκλικὴν καμπυλότητα· ἔσω γὰρ ζε (χ. 29) τόξον ἀπειροσὸν παραβολῆς ἄλλης παρὰ τὴν κωνικὴν· ταύτης δὲ κορυφὴ ἔσω τὸ ζ σημεῖον, ϗ τετάχθω ἡ επ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἄξονι πν· ϗ ἤχθων ἥτε ἁπτομένη εν ϗ ἡ ζμ (ἣ ἐκληφθῆναι ἔχει ὡς τεταγμένη, προσκεβλημένη ἐϗ τῦ τῆς καμπύλης σημείϑ ζ)· τῆς ἦν κατὰ τὴν καμπυλότητα γωνίας ζμν ἀπειροσῆς ὔσης (136), ὑπαρχέσης ὀρθῆς τῆς ὑπὸ μζν = επν, ἡ ὑπὸ μνζ διαφέρει γωνίας ὀρθῆς ποσότητι ἀπειροσῇ· ἐκληφθῆναι ἄρα ἔχει ὡς ἴση τῇ ὑπὸ νζμ· τὸ δὲ τρίγωνον μζν ἐκληπτέον ἐσὶν ὡς ἰσοσκελὲς, ϗ δὴ ἐκληπτέον μν = ζμ· ἄρα ζμ : με :: μν : με· ἀλλ' ἐπείπερ ὅμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα νμζ, νεπ· ἄρα μν = ζμ : εμ :: νζ : ζπ· ἀλλ' ἐν ἐδεμιᾷ παραβολῇ (παρὲξ τῆς κωνικῆς) ἔσι νζ = ζπ· ἄρα ϑδὲν ἧττον ϑϗ ἔσιν ὅτε εμ = ζμ· ἄρα τὸ τρίγωνον εμζ ϑϗ ἔσιν ἰσοσκελές· ἄρα αἱ γωνίαι μεζ, μζε ϑϗ εἰσὶν ἴσαι· ἄρα ἡ καμπυλότης τῦ εζ τόξϑ ϑϗ ἔσι κυκλική· ϑδ' ἔσι κύκλος ϑ πεπερασμένος, ϑϗ ἄπειρος, ϑϗ ἀπείρως ἐλάχιστος, ὃς ἂν ἔχοι καμπυλότητα ἴσην τῇ καμπυλότητι τοιῦδε τόξϑ· φημὶ δὲ, ὡς ἐν ϑδεμιᾷ παραβολῇ, πλὴν τῆς κωνικῆς, ἔσι ζν = ζπ· δεήσει γὰρ εἶναι τὴν ὑφαπτομένην πν = 2ζπ· ἀλλ' ἡ ὑφαπτομένη τῶν παραβολῶν ἔσι

$$(57) = \frac{(\mu+\nu)\chi}{\nu}$$

· ἄρα ἡ ὑφαπτομένη ἔσι πρὸς τὴν

ἀποτετμημένην $\zeta\pi = \chi$, ὡς $\frac{(\mu+\nu)\chi}{\nu} : \chi :: (\mu+\nu)$

χ : νχ :: μ + ν : ν· ἀλλ' ἐν μόνῃ τῇ συνήθει παραβολῇ ἔσι μ = ν = 1· ἄρα ἐν μόνῃ τῇ κοινῇ παραβολῇ ἔσι νπ : ζπ :: 2 : 1· ἄρα κτλ.

140. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Α'λλ' ἔμπης κοινῇ πάντες οἱ Γεωμετρῆντες ἀποφαίνονται, ὡς ἅπαντι καμπύλης τόξῳ ἔσι καμπύλη κυκλική· ἀπόχρη μέντοι ἐκ τῶν εἰρημένων συναγαγεῖν, ὅ,τι βάλονται σημαίνειν, τῦτο λέγοντες· Ζητητέον ἦν ἤδη τὰς ἐκθέσεις γραμμῶν τινων, ἐξυπηρετησῶν πρὸς εὕρεσιν τῶν τύπων τῆς φιλέσης ἀκτῖνος· ἰσέον μέντοι μὴ ζητεῖσθαι ἐνταῦθα καμπυλότητας ἐν ἰδιαιτέροις τισὶ τῶν καμπύλων σημείοις.

141. Ἔσω καμπύλη ἡ ΑΒΔ (χ. 30), ἐν ᾗ ΑΠ ἔσιν ἡ γραμμὴ τῶν ἀποτετμημένων· καὶ εἰλήφθων δύω τόξα ἐλάχισα τὰ ΒΓ, ΓΔ ποσότητι ἐλαχίσῃ πρὸς αὐτὰ ἀλλήλων διαφέροντα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ χορδὴ ΒΓ προεκβληθεῖσα μέχρι τοῦ Μ· καὶ ἤχθωσαν αἵτε τεταγμέναι, καὶ αἱ ἄλλαι, ἃς τὸ χῆμα παρίσησι γραμμάς· καὶ ἔσω Πν = ΒΖ = δχ, ΓΣ = δχ + δδχ, καὶ ΒΓ = δσ, καὶ ΑΓ = σ, καὶ ΖΓ = δυ· τῶν δὴ τριγώνων ΒΖΓ, ΓΣΜ ὁμοίων ὄντων, διὰ τὰς παραλλήλυς ΒΖ, ΓΣ, ἔσι δχ : δυ ::

$$\delta\chi + \delta\delta\chi : \Sigma M = \frac{\delta\chi\delta u + \delta u\delta\delta\chi}{\delta\chi}\cdot$$

ἀλλὰ ΣΔ = δυ + δδυ (*)· ἄρα

$$\Delta M = \Sigma M - \Sigma\Delta = \frac{\delta u\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta u}{\delta\chi}.$$

(*) Ὅταν γὰρ δχ γένηται δχ + δδχ, δυ γίνεται δυ + δδυ· ἀλλ' ἐνταῦθα τῆς χ αὐξήσης ἀπομειῦται τὸ δυ, καὶ ἔσι λειπτικὸν τὸ δδυ, τῦτ' ἔσι ΣΔ = υ — δδυ, ἢ ΣΔ = δυ + δδυ· σημειωτέον μέντοι, ὅτι δδυ ἔσι λειπτικόν· ἐὰν δὲ

142. Ε'μφαινέτω ἡ ΔΛ τόξον κύκλυ, γεγραμμένυ διὰ κέντρυ τῦ Γ· τὸ ἓν τόξον τῦτο ἐκληφθῆναι δύναται ὡς γραμμὴ εὐθεῖα, κάθετος ἐφισαμένη τῇ ΓΜ· ϗ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ βιΔ διπλασία ἐςὶ τῆς ὑπὸ ιΓΔ, ἔςι βιΔ = ΜΓΔ· μετρεῖ ἄρα τῦτο τὸ τόξον τὴν τῆς καμπυλότητος γωνίαν ΓΞΔ = βιΔ· τὰ δὲ τρίγωνα ΜΛΔ, ΓΣΜ, ἔχοντα νοινὴν τὴν πρὸς τῷ Μ γωνίαν, ϗ τὰς Λ, Σ ὀρθὰς, εἰσὶν ὅμοια· ἄρα ΓΜ : ΓΣ = ΒΓ :: ΔΜ : ΔΛ, ἢ δσ : δχ :: $\frac{\delta u \delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta u}{\delta\chi} : \Delta\Lambda = \frac{\delta u \delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta u}{\delta\sigma}$· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ΔΛ = ξ, ϗ ἡ ἀκτὶς = ι, ϗ γένηται δσ : ι :: ξ : $\frac{\xi}{\delta\sigma} = \frac{\delta u \delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta u}{\delta\sigma^2}$, εὑρεθήσεται τὸ μέτρον γωνίας, ἣν ϗ αὐτὴν ποιῦμεν = ξ.

143. Ι'σέον δὲ, ὡς ἡ τῆς ζ γωνίας δύναμις λειπτικὴ ἔσαι, ἐὰν ἡ καμπύλη κοίλη ἦ πρὸς τὸν ἄξονα· τηνικαῦτα γὰρ ἡ ΔΛ ἐπὶ τὰ πρὸς τὸν ἄξονα κείσεται· τῶτων δ' ἓν τεθέντων, ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΓΞ, ΔΞ ὑποτεθῶσι φιλῦσαι ἀκτῖνες, ἡ Ξ γωνία ἔσαι = βιΔ = 2 . ιΓΔ = ΛΓΔ· ὑκῦν τὰ τρίγωνα ΛΓΔ, ΓΞΔ εἰσὶν ὅμοια ϗ ἰσοσκελῆ· ἄρα ΛΔ : ΓΔ :: ΓΔ : ΔΞ, ἢ $\frac{\delta u \delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta u}{\delta\sigma} : \delta\sigma$ :: δσ : $\Delta\Xi = \frac{\delta\sigma^3}{\delta u \delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta u}$, δύναμις τῆς φιλέσης ἀκτῖνος, ἥτις κληθήτω Α.

144. Ε'ὰν ἀπὸ τῦ σημείυ Ξ ἀχθῇ ἡ ΞΜ κάθετος τῇ ΓΝ, συσαθήσεται τίγωνον ὀρθογώνιον, ὗ τὴν ὀρθὴν

ἡ καμπύλη τὰ κοῖλα ἐχῃ ἐσραμμένα πρὸς τὸν ἄξονα ΑΡ, δυνάμεως ὑπαρκτικόν.

γωνίαν ὑποτενεῖ ἡ φιλοῦσα ἡμιδιάμετρος ΓΞ· ζητουμένων δὲ τῶν τοῦ δε τοῦ τριγώνου πλευρῶν (ἃς καλοῦμεν πλευρὰς τῆς φιλούσης ἡμιδιαμέτρου), ἐπεὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ γωνίαι ΝΓΣ, ΞΓβ, ἐὰν κοινῇ ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπὸ ΞΓΣ γωνία, εὑρεθήσεται ΝΓΞ = ΣΓβ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΓΣβ, ΣΝΞ ἔσονται ὅμοια· ὅθεν Γβ : ΓΣ :: ΓΞ : ΓΝ, καὶ Γβ : βΣ = ΣΔ (*) :: ΓΞ : ΝΞ· ἄρα $\delta\sigma : \delta\chi + \delta\delta\chi = \delta\chi ::$

$$\frac{\delta\sigma^3}{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon} : \Gamma N = \frac{\delta\chi\delta\sigma^2}{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon},$$

καὶ $\delta\sigma :$

$$\delta\upsilon :: \frac{\delta\sigma^3}{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon} : N\Xi = \frac{\delta\upsilon\delta\sigma^2}{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}.$$

145. Ἁπλέστεροι δὲ καθίστανται οἱ τύποι, ὑποτιθεμένων ὡς ἀτρέπτων ἑνίων ἀπειροστῶν· ἐὰν μὲν γὰρ ὑποτεθῇ ἄτρεπτον τὸ δ, ἔσαι $\delta\delta\chi = 0$, καὶ $A = \frac{-\delta\sigma 3}{\delta\chi\delta\delta\upsilon}$, καὶ

$\Gamma N = \frac{-\delta\sigma^2}{\delta\delta\upsilon}$, καὶ $N\Xi = \frac{-\delta\upsilon\delta\sigma^2}{\delta\chi\delta\delta\upsilon}$, ἐὰν δ' ὑποτεθῇ ἄτρεπτον τὸ δυ, ἔσαι $\delta\delta\upsilon = 0$, καὶ $A = \frac{\delta\sigma^3}{\delta\upsilon\delta\delta\chi}$, καὶ

$\Gamma N = \frac{\delta\chi\delta\sigma^2}{\delta\upsilon\delta\delta\chi}$, καὶ $N\Xi = \frac{\delta\sigma^3}{\delta\delta\chi}$· ἐὰν διὰ τῆς κατὰ τὴν

(*) Τῆς γὰρ γωνίας βΓΔ ἐλαχίστης οὔσης, ἡ ταύτην ὑποτείνουσα πλευρὰ βΔ ἀπειροστή ἐστιν ὡς πρὸς τὴν ΓΔ, ἥτις ἐστὶν ἀπειροστὴ πρωτοταγής, ὡς καὶ ἡ ΣΔ. ἄρα Δβ ἔστιν ἀπειροστὴ τῆς ΣΔ· ἄρα ΣΔ = Σβ· συμπέπτωκε δὲ καὶ τὸ ἐλάχιστον τόξον ΓΔ τῇ αὐτοῦ ἀπτομένῃ· δυνατὸν ἄρα ὑποτίθεναι Γβ = Γχ, εἴγε Γχ τῆς Γβ διαφέρει μόνῃ τῇ χβ ποσότητι ἀπειροστῇ τῆς Γβ, ἥτις ἐστὶν ἀπειροστὴ μείζων τῆς βδ· ἔρα βΔ, Δχ, χβ εἰσὶν ὁμοειδῆ.

καμπύλην ἐξισώσεως, ἀποβληθέντων τῶν ἀπειροστῶν, εὑρεθῇ ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς Α, ἢ ἡ πλευρὰ ΓΝ, ὑπαρκτική, ἡ καμπύλη ἔσαι κοίλη πρός τὸν ἄξονα· τὴν δὲ καμπυλότητα πρὸς τὸν ἄξονα στρέψει τῆς φιλούσης ἀκτῖνος, ἢ τῆς πλευρᾶς ΓΝ λειπτικῆς ὔσης· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ἄτρεπτον τὸ δσ, ἔσαι δδσ = ο· ἀλλὰ $\delta\sigma^2 = \delta\chi^2 + \delta\upsilon^2$· ἄρα $2\delta\sigma \cdot \delta\delta\sigma =$

$2\delta\chi \cdot \delta\delta\chi + 2\delta\upsilon \cdot \delta\delta\upsilon = 0$, καὶ $\delta\delta\upsilon = -\frac{\delta\chi \cdot \delta\delta\chi}{\delta\upsilon}$.

ταύτης δὲ τῆς τοῦ δδυ δυνάμεως ἀντικαταστάσης ἐν τῷ τύπῳ τῆς φιλούσης ἀκτῖνος, πορισθήσεται Α =

$$\frac{\delta\sigma^3 \cdot \delta\upsilon}{\delta\upsilon^2 \cdot \delta\delta\chi + \delta\chi^2 \cdot \delta\delta\chi} = \frac{\delta\sigma^3 \cdot \delta\upsilon}{\delta\sigma^2 \cdot \delta\delta\chi} = \frac{\delta\sigma\delta\upsilon}{\delta\delta\chi}$$

. οἱ μὲν ἓν προεκτεθέντες ἅπαντες τύποι εὔχρηστοί εἰσιν, ἐπὰν αἱ τεταγμέναι πρὸς ὀρθὰς ἐκκώσι ταῖς ἀποτετμημέναις.

146. Τῆς δὲ τῶν συντεταγμένων γωνίας ΒΤΑ μὴ ὀρθῆς ὔσης, ἔστω ταύτης τὸ μὲν ἡμίτονον = β, τὸ δὲ συνημίτονον = γ, καὶ ΑΤ = χ, καὶ ΤΒ = υ· ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΠΤ (ὑποτιθεμένης τῆς ἀκτῖνος = α) ἔστιν $\alpha : \beta :: \upsilon : \text{ΒΠ} = \frac{\beta\upsilon}{\alpha}$, καὶ $\alpha : \gamma :: \upsilon : \text{ΠΤ} = \frac{\gamma\upsilon}{\alpha}$.

ἄρα $\text{ΑΠ} = -\frac{\gamma\upsilon}{\alpha}$· διὸ δὴ τιθεμένων ἐν τοῖς εὑρεθεῖσι τύποις, ἀντὶ μὲν χ τοῦ $\chi - \frac{\gamma\upsilon}{\alpha}$, ἀντὶ δὲ υ τοῦ $\frac{\beta\upsilon}{\alpha}$ (*), πορισθήσονται αἱ ἀποδοθεῖσαι δυνάμεις περιεκτικαὶ τῶν ΑΤ, καὶ ΒΤ· τῶν ἓν ἀντικαταστάσεων γενομένων, πρόεισιν Α =

(*) Ἀντὶ δχ εἰσαχθήσεται τὸ ἀπειροστὸν τοῦ χ —

$\frac{\alpha\delta\sigma 3}{\alpha(\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon)}$, ϗ ΓΝ $= \frac{(\alpha\delta\chi - \gamma\delta\upsilon)\delta\sigma^2}{\alpha(\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon)}$, ϗ ΝΞ $= \frac{\delta\upsilon\delta\sigma^2}{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}$. παραλιπόντες ἓν τὰς ἄλλας μεθόδους, δι' ὧν εὑρεῖν ἔξεσι τὰς τῆς φιλύσης ἀντίνος τύπους, τὴν τῶν δευτέρων ἀπειροσῶν καθαρεύσαν ἐκθησόμεθα μόνην.

147. Ἔ"σω καμπύλη ΠΓ, γεγραμμένη διὰ τὸ ἄξονος αὐτῆς ΑΡ, τῶν τεταγμένων πρὸς ὀρθὰς ἐφισαμένων ταῖς ἀποτετμημέναις· ἤχθωσαν (κ. 31) ἓν πρὸς ὀρθὰς τῷ ἀπειροσῷ τόξῳ ΓΔ αἱ εὐθεῖαι ΓΞ, ΔΞ, καὶ τετάχθωσαν ἐπὶ τὸν ἄξονα αἱ ΓΛ, ΔΡ· τῆς δὲ ΓΖ λιφθείσης ἴσης ἀτρέπτῳ τῇ β, διὰ τὸ ζ ἐφάψω κάθετος τῇ ΓΞ ἡ ζμ, ϗ ἑπομένως παράλληλος τῷ τόξῳ ΓΔ, ὅπερ ἐνδέξαθαι δυνάμεθα ὡς γραμμὴν εὐθεῖαν· ἐντεῦθεν ἄρα ΔΟ = ΓΖ· διὰ δὲ τὸ σημεῖο ο ἤχθω ἡ οτ κάθετος τῇ ΔΞ, ἀπαντῶσα τῇ ΓΞ κατὰ τὸ ν· τέτων τεθέντων ἔξω ΑΛ = χ, ϗ ΛΓ = υ· ἄρα ΓΣ = δχ, ϗ ΔΣ = δυ, ϗ ὑποτεθέντος Γμ = π, ἔσαι νμ = δπ· τὰ δὲ τρίγωνα ΔΣΓ, ζμΓ, ἔχοντα, ὀρθὰς μὲν τὰς γωνιας Σ, μ, ἴσας δὲ τὰς ὑπὸ ΔΓΣ, ζΓμ (ἐὰν γὰρ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΣΓΔ, ΞΓΔ, κοινῇ ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπὸ ΣΓμ γωνία, καταλειφθήσονται ἴσαι αἱ εἰρημέναι γωνίαι) εἰσὶν ὅμοια· ἄρα ΔΣ : ΔΓ :: ζμ : ζΓ, ἢ ΔΣ × ζΓ = ΔΓ × ζμ·

$\frac{\gamma\upsilon}{\alpha}$· ἀντὶ δὲ δδχ, τὸ δεύτερον ἀπειροσὸν τῆς αὐτῆς ποσότητος· ἀντὶ δὲ δυ, δδυ, εἰσαχθήσονται $\frac{\beta\delta\upsilon}{\alpha}$, $\frac{\beta\delta\delta\upsilon}{\alpha}$;

καὶ ἐπεὶ ὅμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα ομν, Ξτν, καὶ Ξτν ὅμοιον τῷ ΞΓΔ, ἄρα ΔΓ : μν :: ΞΓ : ομ = ζμ (εἴγε τῶν τεταγμένων ΛΓ, ΔΡ, ἐξ ὑποθέσεως ἀπείρως προσεχῶν ἴσων, τὸ σημεῖον ὁ συμπίπτει τῷ ζ)· ἄρα ΔΓ × ζμ = ΞΓ × μν· ἄρα ΔΣ × ζΓ = ΞΓ × μν, εἴτ' ἴν ΔΣ : μν :: ΞΓ : ζΓ, ἢ δυ : δπ :: Α : β· ἄρα $A = \frac{\beta\delta\upsilon}{\delta\pi}$.

ἀλλὰ, τῶν τριγώνων ΓΣΔ, Γζμ ὁμοίων ὄντων, προκύπτει $\pi : \beta :: \delta\chi : \delta\sigma$, ἄρα $\pi = \frac{\beta\delta\chi}{\delta\sigma}$· διὰ τούτου τοῦ τύπου εὐμαρῶς προσδιορίζεται τὸ π καὶ δὴ καὶ τὸ δπ.

148. Ε'ὰν αἱ τεταγμέναι ἐξέρχωνται ἀπὸ σημείου μονίμου τοῦ Ζ (κ. 32), ἀχθεισῶν τῶν ἐν τῷ κήματι καθορωμένων τεταγμένων, ἡ ΒΓΛ χορδὴ προήχθω ἔστ' ἂν συναντήσειε τῷ ΔΛ τόξῳ, τῷ, κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ, γεγραμμένῳ, καὶ ἤχθωσαν, ἥτε ἀπτομένη Γβ (ἥτις ὡς ἴση ἐνλαμβάνεται τῷ ΓΔ τόξῳ), καὶ αἱ φιλοῦσαι ἀκτῖνες ΓΞ, ΔΞ· δῆλον δ', ὡς, ὑποτιθεμένου κυκλικοῦ τοῦ τόξου ΒΓΔ, ἡ ὑπὸ ΛΓΔ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ χορδῆς καὶ προαγωγῆς ἑτέρας χορδῆς, μετρηθήσεται τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν ταύταις ταῖς χορδαῖς ὑποτεινομένων τόξων (*)· καὶ ἐπεὶ δυνατὸν ὑποθέσθαι τὰ τόξα ταῦτα ὡς πο-

---

(*) Αἱ γὰρ γωνίαι (κ. 33) παβ, βαϑ δύνανται ὀρθὰς δύω (Γεωμ. 89), εἴτ' ἴν μετροῦνται ὑπὸ ἡμικυκλίου· ἀλλ' ἡ ὑπὸ βαϑ μετρεῖται τῷ ἡμίσει τοῦ τόξου βϑ (Γεωμ. 176). ἄρα ἡ βαϑ μετρεῖται τῷ ἡμίσει τοῦ καταλοίπου, εἴτ' ἴν $\tau\tilde{\omega}\ \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\alpha\vartheta}{2}$.

σότητι ἀπειροσῆ ἑαυτῶν, διαφέροντα ἀλλήλων, ἡ γωνία μετρηθήσεται τῷ τόξῳ ΓΔ = ΒΓ, ᾧ δὴ ἔσαι = ΓΞΔ, τῆς βΓΔ γωνίας, τῆς περιεχομένης ὑπὸ τὴς ἁπτομένης ΓΞΔ ἧ τῆς χορδῆς ΓΔ, ἥσης = $\frac{\text{ΓΞΔ}}{2}$.

149. Εἀν δὲ αἱ τεταγμέναι ἐξίωσιν ἀπὸ τοῦ τῆς καμπύλης σημείου Γ, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΛΓΔ γωνία ἴση ἐσὶ τῇ τῆς καμπυλότητος, ὑποτιθεμένου τοῦ τῆς γωνίας ΔΓΛ μέτρου (λαμβανομένου ἐν κύκλῳ, οὗ ἡ ἀκτὶς = 1) = δχ, ἔσαι 1 : δχ :: ΓΔ = δυ (ὑποτιθεμένου ἀδιορίσου τοῦ ΓΔ): ΔΛ = δυ. δχ. ἀλλ' οἱ τομεῖς ΓΞΔ, ΛΓΔ εἰσὶν ὅμοιοι· ἄρα ΞΔ = Α : ΓΔ = δυ :: ΓΔ = δυ : ΔΛ = δυ· δχ. ἄρα τηνικαῦτα πρὸς τῷ σημείῳ Γ ἔσιν Α = $\frac{\delta u}{\delta x}$, ἥτις ἐσὶν ἰδιαιτέρα περίπτωσις.

150. Ἐξίτωσαν ἤδη αἱ τεταγμέναι ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ, κειμένου ὡς ἄντις βέλοιτο ὡς πρὸς τὴν καμπύλην· κέντρῳ οὖν τῷ Ζ γεγράφθω τόξον τὸ Γμ = δχ, ᾧ ἤχθω ἡ ΖΜ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΞΓ· τὰ τοίνυν τρίγωνα ΖΓΜ, ΔΓμ, ἔχοντα, ὀρθὰς μὲν τὰς γωνίας Μ, μ, ἴσας δὲ τὰς ὑπὸ ΖΓΜ, ΓΔμ (*), εἰσὶν ὅμοια· ἄρα, ὑποτιθεμένης τῆς ΖΓ = υ, ἔσαι Δμ = δυ : ΔΓ :: ΖΜ : ΖΓ = υ· ἀχθείσης δὲ πρὸς ὀρθὰς τῆς Ζτ τῇ ΞΔ, τὰ τρίγωνα ΖΜω, Ξωτ εἰσὶν ὅμοια· ἄρα ᾧ τὸ ΞΔΓ, ὅμοιον ὂν τῷ ωτΞ (δυνατὸν γὰρ ἐκλαβεῖν τὴν τῇ ΞΔ κάθετον ω τ ὡς παράλληλον τῇ ΓΔ), ὅμοιον ἔσαι ᾧ τῷ ΖΜω· ᾧ ἐκ τέτου ΔΓ : Μω

(*) Ἐὰν γὰρ ἑκατέρᾳ τῶν δὲ τῶν γωνιῶν κοινῇ προσεθῇ ἡ ὑπὸ ΞΓμ, ἔσονται ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΖΓμ, ΞΓΔ γωνίαι.

$= \delta\pi$ (ὑποτιθεμένου τοῦ ΓΜ $= \pi$) :: ΓΞ $=$ Α : ΞΜ· ἐπεὶ ἄρχ οἱ μέσοι τῆς πρώτης ἀναλογίας ὅροι ταὐτίζονται τοῖς τῆς δευτέρας ἄκροις, ἔσαι $\delta\upsilon \times \upsilon = \delta\pi \times$ Α, ἢ Α $= \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\pi}$ ἀλλ' ἐκ τῶν τριγώνων ΓΔμ, ΖΜΓ πρόεισι ΖΓ:

ΓΜ :: ΓΔ : Γμ, ἢ $\upsilon : \pi :: \delta\sigma : \delta\chi$· ἄρα $\pi = \frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\sigma}$·

ἐὰν δὲ ἐν τῷ τύπῳ Α $= \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\pi}$ ἀντικαταξαθῇ ἡ τοῦ $\delta\pi$ δύναμις, λαμβανομένη ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\pi = \frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\sigma}$, εἶτ' ἐν $\delta\pi = \frac{\delta\upsilon\delta\chi\delta\sigma + \upsilon\delta\delta\chi\delta\sigma - \upsilon\delta\chi\delta\delta\sigma}{\delta\sigma^2}$, εὑρεθήσεται Α

$= \frac{\upsilon\delta\upsilon\delta\sigma^2}{\delta\sigma(\delta\upsilon\delta\chi + \upsilon\delta\delta\chi) - \upsilon\delta\chi\delta\delta\sigma}$, ᾗ ἐπεὶ $\delta\sigma^2 = \delta\chi^2 + \delta\upsilon^2$ (ᾗ γὰρ τὸ τρίγωνον ΓμΔ ἔσιν ἰσογώνιον, ἡ δ' ἔκθεσις τοῦ $\delta\sigma^2$ ἔσιν ἡ αὐτή, ὅταν αἱ τεταγμέναι ὦσι κάθετοι ταῖς ἀποτετμημέναις) ᾗ ἑπομένως $\delta\sigma = (\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)^{\frac{1}{2}}$, ὁ παρονομασὴς τῆς δυνάμεως τοῦ Α γενήσεται, ἀντικαθισαμένης τῆς τοῦ $\delta\delta\sigma$ δυνάμεως, ἥτις ἐσὶ $\frac{\delta\chi\delta\delta\chi + \delta\upsilon\delta\delta\upsilon}{\delta\sigma}$,

γενήσεται φημὶ $=$

$\frac{\delta\sigma^2(\delta\upsilon\delta\chi + \upsilon\delta\delta\chi) - \upsilon\delta\chi'.(\delta\chi\delta\delta\chi + \delta\upsilon\delta\delta\upsilon)}{\delta\sigma}$, ἢ,

διαπερανθέντων τῶν σεσημειωμένων πολλαπλασιασμῶν, ᾗ ἀναγωγῆς γενομένης,

$\frac{\delta\upsilon(\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2 + \upsilon\delta\iota\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon)}{\delta\sigma}$· διὰ ταύτης

ἄρα τῆς ποσότητος διαιρεμένης τῆς υδυδσ², ϗ ἀποβαλλομένης τῆς δυ, ἥτις κοινῇ ἐνυπάρχει τῷτε ἀριθμητῇ καὶ τῷ παρονομαςῇ τᾶ πηλίκυ, ποριζεται Α =

$$\frac{\upsilon\delta\sigma^3}{\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon} =$$

$$\frac{\upsilon\delta\sigma^3}{\delta\chi\delta\sigma^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}.$$

151. Ε'ὰν δὲ ὑποτεθῇ ἄτρεπτον τὸ δχ, ἔσαι δδχ = ο, ϗ Α = $\frac{\upsilon\delta\sigma^3}{\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2 - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}$. ἐὰν δὲ ἄτρεπτον ὑποτεθῇ τὸ δυ, γίνεται Α = $\frac{\upsilon\delta\sigma^3}{\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi}$. ἐὰν δ' ἐκ τᾶ σημείυ Ξ (χ. 34) ἀχθῇ ἡ ΞΝ κάθετος τῇ ἀκτῖνι ΖΓ, πλευραὶ τῆς φιλύσης ἀκτῖνος ὀνομάζονται αἱ ΞΝ, ΓΝ, ϗ ἡ μὲν ΞΝ καλεῖται πρώτη, ἡ δὲ ΓΝ δευτέρα πλευρὰ τῆς φιλύσης ἡμιδιαμέτρυ· ἵνα δὲ αὗται διοριῶσιν, ἐπισατέον, ὡς εἰ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΖΓμ, ΞΓΔ ἀφαιρεθῇ κοινῇ ἡ γωνία ΞΓμ, αἱ κατάλοιποι ΝΓΞ, μΓΔ ἔσονται ἴσαι· ἄρα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΞΝΓ, μΓΔ ὅμοιά εἰσι, ϗ ἐντεῦθεν ΓΔ : Γμ :: ΓΞ : ΓΝ, ϗ ΓΔ : Δμ :: ΓΞ : ΝΞ· ἄρα ά. ΓΝ = $\frac{\Gamma\mu \cdot \Gamma\Xi}{\Gamma\Delta}$ =

$$\frac{\upsilon\delta\chi\delta\sigma^2}{\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}.$$ ἄρα β'. ΝΞ = $\frac{\Gamma\Xi \cdot \Delta\mu}{\Gamma\Delta} - \frac{\upsilon\delta\upsilon\delta\sigma^2}{\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}$. ὑποτιθεμένων δὲ ἐκ διαδοχῆς ἀτρέπτων τῶν δχ, δυ, οἱ τύποι ἀ-

πλέσεροι καθίσανται· ἐὰν ἡ δύναμις τῦ Α καὶ τῆς ΓΝ ἢ ὑπαρκτικὴ, ἡ καμπύλη σρέψει τὴν ἑαυτῆς κοιλότητα πρὸς τὸ μόνιμον σημεῖον, τἐναντίον δὲ συμβὰν, τὴν κυρτότητα· ἵνα δὲ χρησώμεθα τοῖς ἐκτεθεῖσι τύποις, ἐὰν αἱ καμπύλαι γεγραμμέναι ὦσι διὰ τῦ ἄξονος, ἐκβλητέον τὴν ἑτέραν τῶν μεταβλητῶν τὴν χ, ἢ τὴν υ διὰ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἐξισώσεως· ϗ δὴ πορισθήσεται δύναμις τῆς ἀκτῖνος ϗ πλευρῶν αὐτῆς ἐν ὅροις πεπερασμένοις· τῆς δὲ καμπύλης γεγραμμένης διὰ τῆς ἐσίας, ἐκβλητέον τὸ δχ, ϗ θηρευτέον τήν τε ἀκτῖνα Α, ϗ τὰς αὐτῆς πλευρὰς περιεχούσας τὴν υ.

152. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ε'ν οἷς ὐδὲν ἄτρεπτον ἀπειροσὸν ὑποτέθειται τύποις, ἐκβαλλομένε ἑνὸς τῶν δευτέρων ἀπειροσῶν διὰ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἐξισώσεως, ἀεὶ ἐκβληθήσεται θάτερον δευτεροταγὲς ἀπειροσόν· ὥσε ἐξωθουμένου τοῦ ddχ, ἐξωθήσονται οἱ δύω ὅροι dudχ — dχddu· ἔσω γὰρ καμπύλης ἐξίσωσις ἢ dχ = ndu, τοῦ n ἐμφαίνοντος συνέκθεσίν τινα τοῦ χ καὶ τοῦ υ· ἔσαι τοίνυν ddχ = dn· du + nddu· ἄρα dudχ = du × (dn. du + nddu), dudχ — dχddu = du × (dn. du + nddu) — dχddu = dndu² + ndudu — ndudu (ἀντικαθισαμένης τῆς δυνάμεως τῦ dχ) = dndu², ποσότης μηδὲν περιέχουσα ἀπειροσὸν δεύτερον.

153. Εὑρημένης δὲ τῆς τε φιλούσης ἀκτῖνος ϗ τῶν αὐτῆς πλευρῶν, ἵνα διορισθῇ ἡ ἐξειλιγμένη καμπύλης τῆς ΒΔ (χ. 35), ἀνήχθω εἰς τὸν αὐτῆς ἄξονα ΑΠ, ϗ γενέσθω ΑΛ = χ, ϗ ΛΓ = υ· ὁπόταν εὑρεθήσεται ἐξίσωσις μεταξὺ χ ϗ υ· ϗ δὴ ἥτε ἀκτὶς ΞΓ ϗ αἱ αὐτῆς πλευραὶ δοθήσονται περιέχουσαι χ ϗ υ· τῦ δὲ σημείου Ξ ὄντος ἐν τῇ ἐξειλιγμένῃ, ἀπ' αὐτῦ ἤχθω τεταγμέ-

νως ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΠ ἡ ΞΠ = κ· κ ἄρα ἔσαι ἡ ἐν τῇ ἐξειλιγμένη τεταγμένη, ἧς ἀποτετμημένη ἔσαι ΑΠ = π· ϗ ἐπείπερ ΝΞ = ΛΠ, ϗ ΛΝ = ΓΛ — ΓΝ = υ — ΓΝ, εὑρεθήσονται δύω ἕτεραι ἐξισώσεις π = χ + ΞΝ, ϗ κ = υ — ΚΝ, ἐν αἷς ΞΝ, ϗ ΓΝ δεδομέναι εἰσὶ διὰ χ ϗ υ· ἔσονται ἄρα ἐξισώσεις τρεῖς· ϗ ἐὰν διὰ τῶν δύω ἐξωθῶσιν αἱ χ, υ, πορισθήσεται ἐξίσωσις τῶν π ϗ κ, ἐκδηλοῦσα τὴν τῆς ἐξειλιγμένης φύσιν.

154. Ε'ὰν δὲ ἡ ΒΔ καμπύλη γεγραμμένη ᾖ διὰ τῆς ἑσίας Ζ (χ. 34), ϗ δοθῇ ἐξίσωσις μεταξὺ ΖΓ = υ, ϗ Γμ = δχ, εὑρεθήσεται ἥ τε φιλοῦσα ἀκτὶς ϗ αὐτῆς αἱ πλευραὶ διὰ υ· προσχθείσης δὲ τῆς ΔΞ ἀκτῖνος ἐς τὸ Π, ὥστε τὸ Π κέντρον εἶναι τοῦ ἐφεξῆς τόξου Δβ, ἡ ἐξειλιγμένη διελεύσεται διὰ τῶν σημείων Ξ, Π· ἤχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΕΞ (ἀκτὶς τοῦ τόξου ΞΜ) ϗ ΕΠ, ϗ γενέσθω ΕΞ = π, ϗ ΞΜ = δκ· δεῖ δὴ εὑρεῖν ἐξίσωσιν τῶν π, δκ· ἡ εὐθεῖα ΠΞ ἔσι διαφορὰ τῆς ἀκτῖνος τοῦ τοξου ΓΔ, ϗ τῆς τοῦ τόξου Δβ· ἄυτη ἄρα ἐσὶ τὸ ἀπειροσὸν τῆς φιλούσης ἡμιδιαμέτρου· ἔσι δὲ αὖθις ΜΠ = δπ ϗ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΞΜΠ εὑρίσκεται ΠΞ, εἴτ' ὢν τὸ ἀπειροσὸν τῆς φιλούσης ἀκτῖνος, ἢ τὸ ἀπειροσὸν τῆς ἐξειλιγμένης = $\sqrt{\delta\pi^2 + \delta\kappa^2}$· ἔσι δὲ ϗ ΕΞ = π = $\sqrt{(EN^2 + \Xi N^2)}$, ἤ, ἐπεὶ ΕΝ = υ — ΓΝ, π = $\sqrt{(\upsilon - \Gamma N)^2 + \Xi N^2}$· ἀλλὰ ΓΝ, ϗ ΞΝ ἐκλαμβάνονται ὡς δεδομέναι δι' υ· ἄρα πορισθήσονται δύω ἐξισώσεις διὰ τριῶν ἀγνώσων υ, π, δκ, ϗ τοῦ υ ἀποβαλλομένου, εὑρεθήσεται ἐξίσωσις τῶν π, δκ, ἐπανήκουσα τῇ ἐξειλιγμένη.

155. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Εὑρεῖν τὴν φιλοῦσαν ἀκτῖνα τῆς παραβολῆς ΑΓ (χ. 36).

ΛΥΣΙΣ. Εἰλήφθω ὁ τύπος $A = \frac{\beta\delta\upsilon}{\delta\pi}$, ἐν ᾧ $\pi = \frac{\beta\delta\chi}{\delta\pi}$ (147)· ᾧ ζητηθήτω πρῶτον ἡ δύναμις τοῦ π· ἔστω ἡ τῆς παραβολῆς παράμετρος $= 2\alpha$· ἡ δὲ ταύτης ἐξίσωσις ἔσαι $2\alpha\chi = \upsilon\upsilon$, $2\alpha\delta\chi = 2\upsilon\delta\upsilon$, $\delta\chi = \frac{2\upsilon\delta\upsilon}{2\alpha} = \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\alpha}$· ὡκοῦν $\delta\sigma = \sqrt{\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2}$ ἔσαι $= \sqrt{\left(\frac{\upsilon^2\delta\upsilon^2}{\alpha\alpha} + \delta\upsilon^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{\upsilon\upsilon\delta\upsilon^2 + \alpha\alpha\delta\upsilon^2}{\alpha\alpha}\right)} = \frac{\delta\upsilon}{\alpha}\sqrt{(\upsilon^2 + \alpha\alpha)}$· τοιγαροῦν $\pi = \frac{\beta\delta\chi}{\delta\sigma} = \frac{\beta\upsilon}{\sqrt{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)}}$· ἄρα $\delta\pi = \frac{\beta\delta\upsilon}{\sqrt{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)}} - \frac{\beta\upsilon^2\delta\upsilon}{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}$ (*) $= \frac{\alpha\alpha\beta\delta\upsilon}{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}$· ἄρα $A = \frac{\beta\delta\upsilon}{\delta\pi} = \frac{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\alpha}$· ἀλλ' α ἐστὶν ἡμιπαράμετρος· ἄρα ἡ ὑποκάθετος $\Lambda\Pi = \alpha$· ἀλλ' ἔστι $\sqrt{(\upsilon\upsilon+\alpha\alpha)}$ κάθετος· ἄρα ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς τῆς παραβολῆς ἔστιν ἴση τῷ κύβῳ τῆς καθέτου, διαιρεθέντι διὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμιπαραμέτρου τετραγώνου.

156. Ἵνα δὲ διορισθῇ ἡ τῆς παραβολῆς ἐξειλιγμένη, ζητηθήτωσαν αἱ πλευραὶ ΓΝ καὶ ΝΞ· ἀχθείσης δὴ τῆς ΓΞ πρὸς ὀρθὰς τῇ κατὰ τὸ Γ σημεῖον ἁπτομένῃ,

---

(*) Λαμβάνεται τὸ ἀπειροστὸν, γινομένου τρεπτοῦ πρώτου τοῦ ἀριθμητοῦ, εἶτα τοῦ παρονομαστοῦ, ὄντινα δυνατὸν μεταθεῖναι ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν, ἀποδόντας αὐτῷ δείκτην τὸν $-\frac{1}{2}$.

τῇ συσοιχούσῃ τῇ ΛΓ τεταγμένῃ, ϗ ἴσης τῇ ἤδη εὑρημένῃ ποσότητι, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΓΛΠ, ΓΝΞ, πρόεισι ΚΠ : ΓΛ :: ΓΞ : ΓΝ = $\frac{\Gamma\Xi \times \Gamma\Lambda}{\Gamma\Pi}$ = $\frac{\upsilon(\upsilon\upsilon + \alpha\alpha)}{\alpha\alpha}$. ἐκ δὲ τῶν αὐτῶν τριγώνων προέρχεται ΓΛ : ΓΝ :: ΛΠ : ΝΞ = $\frac{\Gamma N \,.\, \Lambda\Pi}{\Gamma\Lambda}$ = $\frac{\upsilon\upsilon + \alpha\alpha}{\alpha}$, ὅθεν ἀποφέρονται αἱ ἐφεξῆς ἐξισώσεις $\pi = \chi + N\Xi$ (*) $= \chi + \frac{\upsilon\upsilon + \alpha\alpha}{\alpha} = \frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha} + \frac{\upsilon\upsilon + \alpha\alpha}{\alpha}$ (**), ἢ $2\alpha\pi = 3\upsilon\upsilon + 2\alpha\alpha$ (A), $\varkappa = \Gamma N - \upsilon = \frac{\upsilon(\upsilon\upsilon + \alpha\alpha)}{\alpha\alpha} - \upsilon = \frac{\upsilon 3}{\alpha\alpha}$, εἴτ' ἐν $\alpha\alpha\varkappa = \upsilon 3$. πεπολλαπλασιάσθω ἡ Α ἐξίσωσις ἐπὶ υ, ϗ διατεθείσθω ἕτω· $2\alpha\upsilon . (\pi - \alpha) = 3\upsilon 3$· ἄρα $2\alpha\upsilon . (\pi - \alpha) = 3\alpha\alpha\varkappa$, ἢ $2\upsilon . (\pi - \alpha) = 3\alpha\varkappa$, ϗ $\upsilon 3 = \frac{27}{8} \times \frac{\alpha^3 \varkappa 3}{(\pi - \alpha)^3}$. ἀντικατασαθείσης δὲ ταύτης τῆς τοῦ υ3 δυνάμεως ἐν τῇ ἐξισώσει $\alpha\alpha\varkappa = \upsilon 3$, προέρχεται $\alpha^2\varkappa = \frac{27\,\alpha^3\varkappa^3}{8(\pi - \alpha)^3}$, ἢ $\overline{\pi - \alpha}^3 = \frac{27\alpha}{8} \times \varkappa^2$, ἐξίσωσις τῆς δευτέρας κυβικῆς παραβολῆς, ἣν ἔξεσι κατασκευάσαι ὅτως· εἰλήφθω AM $= \alpha$ (ἔσι δὲ αὕτη ἡμιπαράμετρος τῆς

(*) Εἴρηται περὶ ταύτης τῆς ἐξισώσεως (153).

(**) Ἐκ γὰρ τῆς ἐξισώσεως $2\alpha\chi = \upsilon\upsilon$ προέρχεται $\chi = \frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha}$.

προτεθείσης παραβολῆς), καὶ ληφθείσης τῆς MP ὡς ἄξονος τῶν ἀποτετμημένων, γενέσθω τὸ ἀφ' ἑκάσης τεταγμένης PΞ τετράγωνον ἴσον τῷ κύβῳ τοῦ π — α, ἢ ἴσον τῷ κύβῳ τῆς MP, διαιρεθέντι διὰ τῆς παραμέτρου $\frac{27\alpha}{8}$. ἐντεῦθεν δυνατὸν συναγαγεῖν ά. ὅτι ΓΞ ἔσιν = α, ὅταν ἡ υ = ο, τοῦτ' ἔσι πρὸς τῇ κορυφῇ A τῆς παραβολῆς· ἄρα πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς παραβολῆς ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς ἔσιν = τῇ ἡμιπαραμέτρῳ· β'. ῥᾳδίως ἐξευρίσκεται ἡ εὐθυνσις τῆς δευτέρας κυβικῆς παραβολῆς, εἴγε τὸ τόξον MΞ ἔσιν ἴσον τῇ διαφορᾷ τῆς φιλούσης ἀκτῖνος ΓΞ, καὶ τῆς AM εὐθείας·

$$\text{ἄρα τὸ τόξον } M\Xi = \frac{(\upsilon\upsilon + \alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\alpha} - \alpha, \quad \text{ἀλλὰ } \upsilon\upsilon = \frac{2\alpha\pi - 2\alpha\alpha}{8}. \quad \text{ἄρα } M\Xi = \frac{(2\alpha\pi + \alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\alpha\sqrt{22}} - \alpha.$$

157. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ κλὼν AZ ἕξει ἐξειλιγμένην τὸν κλῶνα MΣ, ἡ δὲ δευτέρα κυβικὴ παραβολὴ ἔχει ἓν σημεῖον ἀντιστροφῆς τὸ M ἀντίστοιχον τῇ ἐλαχίστῃ φιλούσῃ ἀκτῖνι MA· ἐὰν δὲ ληφθῶσιν αἱ συντεταγμέναι πρὸς τῷ σημείῳ M, καὶ γένηται MP = π — α = υ, καὶ αἱ ἀποτετμημέναι (λαμβανόμεναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ϑM) PΞ = Mβ = χ, καὶ ἡ παράμετρος = ϑ, εὑρεθήσεται $\upsilon^3 = \vartheta\chi^2$, ἐξίσωσις τῆς ἐξειλιγμένης· ἐντεῦθεν δὲ κατανοεῖται ῥᾷστα, ὡς πᾶσα καμπύλη ἔχουσα σημεῖον, καθ' ὃ ἐστι μεγίστη ἡ καμπυλότης, ἢ ἐλαχίστη, ἔχει ἐξειλιγμένην δυοῖν εὐμοιρεστέρων κλωνῶν· τὸ δὲ σημεῖον ταύτης, τὸ ἀντίστοιχον τῇ μεγίστῃ, ἢ τῇ ἐλαχίστῃ, φιλούσῃ ἀκτῖνι, ἔστι σημεῖον ἀντιστροφῆς, ἢ καμπῆς· τὰ δὲ εἰρημένα ἐξικανοῖ τὴν τῆς προτάσεως ἐκδηλῶσαι

ἀλήθειαν, ὅταν ἡ φιλῆσα ἀκτὶς ᾖ μεγίςη· τὰ δὲ ῥήθησόμενα ἐπὶ τῆς ἐξειλιγμένης τῆς ἐλλείψεως σαφὲς τὸ πρᾶγμα ἀπεργάζονται, ὅταν ἡ φιλῆσα ἀκτὶς ᾖ μεγίςη.

153. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν τὴν φιλῆσαν ἀκτῖνα τῆς ἐλλείψεως ϗ τῆς ὑπερβολῆς.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ὁ ἄξων = α, ϗ ἡ παράμετρος = π, ϗ ἡ ἀποτετμημένη ΑΛ = χ· ἄρα ἔσαι $v^2 = \pi\chi \mp \frac{\pi\chi\chi}{\alpha}$, ϗ $v = \sqrt{(\pi\chi \mp \frac{\pi\chi\chi}{\alpha})}$ (Υ΄ψ. Γ. 249)· λαμβανομένων ἓν τῶν ἀπειροςῶν, ἐυρίςκεται ἡ δύναμις τῆ δχ· λαμβανομένων δὲ ϗ τῶν δευτέρων (ὑποτιθεμένης μέντοι ἀντρέπτης τῆ δχ), ἐυρίςκεται ἡ δύναμις τῆ δδυ· ἀντικαθιςαμένων δὲ τῶν δε τῶν δυνάμεων ἐν τῷ εὑρεθέντι τύπῳ

(145) $\frac{\delta\sigma^2}{-\delta\chi\delta\delta v}$, ἐπεὶ $\delta\sigma = \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta v^2)}$, ἐυρεθήσεται $A =$

$$\frac{(\alpha\alpha\pi\pi \mp 4\alpha\pi\pi\chi + 4\pi\pi\chi\chi + 4\alpha^2\pi\chi \mp 4\alpha\pi\chi^2)}{2\alpha^3\pi^2} \times$$

$\sqrt{(\alpha^2\pi^2 \mp 4\alpha\pi\pi\chi + 4\pi\pi\chi\chi + 4\alpha\alpha\pi\chi \mp 4\alpha\pi\chi^2)}$· ζητηθεῖσα μέντοι ἡ δύναμις τῆς καθέτης, ἥτις (72) ἔςιν

$$= \frac{v\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta v^2)}}{\delta\chi}, \text{ ἐυρεθήσεται} =$$

$$\frac{\sqrt{(\alpha^2\pi^2 \mp 4\alpha\pi\pi\chi + 4\pi\pi\chi\chi + 4\alpha\alpha\pi\chi \mp 7\alpha\pi\chi^2)}}{2\alpha}.$$

ἄυτη δὲ ἡ ποσότης ὑποτεθείσθω = μ· ἐὰν ᾖ αὕτη κυβιθῇ, ϗ διαιρεθῇ διὰ π^2, ϗ πολλαπλασιαθῇ ἐπὶ 4, ἥ, ὃ δὴ ταὐτὸν, ἐὰν ὁ κύβος ταύτης τῆς ποσότητος διαιρεθῇ διὰ $\frac{1}{4}\pi^2$, εὑρεθήσεται $A A = \frac{\mu^3}{\frac{1}{4}\pi^2}$· ἐν ἄρα τῇ ἐλ-

λείψει καὶ τῇ ὑπερβολῇ ἡ φιλοῦσα ἡμιδιάμετρος ἴση ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς καθέτου κύβῳ, διαιρεθέντι διὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμιπαραμέτρου τετραγώνου.

Ἐν δὲ τῷ κύκλῳ ἥτε κάθετος καὶ ἡ ἡμιπαράμετρος εἰσὶν ἴσαι τῇ ἀκτῖνι· ἐν ἄρα τῷ κύκλῳ ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς ἔστιν ἴση τῇ κυκλικῇ ἀκτῖνι· ἡ δὲ αὐτοῦ ἐξειλιγμένη σημεῖόν ἐστι μοναδικὸν, ὅπερ ἐστὶν αὐτὸ τοῦ κύκλου τὸ κέντρον.

159. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐντεῦθεν ἄρα καὶ ἐκ τοῦ (155) δῆλον, ὅτι ἀπάσης κωνικῆς τομῆς ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς ἴση ἐστὶ τῷ τῆς καθέτου κύβῳ, διαιρεθέντι διὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμιπαραμέτρου τετραγώνου

160. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi = 0$, ἔσαι

$$A = \frac{(\alpha\alpha\pi\pi)\sqrt{(\alpha^2\pi^2)}}{2\alpha^3\pi^2} = \frac{\alpha^3\pi^3}{2\alpha^3\pi^2} = \tfrac{1}{2}\pi\cdot$$

ἄρα πρὸς τῇ κορυφῇ A ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ὑπερβολῆς ἴση ἔσαι τῇ ἡμιπαραμέτρῳ· καὶ ἐπεὶ ἐν τῇ παραβολῇ (155) ἔστιν $A = \frac{(\upsilon\upsilon + \alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\alpha}$, καὶ πρὸς τῇ κορυφῇ A (χ. 36) $\upsilon = 0$, εὑρεθήσεται $A = \frac{(\alpha\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\alpha} = \alpha\cdot$ ἀλλ' α ἐστὶν ἡμιπαράμετρος, τ' αὐτὸν ἄρα ἐπικρατεῖ καὶ ἐν τῇ παραβολῇ.

161. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi = \frac{1}{2}\alpha$, εὑρεθήσεται ἐν τῇ ἐλλείψει (χ. 37) $A = \Delta M = \frac{\alpha\sqrt{\alpha\pi}}{2\pi}$, κληθέντος δὲ τοῦ ἐλάττονος ἄξονος $= \beta$, ἔσαι (Υ΄ψ. Γ. 97) $\alpha : \beta :: \beta : \pi$, $\beta\beta = \alpha\pi$, καὶ $\beta = \sqrt{\alpha\pi}$· ἐὰν ἄρα γένηται $2\pi : \alpha :: \beta : \Delta M$, τὸ σημεῖον M ἔσαι ἐν τῇ ἐξειλιγμένῃ, καὶ ἅμα ἔσεται σημεῖον καμπῆς· ἐὰν

δὲ ὅλη ἡ ἔλλειψις ἐξελιχθῇ, ἡ ἐξειλιγμένη (χ. 38) ἔξει τέσσαρας ἰσαλλήλους κλᾶνας.

162. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὴν φιλοῦσαν ἀκτῖνα τῆς κυκλοειδοῦς ΑΔα (χ. 39).

ΛΤΣΙΣ. Ἔστω τὸ κυκλικὸν τόξον ΔΝ = ψ· ὠκοῦν ἔσαι ΠΓ = υ = ΠΝ + ψ = ἡμ. ψ + ψ, καὶ δυ = δ. ἡμ ψ + δψ· ὑποτεθείσθω ἡ ἀκτὶς = 1, καὶ ΔΠ = χ· καὶ δὴ ἔσαι, διὰ τὴν κυκλικὴν ἰδιότητα, ΠΝ = √(2χ − χχ)· ἄρα δ. ΠΝ = δ. ἡμ. ψ = δ. √(2χ − χχ) = $\frac{\delta\chi - \chi\delta\chi}{\sqrt{(2\chi - \chi\chi)}}$· ἀλλὰ (35) τὸ ἀπειροστὸν ἡμιτόνου τόξου, οὗ ἀκτὶς = 1, ἔστιν ἴσον τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ κατὰ τὸ τόξον ἀπειροστοῦ, καὶ τοῦ συνημιτόνου· ἐνταῦθα δὲ ἔστι συνημίτονον ΡΠ = 1 − χ· ἄρα τὸ ἀπειροστὸν τοῦ ἡμ. ψ ἔστιν = δψ. (1 − χ), καὶ δψ = $\frac{\delta . \text{ἡμ. } \psi}{1-\chi} = \frac{(1-\chi).\delta\chi}{(1-\chi).\sqrt{(2\chi-\chi\chi)}}$ = $\frac{\delta\chi}{\sqrt{(2\chi-\chi\chi)}}$· ἄρα δυ = $\frac{(2-\chi)\,\delta\chi}{\sqrt{\chi}.\sqrt{(2-\chi)}} =$ $\frac{\delta\chi\sqrt{(2-\chi)}}{\sqrt{\chi}} = \frac{\delta\chi}{\chi} \times \sqrt{(2\chi - \chi\chi)}$, καὶ δδυ = $\frac{-\delta\chi^2}{\chi.\sqrt{(2\chi-\chi\chi)}}$ (ὑποτιθεμένου ἀτρέπτου τοῦ δχ)· ἄρα δσ² = δχ² + δυ² = $\frac{2\delta\chi^2}{\chi}$, καὶ A = ΓΞ = $\frac{\delta\sigma^3}{-\delta\chi\delta\delta\upsilon}$, ὑποτιθεμένου δὲ ἀτρέπτου τοῦ δχ, εὑρίσκεται = 2. √(2. (2 − χ)· ἀλλ ἡ χορδὴ ΖΝ (Γεωμετ. 55²) ἔστι μέση ἀνάλογον τῆς διαμέτρου καὶ τοῦ μέρους ΖΠ· ἄρα ΓΞ = 2 ΖΝ· ἀλλὰ ΔΝ παράλληλός ἐστι τῇ ἀπτομένῃ Γμ (Υ'ψ. Γ. 335) καὶ ἔτι ΝΖ κάθετος ἐφέστηκε τῇ ΔΝ, τῆς ΓΞ καθ-

ἑτϑ ἐφισαμένης τῇ Γμ· ἄρα ZN = Γν = νΞ, τϑτέσιν, εὐθείας τῆς ΓΞ παραλλήλϑ ἀγομένης τῇ χορδῇ PN, ϗ τῆς χορδῆς ταύτης διπλασιαζομένης, τὸ σημεῖον Ξ ἔσαι ἐν τῇ ἐξειλιγμένῃ· αὕτη δὲ ἡ καμπύλη διήκει διὰ τϑ σημείϑ A; ἔνθα ἡ φιλϑσα ἡμιδιάμετρος ἔσιν = o.

163. Ἵνα δὲ διοριωθῇ ἡ ἐξειλιγμένη, σημειωτέον ὡς ἡ ΔM ἀκτὶς, ἡ συσοιχϑσα τῷ μέσῳ σημείῳ τῆς κυκλοειδϑς, ὀφείλει εἶναι διπλασία τῆς διαμέτρϑ τϑ γεννήτορος κύκλϑ· συσαθέντος ἄρα τϑ ὀρθογωνίϑ ABαβ, ἡ τϑ ΑΣΒ ἡμικυκλίϑ διάμετρος ἔσαι = ZΔ· ϗ, ἐπειδὴ Γν = νΞ, αἱ παράλληλοι πζ, ΠΓ ἴσον ἀπέχϑσι τῆς Aα· τάτε τόξα ΑΣ, NZ, ἐναπολαμβανόμενα ὑπὸ τῶν ἴσον ἀπεχϑσῶν τϑτων παραλλήλων, εἰσὶν ἴσα, ϗ αἱ αὐτῶν χορδαὶ ἐπομένως ἴσαι· ἄρα αἱ AZN, νΑΣ γωνίαι, αἱ περιεχόμεναι ὑπὸ τῆς ἁπτομένης AZ, ϗ τϑτων τῶν χορδῶν, εἰσὶν ἴσαι, ϗ δὴ ΑΣ ἔσαι παράλληλος τῇ νΞ ϗ τῇ ZN· ἔσαι δὲ ϗ Αν = ΣΞ· ἀλλὰ τὸ τόξον ΔN = ΓN = νZ· ἄρα Αν ἴση τῷ τόξῳ ZN· ἄρα τὸ τόξον ZN = ΣΞ· ἄρα τὸ τόξον ΑΣ ἔσιν ἴσον τῇ συσοιχϑσῃ τεταγμένῃ ΣΞ, ἰδιότης αὕτη ἐξαίρετος τῆς κυκλοειδϑς, ϗ ἑπομένως ἡ καμπύλη ΑΞΜ ἔσιν ἡμικυκλοειδής.

163. ΠΟΡΙΣΜΑ. Α῎ρα ά. τὸ μῆκος τῆς ἡμικυκλοειδϑς διπλάσιόν ἐσι τῆς τϑ γεννήτορος κύκλϑ διαμέτρϑ, ϗ ἡ ὅλη κυκλοειδὴς τετραπλασία· ἄρα β΄. ἡ τῆς κυκλοειδϑς ἐξειλιγμένη καὶ αὕτη ἐσὶ κυκλοειδὴς, ὡς δέδεικται ϗ ἐν (Τ΄ψ. Γ. 339), ἀλλὰ κατὰ θέσιν κειμένη ἐναντίαν· ἔχει γὰρ ἡ ἐξειλιγμένη σημεῖον καμπῆς κατὰ τὸ M, συνισαμένη ὑπὸ δύω ἡμικυκλοειδῶν, ὧν ἑκατέρα ἴση τῷ ἡμίσει τῆς κυκλοειδϑς ΑΔα.

164. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὴν φιλοῦσαν ἀκτῖνα τῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις κυκλικῆς ὑπερβολῆς.

ΛΥΣΙΣ. Ε"ςω ΑΒ = ΒΔ = α (χ. 40), κ᾽ ΑΛ = χ, κ᾽ ΛΓ = υ· ὠκῶν ἔςαι χυ = αα· λαμβανομένων δὲ τῶν ἀπειροςῶν, ἔςαι χδυ + υδχ = ο· κ᾽ ἐκ τέτων αὖθις τῶν δευτέρων, τοῦ δχ τηρουμένου ἀτρέπτου, εὑρίσκεται δδυ = $\frac{-2\delta\chi\delta\upsilon}{\chi}$· ἀντικατασαθείσης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν τῷ τύπῳ τῆς πλευρᾶς ΓΝ = $\frac{-\delta\sigma^2}{\delta\delta\upsilon}$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὑπερβολῆς, εὑρεθήσεται ΓΝ = $\frac{\chi\delta\sigma^2}{2\delta\chi\delta\upsilon}$ = $\frac{\chi(\delta\chi^2+\delta\sigma^2)}{2\delta\chi\delta\upsilon}$· ἀλλ᾽ ἐκ τῆς ἐξισώσεως χδυ + υδχ = ο προέρχεται δυ = $\frac{-\upsilon\delta\chi}{\chi}$· ἄρα ΓΝ = $\frac{\chi^2+\upsilon^2}{-2\upsilon}$· λειπτικῆς δὲ ὄσης ταύτης τῆς ποσότητος, λητέον τὴν ΓΝ ἐκ τῶν ἀντιθέτων τῆς τῶν ἀποτετμημένων γραμμῆς· ἤχθω ἡ ΑΓ, κ᾽ τῆς αὐτῆς προαγωγῆς γενομένης ΓΕ = $\frac{\text{ΑΓ}}{2}$, ἐςάτω αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΝ, ἀπαντῶσα τῇ ΛΓ (προχθείσῃ) κατὰ τὸ Ν· ἡ τοίνυν πλευρὰ ΓΝ ἐντεῦθεν διορισθήσεται· ἐκ γὰρ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΓΛ, ΝΓΕ πρόεισι ΓΛ : ΓΑ :: ΓΕ : ΓΝ, εἴτ᾽ ἂν υ : $\sqrt{(\chi\chi+\upsilon)}$ :: $\frac{\sqrt{(\chi\chi+\upsilon\upsilon)}}{2}$: ΓΝ = $\frac{\chi\chi+\upsilon\upsilon}{2\upsilon}$, ἥτις ἐςὶν ἡ εὑρεθεῖσα ἤδη δύναμις, παρορωμένου τοῦ σημείου, ὃ μόνην τὴν θέσιν τῆς ΓΝ δείκνυσι.

165. Η"χθω ἤδη ἡ ΓΞ κάθετος τῇ καμπύλῃ, κ᾽

ΝΞ παράλληλος ταῖς ἀποτετμημέναις· ἐκῶν τὸ σημεῖον Ξ, καθ' ὃ συναντῶνται αὗται αἱ εὐθεῖαι, ἔσαι ἐν τῇ ἐξειλιγμένῃ· ἵνα δε εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Π τῆς ἐξειλιγμένης, τὸ συσοιχῶν τῷ σημείῳ Δ, κορυφῇ τῆς καμπύλης, σημειωτέον ὡς ἡ ΑΔ ἔσι κανονικὴ τῆς καμπύλης· λαμβανομένης ἄρα $\Delta K = \frac{A\Delta}{2}$, καὶ ἀγομένης, τῆς μὲν ΚΗ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΚ, τῆς δὲ ΗΠ παραλλήλου ταῖς ἀποτετμημέναις, τὸ σημεῖον Π, καθ' ὃ αὕτη ἡ εὐθεῖα συμβάλλει τῇ ΑΔ προσχθείσῃ, ἔσαι τὸ ζητούμενον· δῆλον γὰρ ὅτι $\Pi\Delta = A\Delta$, καὶ $H\Delta = B\Delta$.

Ἀλλὰ περὶ μὲν τῆς φιλούσης ἀκτῖνος καὶ τῆς ἐξειλιγμένης, καίτοι βραχέα ὡς πρὸς ἃ τὸ πρᾶγμα ἀπαιτεῖ, ὑπέρπολλα μέντοι ὡς πρὸς τὴν ἡμῶν πρόθεσιν· τὸ γὰρ ταῦτα ἐπ' ἀκριβὲς ἐνερευνᾶν ἔργον πραγματείας ἰδίας πολυπόνου τε καὶ πολυτόμου, ἣν ὁ χρόνος καὶ ἡμῖν τοῖς τούτων πονομένοις χαρίσεται· ἰτέον ἓν ἤδη ἐπὶ τὰ ἐχόμενα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τῶν Καυσικῶν δι' ἀνταναπλάσεως καὶ τῶν διὰ θραύσεως.

166. ΛΗΜΜΑ. Ποσῶν τινων κειμένων τῶν α, β, γ, ε, ἐὰν τὸ δεύτερον τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου τὸ τρίτον κτ. ἀφαιρεθῶσι, τὸ τῶν αὐτῶν διαφορῶν ἄθροισμα $\alpha - \beta + \beta - \gamma + \gamma - \varepsilon$ ἔσαι ἴσον τῷ $\alpha - \varepsilon$, εἴτ' ἓξ ἴσον τῇ τοῦ μείζονος καὶ ἐλάττονος διαφορᾷ, καὶ ἑπομένως ἴσον τῷ μείζονι, εἴπερ τὸ ἔσχατον εἴη = 0.

Σαφὲς καθ' ἑαυτὸ τὸ λεγόμενον· πᾶσαι γὰρ αἱ μεταξὺ ποσότητες ἐκ τῶν ἐναντίων συμβόλων ἐξαφανίζονται.

167. Ε'ὰν ἀκτὶς φωτὸς ἡ AB (κ. 41), ἐκ τοῦ σημείου A προϊοῦσα, ἐπιπέσῃ ἐπιπέδῳ ἐπιφανείᾳ τῇ πβ, ἡ καμπύλη ἐπιφανείᾳ τῇ ΞΒΔ, καὶ ἀνακλασθῇ κατὰ τὸ Γ, ὡς, τὴν μὲν ἐπιπίπτουσαν ἀκτῖνα εἶναι τὴν AB, τὴν δὲ ἀνακλωμένην τὴν ΒΓ, ἡ γωνία ABM, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ἐπιπιπτούσης ἀκτῖνος, καὶ τῆς τῇ ἐπιφανείᾳ καθέτου BM, καλεῖται γωνία τῆς ἐπιπτώσεως, ἡ δὲ MBΓ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς καθέτου MB, καὶ τῆς ἀνακλωμένης ἀκτῖνος ΒΓ, γωνία ἀνακλάσεως· ἔστι δὲ ἀεὶ, ὡς πείρᾳ δείκνυται ἐν τοῖς φυσικοῖς, ἡ τῆς ἀνακλάσεως γωνία ἴση τῇ τῆς ἐπιπτώσεως· ἀλλ' ἡ γωνία ABM ἔστι παραπλήρωμα τῆς ABπ = ABΞ· ἡ γὰρ ὑπὸ πΒΞ γωνία ἔστιν ἀπειροστή, ἡ δὲ MBΓ παραπλήρωμά ἐστι τῆς ὑπὸ ΓΒβ = ΓΒΔ· ἄρα αἱ γωνίαι, αἱ περιεχόμεναι ὑπὸ τῶν ἀκτίνων τῆς τε ἀνακλάσεως καὶ τῆς ἐπιπτώσεως καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου, εἰσὶν ἰσάλληλοι.

168. Ε'ὰν ἐπινοηθῶσιν ἀπειράριθμοι φωτοφυεῖς ἀκτῖνες ZA, ZM κτ. (κ. 42), ἐκ τοῦ Z μὲν ἀναπηγάζουσαι, τῇ δὲ AB καμπύλῃ προσπίπτουσαι, κἀντεῦθεν ἀνακλώμεναι, καὶ τὴν γωνίαν τῆς ἐπιπτώσεως ἴσην τῇ τῆς ἀνακλάσεως ποιοῦσαι, ἡ καμπύλη βΞ, ἧς ἐπιψαύουσιν αἱ ἀναπλωμέναι ἀκτῖνες, ἢ ἡ καμπύλη βP (κ. 43), ἧς ἐπιψαύουσιν αἱ προαγωγαὶ τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων, ἀκέει καμπύλη καυσικὴ δι' ἀνακλάσεως· ἐὰν δὲ γένηται ἡ ἀπτομένη AΛ = AZ (κ. 46) καὶ ἐξελιχθῇ ἡ γραμμὴ AΞβ, ἐπινοουμένου νήματος ἴσου τῇ καμπύλῃ βΞ σὺν τῇ εὐθείᾳ AP = Λ (ἀκτῖνι ἀνακλωμένῃ συνοιχού

σῃ τῷ σημείῳ) τὸ σημεῖον Λ καταγράψει τὴν καμπύλην ΛΠ, ὥσε τὴν ἀπτομένην τῆς καυσικῆς ΠΞ ἀεὶ ἐξισοῦσθαι τῇ μερίδι ΑΞ τῆς καυσικῆς σὺν τῇ εὐθείᾳ ΑΛ (εἴπερ ΑΡ γραμμὴ εὐθεῖα εἴη, δυνατὸν μέντοι ἐνδέξασθαι αὐτὴν ὡς εὐμοιρεῦσαν ἀπειροσῆς καμπυλότητος, ϗ μέρος ὑπάρχουσαν τῆς καμπύλης βΞ)· ἐὰν ἐπινοηθῶσαν αἱ ἐπιπίπτουσαι ἀκτῖνες προσεχέσαται ΖΜ, Ζμ, ϗ αἱ συσοίχως ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες ΜΞ, μΞ προεκβεβλημέναι, ἔστ' ἂν σύμβάλωσι τῇ γραμμῇ ΛΠ, ϗ κέντροις τοῖς Ζ, Ξ γραφῶσι τὰ τόξα ΜΝ, Μν, συσαθήσονται ὀρθογώνια τρίγωνα ἴσα ϗ ὅμοια τὰ ΜΝμ, Μνμ· ἐπεὶ γὰρ ἡ γωνία τῆς ἀνακλάσεως ἴση ἐσὶ τῇ τῆς ἐπιπτώσεως, ἔσαι ΝμΜ = ΞμΒ· ἀλλὰ ΞμΒ = Μμν (ὡς κατὰ κορυφὴν)· ἄρα τὰ δύω ταῦτα τρίγωνα εἰσὶν ὅμοια· ϗ ἐπεὶ ἴση ἐσὶν αὐτοῖς ἡ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσα, εἰσὶ ϗ ἴσα· ἄρα Νμ = μν· ἀλλὰ υμ ἔσιν ἡ διαφορὰ τῆς ΠΜ, ϗ μΝ τῆς ΖΜ· ϗ ἐπεὶ τοῦτο ἐπικρατεῖ ἔντινι τῆς καμπύλης τόπῳ, ἔνθα κεῖται τὸ σημεῖον Μ· ἄρα ΜΠ — ΛΑ, ἢ ΑΡ + ΡΞ — ΜΞ, ἄθροισμα πασῶν τῶν διαφορῶν Νμ τῶν ἐν τῷ μέρει τῆς καμπύλης ΑΜ, (166) ἔσιν = ΖΜ — ΖΑ, ἀθροίσματι πασῶν τῶν διαφορῶν Νμ τῶν ἐν τῷ ΑΜ τῆς καμπύλης μέρει· συσαθήσεται ἄρα ἡ ἐξίσωσις ΑΡ + ΡΞ — ΜΞ = ΞΜ — ΖΑ· ἄρα τὸ τόξον ΡΞ (τῆς καυσικῆς) ἔσιν = ΞΜ — ΖΑ + ΜΞ — ΑΡ, τοῦτ' ἔσι τὸ τόξον ΡΞ τῆς καυσικῆς ἔσιν ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν ἐπιπιπτουσῶν ἀκτίνων τοῦ συσοιχοῦντος τόξου ΑΜ σὺν τῇ διαφορᾷ πασῶν τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων· ἐκλαπτέον γὰρ τὴν ΑΡ ὡς ἀνακλωμένην ἀκτῖνα συσοιχοῦσαν τῷ σημείῳ Α· ὅταν δὲ ἡ καυσικὴ ἄρχηται ἀπὸ τοῦ Α, ἡ ἀκτὶς ἔσιν = ο· τῆς δὲ ἀνακλωμένης ἀκτῖνος ΑΡ (χ. 17) ἐξελισσούσης

τὸ ΡΞ μέρος τῆς καυσικῆς, ἵν' ἀφίκηται ἐπὶ ΜΞ, τηνικαῦτα εὑρεθήσεται ΡΞ = ΖΜ — ΖΑ + ΑΡ — ΜΞ, εἴγε τηνικαῦτα ἡ τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων διαφορὰ ἐσιν = ΡΞ + ΞΜ — ΑΡ· καθόλε δὲ, ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιπιπτεσῶν ἴση ἐσὶ τῇ τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων, συναπτομένε μιᾷ τῶν ἀνακλωμένων τῦ μέρες τῆς καυσικῆς, τῦ ἐξελισσομένε πρὶν ἢ θατέρᾳ ἐπιπεσεῖν· ἐὰν δὲ κέντρῳ τῷ Ζ (χ. 16, 17) γραφῇ τὸ τόξον Αα, δῆλον, ὅτι αΜ ἔσαι ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιπιπτεσῶν ἀκτίνων· ἐὰν δὲ τὸ ἀκτινοβόλον σημεῖον Ζ (χ. 44) ἀπείρως ἀπέχῃ, αἱ ἐπιπίπτεσαι ἀκτῖνες ἐκληφθήσονται ὡς παράλληλοι, ϗ τὸ τόξον Αα δυνήσεται ἐκληφθῆναι ὡς εὐθεῖα κάθετος ταύταις ταῖς ἀκτῖσι· δῆλον δὲ, ὅτι, εὐρισκομένης τῆς συνδρομῆς τῶν προσεχεσάτων ἀκτίνων ΜΞ, μΞ (χ. 16), πορισθήσεται τὸ Ξ σημεῖον τῆς καυσικῆς.

169. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Δοθέντος σημείε τῦ Μ καμπύλης τῆς ΑΜ (χ. 45) ϗ σημείε ἀκτινοβόλε τῦ Ζ, εὑρεῖν τὸ μῆκος ΜΞ τῆς ἀνακλωμένης ἀκτῖνος.

ΛΥΣΙΣ. Ζητηθήτω (διάτινος τῶν προαποδεδομένων τύπων) ἡ ἀκτὶς ΜΓ τῆς κατὰ τὸ Μ ἐξειλιγμένης, ϗ λημθέντος τῦ ἀπειροσῦ τόξε Μμ, ἐπινοηθήτωσαν αἱ ἐπιπίπτεσαι ϗ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες, ἃς τὸ σχῆμα παρίσησι· ϗ κέντροις τοῖς Ζ, Ξ γεγράφθωσαν τὰ τόξα Μν, ΜΝ, ϗ ἤχθωσαν αἱ κάθετοι ΓΠ, Γπ, ΓΒ, Γβ ταῖς τε ἐπιπιπτέσαις, ϗ ταῖς ἀνακλωμέναις ἀκτῖσι· ϗ γενέσθω ΖΜ = υ, ϗ ΜΠ = ΜΒ (εἴγε τῶν γωνιῶν ΠΜΓ, ΒΜΓ ἴσων ὀσῶν, πάντα τὰ τῆς ΓΜ εὐθείας σημεῖα ἴσον ἀπέχεσι τῶν εὐθειῶν ΒΜ, ΜΖ) = α· τέτων τεθέντων, δῆλον ἐκ τῶν ἄρτι εἰρημένων, ὅτι τὰ τρίγωνα Μνμ, ΜΝμ εἰσὶν ἴσα, ϗ ΜΝ = Μν· ἐπεὶ δὲ ϗ αἱ γωνίαι

τῆς ἐπιπτώσεως εἰσὶν ἴσαι ταῖς τῆς ἀνακλάσεως, ἔστιν ἄρα ΓΠ = ΒΓ, καὶ Γπ = βΓ, καὶ ἑπομένως ΓΠ — Γπ = ΓΠ — ΓΣ = ΠΣ = ΓΒ — Γβ = Βϑ· ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΖΠΣ, ΖΜν εἰσὶν ὅμοια, καθὰ δὴ καὶ τὰ ΞΜν, ΞΒϑ· ἄρα ΖΜ = υ : ΖΠ = υ — α : : ΜΝ : ΠΣ, ἢ (συνθέσει τε καὶ ἀντιστροφῇ) 2υ — α : υ : : ΜΝ + ΠΣ = ΜΝ + Βϑ : Μν = ΜΝ : : ΜΞ + ΞΒ = ΜΒ = ΜΠ = α : ΜΞ = $\frac{\alpha\upsilon}{2\upsilon - \alpha}$.

Τῆς δὲ καμπύλης κυρτῆς ἔσης πρὸς τὸ Ζ, τὸ υ γενήσεται λειπτικὸν, καὶ εὑρεθήσεται ΜΞ = $\frac{-\alpha\upsilon}{-2\upsilon - \alpha}$ = $\frac{\alpha\upsilon}{2\upsilon + \alpha}$· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ τὸ υ ἄπειρον, τηνικαῦτα αἱ ἐπιπίπτουσαι ἀκτῖνες (κ. 44) ὡς παράλληλοι ἐκληφθήσονται, καὶ ἔσαι ΜΞ = $\frac{\alpha\upsilon}{2\upsilon}$ = $\frac{\alpha}{2}$.

Ε'ὰν ἡ καμπύλη ΑΜ (κ. 45) ᾖ γεωμετρική, δυνατὸν εὑρεῖν γεωμετρικῶς πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐξειλιγμένης· δυνατὸν δὲ εὑρεῖν διὰ τῆς ΑΜΒ (κ. 42) καμπύλης καὶ γραμμὴν εὐθεῖαν ἴσην μέρει τινὶ τῷ ΡΞ τῆς καυσικῆς, ἥτις ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἔσαι εὐθύνσιμος.

Ε'ὰν ἡ καμπύλη ΑΜ (κ. 43) κυρτὴ ᾖ πρὸς τὸ ἀκτινοβόλον σημεῖον Ζ, ἔσαι ΜΞ = $\frac{\alpha\upsilon}{2\upsilon + \alpha}$, ποσότης ἀεὶ ὑπαρκτική· ὃκῶν δεήσει ταύτην λαβεῖν, ἔνθα προσδιορίζεται ἡ ἀκτὶς τῆς ἐξειλιγμένης ΜΞ· αἱ δὲ προσεχέσαται ἀκτῖνες ἔσονται τηνικαῦτα ἀποκλίνουσαι (*).

(*) Ἀποκλίνουσαι μὲν ἀκτῖνές εἰσιν αἱ ἀπ' ἀλλήλων ἀφ-

Ε'ὰν (χ. 45) ἡ καμπύλη ἢ κοίλη πρὸς τὸ Ζ, ἡ δύναμις τῆς $\mathrm{M\Xi} = \frac{\alpha\upsilon}{2\upsilon - \alpha}$, ὑπαρκτικὴ μὲν ἔσαι, ὅταν ἢ $\upsilon > \frac{\alpha}{2}$, λειπτικὴ δὲ, ὅταν $\upsilon < \frac{\alpha}{2}$, ἄπειρος δὲ, ὅταν $\upsilon = \frac{\alpha}{2}$· ᾗ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει συγκλινῆσιν, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἀποκλινῆσιν, ἐν δὲ τῇ τρίτῃ παράλληλοι ἔσονται, αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες.

Ε'ὰν γραφῇ κύκλος, ἧ ἡ διάμετρος ΜΗ (χ. 46) εἴη τὸ ἥμισυ τῆς φιλέσης ἀκτῖνος ΜΓ, διὰ τὰ ὀρθογώνια ὅμοια χήματα ΜΚΗ, ΜΠΓ, ἔσαι $\mathrm{MK} = \frac{\mathrm{M\Pi}}{2} = \frac{\alpha}{2}$ ᾗ $\mathrm{MH} = \frac{\mathrm{M\Gamma}}{2}$· ὥστε, εἰ μὲν τὸ σημεῖον Ζ πίπτοι ἐπὶ τοῦ Κ, εἴτ' ἓν ἐπὶ τῆς κυκλικῆς περιφερείας, αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες ἔσονται παράλληλοι· εἰδ' ἐκτὸς τοῦ κύκλου, συγκλίνουσαι· ἀποκλίνουσαι δὲ, εἴπερ ἐντός.

Ε'ὰν ἡ καμπύλη ΑΜ (χ. 47) ὑποτεθῇ παραβολὴ συνήθης· τὸ δ', ἀφ' οὗ προχέονται αἱ ἀκτῖνες, σημεῖον ε ὑπάρχῃ αὐτῆς ἡ ἑσία, διὰ τὴν ἰδιότητα ταύτης τῆς καμπύλης, αἱ γωνίαι, αἱ συνισάμεναι ὑπὸ τῆς ἁπτομένης ᾗ τῆς ὀρθίας ἀκτῖνος ᾗ τῆς συσοιχούσης διαμέτρου, εἰσὶν ἴσαι (ὡς φαίνεται ἐν ταῖς κωνικαῖς τομαῖς)· ἄρα ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ΜΞ ἔσαι παράλληλος τῷ ἄξονι Αε.

ισάμεναι, συγκλίνουσαι δὲ, αἱ κατὰ βραχὺ προσπελάζουσαι ἀλλήλαις.

Ε'ὰν ἡ καμπύλη ΑΜ ᾗ ἔλλειψις (χ. 48)· τὸ δὲ ἀκτινοβόλον σημεῖον ᾗ μία τῶν ἑσιῶν, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς διήξει διὰ τῆς ἑτέρας ἑσίας ε· κατὰ γὰρ τὴν τῆς καμπύλης ταυτης ἰδιότητα (Τ'ψ. Γ. 104) αἱ γωνίαι, αἱ περιεχόμεναι ὑπὸ τῆς ἁπτομένης χ' τῶν ὀρθίων πλευρῶν, εἰσὶν ἴσαι· ἄρα κτ.

Ε'ὰν ἡ καμπύλη ΑΜ (χ. 49) ᾗ ὑπερβολή· τὸ δὲ ἀκτινοβόλον σημεῖον Ε ᾗ μία τῶν ἑσιῶν, αἱ ἀνακλώμεναι ἀκτῖνες, προαχθεῖσαι, διήξουσι διὰ τῆς ἑτέρας ἑσίας ε· ἐξερχόμεναι δὲ ἐκ τοῦ ε, προαχθεῖσαι, διήξουσι διὰ τοῦ Ε· συμβαίνει δὲ τοῦτο, ὅτι αἱ γωνίαι, αἱ περιεχόμεναι ὑπὸ τῆς ἁπτομένης καὶ τῶν εὐθειῶν ΕΜ, Εμ, εἰσὶν ἴσαι (Τ'ψ. Γ. 174).

170. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Εὑρεῖν τὴν δι' ἀνακλάσεως καυσικὴν τῆς παραβολῆς ΑΜ (χ. 50), ὑποτιθεμένων παραλλήλων τῶν ἐπιπιπτουσῶν ἀκτίνων ΕΜ, χ' καθέτων τῷ τῆς παραβολῆς ἄξονι ΑΡ.

ΛΥΣΙΣ. Ε'πειδὴ αἱ ἀκτῖνες εἰσὶ παράλληλοι, δυνατὸν ὑποθέσθαι $\upsilon = \infty$· καὶ δὴ πορισθήσεται $M\Xi = \frac{\alpha\upsilon}{2\upsilon - \alpha} = \frac{\alpha\upsilon}{2\upsilon} = \frac{\alpha}{2}$· ἐκ δὲ τοῦ μέσου Η τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐξειλιγμένης ἤχθω ἡ ΗΚ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΜΠ = α, χ' ἀχθεισῶν τῶν ἄλλων εὐθειῶν, τῶν ἐπὶ τοῦ χήματος παρισαμένων, ἔσαι (διὰ τὰ ὅμοια χήματα) ΜΓ : ΜΗ : : ΜΠ : ΜΚ : : 2 : 1 : : α : $\frac{\alpha}{2}$· ἄρα $MK = \frac{\alpha}{2} = M\Xi$· μεταφερομένης ἄρα τῆς ΜΚ ἐπὶ τῆς ἀνακλωμένης ἀκτῖνος ΜΒ, χ' γινομένης $M\Xi = \frac{\alpha}{2}$, τὸ σημεῖον Ξ ἔσαι ἐν τῇ

καυσικῇ· ὡσαύτως δὲ εὑρεῖν δυνατὸν ὅσα ἄντις βούλοιτο τῆς καυσικῆς σημεῖα· πρὸς δὲ τῷ σημείῳ Α ἡ ἀκτὶς τῆς ἐξειλιγμένης ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιπαραμέτρῳ τοῦ ἄξονος· ἐκεῖν ΜΠ = α γίνεται τηνικαῦτα = ο· ἡ δὲ καυσικὴ διήκει τηνικαῦτα διὰ τῆς κατὰ τὴν παραβολὴν κορυφῆς Α.

Ἵνα δὲ εὑρεθῇ ἡ τῆς καυσικῆς ἐξίσωσις, ὑποτεθείσθω ἡ ἀποτετμημένη ΑΡ = π, καὶ ἡ τεταγμένη ΞΡ = κ, καὶ προήχθωσαν αἱ ΜΞ μέχρι τοῦ κατὰ τὸν ἄξονα Υ, καὶ γενέσθω ΜΥ = ψ, καὶ Με = υ, καὶ ἡ ἀδιόριστος ἀποτετμημένη Αε = χ, καὶ ἡ ὑποκάθετος εΔ = $\frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi}$· τῆς δὲ γωνίας εΜΥ δίχα διαιρεθείσης διὰ τῆς ΜΔ, ἔσαι (Γεωμ. 320) Με: ΜΥ :: εΔ : ΔΥ, εἴτ' ἓν υ : ψ :: $\frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi}$: ΔΥ = $\frac{\psi\delta\upsilon}{\delta\chi}$· ἄρα εΥ = εΔ + ΔΥ = $\frac{\upsilon\delta\upsilon + \psi\delta\upsilon}{\delta\chi}$· ἀλλ' ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εΜΥ ἔστιν εΥ² = ΜΥ² — εΜ² = ψψ — υυ· ἄρα εΥ = √(ψψ — υυ) = $\frac{\upsilon\delta\upsilon + \psi\delta\upsilon}{\delta\chi}$· ἄρα (πολλαπλασιασμῷ ἐπὶ χ, τετραγωνισμῷ, μεταθέσει, καὶ διαιρέσει διὰ ψ + υ) ψδυ² + υδυ² = δχ² (ψ — υ)· ὅθεν ἀποφέρεται ψ = $\frac{\upsilon(\delta\upsilon^2 + \delta\chi^2)}{\delta\chi^2 - \delta\upsilon^2}$· ἀντικατασταθείσης δὲ ταύτης τῆς τοῦ ψ δυνάμεως ἐν τῇ τῆς εΥ = $\frac{\upsilon\delta\upsilon + \psi\delta\upsilon}{\delta\chi}$, προέρχεται εΥ = $\frac{2\upsilon\delta\upsilon\delta\chi}{\delta\chi^2 - \delta\upsilon^2}$· ἀχθείσης δὲ τῆς μΞ παραλλήλου τῷ ἄξονι, τὰ τρίγωνα ΜΞμ, ΜεΥ ἔσονται ὅ-

μοια· ἐκεῖν ΜΥ : ΜΞ :: Με : Μμ· ἔϛι δὲ ΜΞ = $\frac{\alpha}{2}$.
ἡ δὲ πλευρὰ ΓΠ τῆς φιλέσης ἀκτῖνος, ὑποτιθεμένυ ἀ-
τρέπτυ τᾶ δχ, ἔσιν = $\frac{\delta\sigma^2}{-\delta\delta\upsilon}$ (ταύτην δὲ τὴν πλευρὰν
ἐδηλώσαμεν διὰ ΓΝ, 150)· ἄρα τὸ ἥμισυ ταύτης τῆς
πλευρᾶς ὃν ἐνταῦθα = $\frac{\text{ΜΠ}}{2}$, ἔσαι $\frac{\delta\chi^2+\delta\upsilon^2}{-2\delta\delta\upsilon}$· ἄρα
$\frac{\upsilon(\delta\chi^2+\delta\upsilon^2)}{\delta\chi^2-\delta\upsilon^2} : \frac{\delta\chi^2+\delta\upsilon^2}{-2\delta\delta\upsilon} :: \upsilon : \frac{\delta\chi^2-\delta\upsilon^2}{2\delta\delta\upsilon} = \text{Μμ}$
$= \text{Με} - \text{ΞΡ} = \upsilon - \varkappa$· ἄρα $\varkappa = \upsilon + \frac{\delta\chi^2-\delta\upsilon^2}{-2\delta\delta\upsilon}$·
ἔσι δὲ ϗ Με : Με :: εΥ : μΞ = εΡ· ἄρα $\upsilon : \frac{\delta\chi^2-\delta\upsilon^2}{-2\delta\delta\upsilon}$
$:: \frac{2\upsilon\delta\upsilon\delta\chi}{\delta\chi^2-\delta\upsilon^2} : \text{εΡ} = \frac{\delta\upsilon\delta\chi}{-\delta\delta\upsilon}$, ϗ ἑπομένως εΡ = ΑΡ
$-$ εΑ $= \pi - \chi = \frac{\delta\upsilon\delta\chi}{-\delta\delta\upsilon}$, ϗ $\pi = \chi + \frac{\delta\upsilon\delta\chi}{-\delta\delta\upsilon}$· οἱ
τοίνυν τύποι τᾶ κ ϗ π λυσιτελᾶσιν ἐν παντὶ εἴδει καμ-
πύλων, διδομένης τῆς αὐτῶν ἐξισώσεως.

Ἔϛω ἡ τῆς παραβολῆς παράμετρος = 1· ἐκεῖν ἔσαι
$\upsilon^2 = \chi$, $\upsilon = \chi^{\frac{1}{2}}$, $\delta\upsilon = \frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\delta\chi$, $\delta\upsilon^2 = \frac{1}{4}\chi^{-1}\delta\chi^2$,
$\delta\delta\upsilon = -\frac{1}{4}\chi^{-\frac{3}{2}}\delta\chi^2$, ὑποτιθεμένυ ἀτρέπτυ τᾶ δχ·
ἀντικαθιϛαμένων δὲ τῶν δυνάμεων τέτων τᾶ υ, δυ, δδυ,
ἐν τοῖς τύποις τᾶ κ ϗ π, προέρχεται $\varkappa = \chi^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}\cdot\chi^{-1}\delta\chi^2}{\frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\delta\chi^2}$

$$-\frac{\delta\chi^2}{\frac{1}{2}\chi^{-\frac{3}{2}}\delta\chi^2} = \chi^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\chi^{\frac{1}{2}} - 2\chi^{\frac{3}{2}} = \tfrac{9}{2}\chi^{\frac{1}{2}} - 2\chi^{\frac{3}{2}}, \text{ ἢ } \varkappa^2 = \tfrac{9}{4}\chi - 6\chi^2 + 4\chi^3. \text{ Καὶ } \pi = \chi +$$

$$\frac{\delta\upsilon\delta\chi}{-\delta\delta\upsilon} = \chi + \frac{\frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\delta\chi^2}{\frac{1}{4}\chi^{-\frac{3}{2}}.\delta\chi^2} = \chi + 2\chi = 3\chi\cdot \text{ ἄρα } \chi = \frac{\pi}{3}\cdot$$

ἀντικαθισαμένης δὲ ταύτης τῆς τοῦ χ δυνάμεως ἐν τῇ τοῦ $\varkappa^2$, εὑρίσκεται $\varkappa^2 = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{3}\pi^2 + \frac{4}{27}\pi^3\cdot$ τῶν δὲ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὅρων πολλαπλασιασθέντων ἐπὶ τὴν παράμετρον $\iota = \beta$, ὁσάκις ἀπόχρη γενέσθαι ὁμογενεῖς, πορισθήσεται $\beta\varkappa^2 = \frac{3\beta^2\pi}{4} - \frac{2\beta\pi^2}{3} + \frac{4}{27}\pi^3$, ἐξίσωσις τῆς καυσικῆς.

Ἵνα δὲ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Σ, καθ' ὃ ἡ καυσικὴ συμβάλλει τῷ ἄξονι τῆς καμπύλης AM, σημειωτέον, ὅτι τηνικαῦτα ἔσι $\psi = M\Xi = \frac{\alpha}{2} = \frac{\delta\sigma^2}{-2\delta\delta\upsilon}\cdot$ ἄρα $\psi = \frac{\upsilon.(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}{\delta\chi^2 - \delta\upsilon^2} = \frac{\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2}{-2\delta\delta\upsilon}$, ἢ $-2\upsilon\delta\delta\upsilon = \delta\chi^2 - \delta\upsilon^2$, $\delta\upsilon^2 - 2\upsilon\delta\delta\upsilon = \delta\chi^2$, τύπος, ᾧ χρήσαθαι δυνάμεθα ἐν παντὶ εἴδει καμπύλων, ἀντικαθισάντες τὰς δυνάμεις τῶν υ, $\delta\upsilon$, $\delta\delta\upsilon$.

Ἐν ᾗ τῇ παραβολῇ ἀντικαθισάντες τὰς δυνάμεις τῶν υ, $\delta\upsilon$, $\delta\delta\upsilon$, πορισζομένας ἐκ τῆς κατ' αὐτὴν ἐξισώσεως, καὶ ὑποτιθέντες τὴν παράμετρον $= 1$, ἔξομεν $\chi = \frac{3}{4}$, τοῦτ' ἔσιν, ἐὰν ληφθῇ ἡ Αε ἴση τρισὶ τεταρτημορίοις

τῆς παραμέτρου, ἡ σύσοιχος ἀνακλωμένη ἀκτὶς ἐφάψεται τῆς καυσικῆς κατὰ σημεῖον, ἐν ᾧ αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα τῆς παραβολῆς.

Ἵνα δὲ εὑρεθῇ τὸ ἀπώτατον τοῦ ἄξονος σημεῖον Ξ τῆς καυσικῆς (κ. 47), σημειωτέον, ὅτι τηνικαῦτα ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ὀφείλει εἶναι παράλληλος τῷ ἄξονι· ἄρα ἡ ὑπὸ εΜΞ γωνία ἔσαι ὀρθή· ἄρα ἡ γωνία εΜΑ = ΞΜν = 45° = Μνι· ἄρα δχ = δυ, τοῦτ' ἔσιν ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς παράλληλός ἐσι τῷ ἄξονι, ὅταν ᾖ δχ = δυ.

Η' τῆς παραβολῆς ἐξίσωσις, ὑποτιθεμένης τῆς παραμέτρου = 1, ἔσιν $υ^2 = χ$, 2υδυ = δχ, ἢ (ἀντικαθισαμένης τῆς τοῦ υ δυνάμεως $χ^{\frac{1}{2}}$), $2χ^{\frac{1}{2}}$ δυ = δχ, ἢ διαιρέσει, τοῦ μὲν πρώτου μέλους διὰ δυ, τοῦ δὲ δευτέρου διὰ δχ, ὅπερ ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἐσὶν = δυ, πρόεισι $2χ^{\frac{1}{2}} = 1$, $χ^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, ἢ $χ = \frac{1}{4}$, τοῦτ' ἔσιν „ἐὰν ἡ ἐπι„πίπτουσα ἀκτὶς τέμνῃ τὸν ἄξονα πρὸς μέρει τετάρτῳ „τῆς παραμέτρου, ἢ, ὃ δήπου ταὐτὸν, διήκῃ διὰ τῆς „κατὰ τὴν παραβολὴν ἑσίας, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς παρ„άλληλος ἔσαι τῷ ἄξονι, ἢ ἐπιψαύσει τοῦ ἀπωτάτου ση„μείου τῆς καυσικῆς.“

171. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Εὑρεῖν τὴν δι' ἀνακλάσεως καυσικὴν, ὅταν αἱ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἄξονι Αα (κ. 51) ἐπιπίπτουσαι ἀκτῖνες ΕΜ συμβάλλωσιν ἡμιπεριφερείᾳ κυκλικῇ τῇ ΑΔα.

ΛΥΣΙΣ. Ἀχθεισῶν τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων ΜΞ, ἢ τῶν ἄλλων, ἃς τὸ χῆμα παρίσησιν, ἐπεὶ ἡ τῆς ἐξειλιγμένης κύκλου ἀκτὶς ἀεί ἐσιν ἴση τῇ τοῦ κύκλου ἀκτῖνι, ἔσαι $ΜΗ = \frac{ΜΚ}{2}$, ἢ τῆς ΗΞ καθέτου ὑποτιθεμένης τῇ ΜΞ,

ΗΞ, ἔσαι $= \text{ΗΡ} = \frac{\text{ΠΜ}}{2} = \frac{\alpha}{2}$· τοῦ δὲ σημείου Μ ἐπιπί-

πτοντος τῷ Δ, ἔσαι $\text{ΜΞ} = \Delta\text{Β} = \frac{\Delta\text{Κ}}{2}$. Α'λ' ἡ διαφορὰ τῆς ἐπιπιπτούσης ἀκτῖνος τῆς τῷ Μ συσοιχούσης, ἧ διαφέρει τῆς τῷ Α συσοιχούσης, ἔσιν $= \text{ΠΜ}$· ἡ δ' ἀνακλωμένη κατὰ τὸ Α ἀκτὶς ἔσιν $= \text{ο}$· ἄρα κατὰ τὰ εἰρημένα (168) τὸ τόξον ΑΞ ἔσιν $= \text{ΠΜ} + \text{ΜΞ} = 3\text{ΜΞ}$, τὸ δὲ τόξον $\text{ΑΒ} = 3\Delta\text{Β}$, τοῦτ' ἔσι τὸ τόξον ΑΒ τριπλάσιόν ἐσι τῆς ἡμισείας ἀκτῖνος ΔΒ· Κέντρῳ δὲ τῷ Κ γραφέντος τοῦ τόξου ΒΣ, ἐπὶ τῆς διαμέτρου $\text{ΜΗ} = \text{ΚΗ}$ γεγράφθω κύκλος ὁ ΜΞΗ· ἐπεὶ δὲ ὀρθή ἐσιν ἡ ὑπὸ ΜΞΗ γωνία, τὸ σημεῖον Ξ ἔσαι πρὸς τῇ περιφερείᾳ τοῦ κύκλου· ἔσι δὲ καὶ ἡ γωνία $\text{ΞΜΗ} = \text{ΚΜΠ} = \text{ΗΚΒ}$ (ὡς ἐναλάξ)·

ἄρα τὰ τόξα $\frac{\text{ΗΞ}}{2}$, ΗΒ, τὰ μετροῦντα ταύτας τὰς γωνίας,

πρὸς ἄλληλα εἰσὶν ὡς αἱ ἀκτῖνες $\frac{\text{ΗΜ}}{2}$, ΒΚ τῶν κύκλων

ΗΞΜ, ΒΣ· ἀλλὰ ΒΚ διπλοῦν ἐσι τῆς $\frac{\text{ΗΜ}}{2}$· ἄρα τὸ τόξον ΒΗ ἴσον ἐσὶ τῷ τόξῳ ΗΞ· ὥσθ' ἡ καμπύλη ΑΒ ἀπογεννᾶται ἐκ τῆς περιφορᾶς κύκλου, οὗ ἡ ἀκτίς ἔσιν $= \text{ΒΚ} = \frac{\text{ΑΚ}}{2}$, ὡς τὸ τοῦ ἀκινήτου κύκλου τόξον ΒΗ ἀεὶ ἴσεσθαι τῷ τοῦ κινητοῦ συσοιχοῦντι τόξῳ ΞΗ, ἡ ἑπομένως τὴν καμπύλην ΒΑ τόξον εἶναι ἐπικυκλοειδοῦς (*).

(*) Περὶ τῆς ἄτω καλουμένης καμπύλης οὐδὲν ἡμῖν εἴρηται ἐν τῇ ὑψηλοτέρᾳ Γεωμετρίᾳ· ἔσι δὲ ἡ ἀπογεννωμένη

Δυνατὸν δὲ ἰδεῖν ταύτην τὴν καμπύλην φωτίζοντας τὴν ἐσωτερικὴν ἐπιφάνειαν ἄγγυς ἡμικυλινδρικῆ διὰ τῆ ἡλιακῆ φωτός.

172. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. *Τῶν ἐπιπιπτουσῶν ἀκτίνων προβαλλομένων ἀπὸ τῆ πέρατος Ζ διαμέτρυ τῆς Ζα ἡμικυκλίυ, εὑρεῖν τὴν φύσιν τῆς δι' ἀνακλάσεως καυστικῆς* (κ. 52).

ΛΥΣΙΣ. *Ὑποτεθείσθω*, ΖΜ *μὲν ἡ ἐπιπίπτουσα ἀκτὶς*, ΜΞ *δὲ ἡ ἀνακλωμένη· καὶ ἀχθείσης τῆς* ΚΠ *πρὸς ὀρθὰς τῇ* ΖΜ, *ἔσαι* $ZM = v$, *καὶ* $M\Pi = \alpha = \frac{v}{2}$ (*ἡ γὰρ ἀκτὶς δίχα τέμνεται ὑπὸ καθέτυ ἐκ τῆ κέντρυ ἀγομένης*, Γεωμ. 157)· *ἄρα* $2v = 4\alpha$· *ἐκεῖν* $M\Xi = \frac{\alpha v}{2v - \alpha} = \frac{\alpha v}{4\alpha - \alpha} =$ $\frac{\alpha v}{3\alpha} = \frac{v}{3}$· *λαμβανομένης ἄρα τῆς* ΜΞ *ἴσης τῷ τριτημορίῳ τῆς* ΖΜ, *τὸ σημεῖον* Ξ *ἔσαι ἐν τῇ καυστικῇ· λαμβανομένης δὲ καὶ τῆς* αΒ *ἴσης τῷ τριτημορίῳ τῆς διαμέτρυ* Ζα, *ἔσαι καὶ τὸ* Β *ἐν τῇ καυστικῇ, ἐὰν δὲ ληφθῇ* Κβ *ἴση τῷ τριτημορίῳ τῆς ἀκτῖνος* ΚΜ, *καὶ ἀχθῇ ἡ* βι *παράλληλος τῇ* ΚΠ, *τὰ τρίγωνα* ΜΚΠ, Μβι *ἔσονται ὅμοια, καὶ δὴ ἔσαι* ΜΚ : Μβ :: ΜΠ : Μι· *ἄρα* Μι *ἔσαι δύω τριτημόρια τῆς* ΜΠ, *ἢ ἓν τριτημόριον τῆς* ΖΜ· *ἄρα* $M\Xi = M\iota$· *διὸ δὴ, ἐὰν ἐπὶ διαμέτρυ τῆς* Μβ *γραφῇ κύκλος, αἱ ὀρθαὶ γω-*

ὑπὸ κύκλυ, ἐπὶ κύκλον ἀκίνητον μένοντα περιαγομένυ· διαφέρει δὲ τῆς λεγομένης κυκλοειδοῦς, ὅτι ἐκείνη ὑπὸ κύκλυ ἐπ' εὐθεῖαν γραμμὴν κυλιομένυ γράφεται (Υ΄ ψ. Γ. 332)· *διὸ καὶ ὄνομα αὐτῇ παρὰ τῶν νεωτέρων ἀφωσίωται ἐπικυκλοειδής· κύκλυ γὰρ ἐπὶ κύκλον περιεκκυλιομένυ, ἀναφύεται ἡ γραμμὴ αὕτη.*

νίαι Ξ, ι ἔσονται πρὸς τῇ αὐτῆ περιφερείᾳ, ᾗ ὁ κύκλος ἧτος ἴσος ἔσαι κύκλῳ, ᾗ ἀκτὶς ἡ Κβ.

Τὸ τόξον βΒ τῆ ἡμικυκλίῳ ΒβΔ ἴσον ἐσὶ τῷ τόξῳ βΞ τῆ κύκλῳ βΜ· ἡ γὰρ γωνία ΜΚα (ἡ ἐκτὸς τῆ ἰσοσκελῆς τριγώνῳ ΖΜΚ) ἴσον δύναται ταῖς δυσὶ γωνίαις ΜΖΚ, ΖΜΚ· διπλασία ἄρα ἐσὶ τῆς γωνίας ΖΜΚ = ΚΜΞ· ἴση ἄρα ἐσὶ τῇ γωνίᾳ ιΜΞ, ἥτις ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τῆ τόξῳ ιβΞ, ἢ τὸ τόξον ΒΞ· ἀλλ' ἡ γωνία ΜΚα ἔχει μέτρον τὸ τόξον Ββ· ἄρα τὸ τόξον Ββ ἴσον ἐσὶ τῷ τόξῳ βΞ, ᾗ ἑπομένως ἡ καυσικὴ ΒΞΖ ἔσιν ἐπικυκλοειδὴς, ἀπογεννωμένη ἐκ τῆς περιφορᾶς σημείῳ τῆ Ξ κύκλῳ τῆ Μιβ, ὃς περιάγεται ἐπὶ κύκλον ἴσον τὸν ΒβΔ.

173. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ε'ὰν ἀκτὶς φωτὸς ἡ ΑΒ (χ. 41), διήκουσα ἐκ μέσου τῆ Η (*) ἐφ' ἕτερον τὸ πΝβ, ἀντὶ τῆ χωρεῖν τὴν πρώτην φορὰν ΒΚ, ἀποχωρῇ, ἢ προχωρῇ τῇ εὐθείᾳ ΒΝ, τῇ πρὸς ὀρθὰς ἐφισαμένῃ τῇ ἐπιφανείᾳ, ἥτις διακρίνει τὰ δύω μέσα, ἡ ἀκτὶς αὕτη θραυσὴ ἀκέει· ἡνίκα μὲν ἓν προχωρεῖ τῇ καθέτῳ ΒΝ, θραῦσιν πρὸς τῇ καθέτῳ, ἡνίκα δ' ἀφίσαται αὐτῆς, θραῦσιν ἄπο τῆς καθέτου, ὑφίσαθαι λέγεται· ἡ δὲ ὑπὸ νΒΚ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ ταύτης τῆς ἀκτῖνος ᾗ τῆς ΒΝ καθέτου, γωνία θραύσεως· ἔσι δὲ νόμος ἀπαράβατος τῆ ἑτω διϊόντος φωτὸς, ἵνα τὸ ἡμίτονον τῆς κατ' ἐπίπτωσιν γωνίας ΑΒΜ, ἢ τῆς αὐτῇ ἴσης νΒα (ἣν ᾗ αὐτὴν καλέσομεν ἐπιπτώσεως γωνίαν) πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς κατὰ θραῦσιν γωνίας ὑπάρχῃ ἐν λόγῳ ἀ-

---

(*) Α''παν τὸ διάσημα, ὃ δίεισι τὸ φῶς, ὀνομάζομεν Μέσον.

τρέπτω· ὡς εἶναι μα : νΚ :: μ : ν· ὁποία γὰρ ἂν εἴη ἡ τῆς ἐπιπτώσεως γωνία, ἐὰν ἡ φωτὸς ἀκτὶς μεταχωρῇ ἐξ ἀέρος ἐπὶ ὕελον, ὁ λόγος ἕτος ἔσι μικρῷ δεῖν ἴσος τῷ 3 : 2, ϗ ἴσος τῷ 2 : 3, ὅταν ἐξ ὑέλυ μεταβαίνῃ εἰς ἀέρα· ὑποτεθήσεται δ' ἡμῖν ἐν τοῖς ἑφεξῆς ὁ λόγος ἕτος ὡς ἀκριβῶς ἔχων.

Ε'ὰν ἡ θρασὴ ἀκτὶς ΒΚ ἀναστρέψῃ τὴν ἑαυτῆς πορείαν, φημὶ, ὡς αὕτη ὁδεύσει τὴν ΒΑ ὁδὸν, δι' ἧς τὸ πρῶτον ἀφίκετο· ἔσαι γὰρ ν : μ :: νΚ : ΑΜ $= \frac{\mu}{\nu}$ Κν $=$ μα, ὑποτιθεμένης ΒΑ $=$ Βα· ἀλλ' ἔσιν ΑΜ $=$ μα : $\frac{\mu}{\nu}$ νΚ :: μ : ν· ἄρα ΜΑ $=$ $\frac{\mu}{\nu}$ Κν· ἄρα κτ.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ε'ὰν ἀπειράριθμοι ἀκτῖνες ΒΑ, ΒΜ, ἀπὸ σημείυ προβαλλόμεναι ἀκτινοβόλυ τυ Β (χ. 53), ϗ ἐπιπίπτυσαι ἀκτῖνι τῇ ΑΔ, θραύωνται πρὸς τῇ καθέτῳ, ἢ ἄπο τῆς καθέτυ ΜΓ, ὡς τὸ ΓΕ ἡμίτονον τῆς κατ' ἐπίπτωσιν γωνίας ΕΜΓ πρὸς τὸ ΓΘ ἡμίτονον τῆς κατὰ θραῦσιν γωνίας ἀεὶ εἶναι ἐν δεδομένῳ λόγῳ μ : ν, ἡ καμπύλη ΝΖΗ, ἧς ἐπιψαύυσιν αἱ θραυσαὶ ἀκτῖνες, ἢ αἱ αὐτῶν προαγωγαὶ ΑΗ, ΜΖ (χ. 28) ἀκέει καυσικὴ διὰ θραύσεως.

Ε'ὰν ἐπινοηθῇ νῆμα τὸ ΑΗ (χ. 53) ἐξελισσόμενον ἐκ τῆς καυσικῆς ΗΝ, τὸ πέρας Α καταγράψει καμπύλην τὴν ΑΚ, ἧς ἔσαι ἐξειλιγμένη ἡ καυσική· ϗ ἔσαι τὸ τῆς καυσικῆς τόξον ΖΗ σὺν τῇ ἀπτομένῃ ΖΛ ἴσον τῇ εὐθείᾳ ΗΑ· ὑποτεθείσθω ἀπτομένη ἑτέρα τῇ πρώτῃ προσεχεσάτη ἡ Ζμλ, ϗ ἀκτὶς ἑτέρα ἐπιπίπτυσα ἡ Βμ· ϗ κέντροις τοῖς Ζ, Β γεγράφθωσαν τόξα τὰ Μν, Μτ·

ἐκεῖν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα Μτμ, Μνμ ἔσονται ὅμοια τοῖς τριγώνοις ΜΕΓ, ΜΓΘ ἑκατέρῳ ἑκάτερον· ἐὰν γὰρ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΕΜτ, μΜΓ, ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπὸ μΜΕ γωνία, αἱ κατάλοιποι γωνίαι τΜμ, ΕΜΓ ἴσαι ἔσονται· ὡσαύτως, εἰ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΘΜν, ΓΜμ ἀφαιρεθείη ἡ ὑπὸ ΘΜμ γωνία, αἱ κατάλοιποι γωνίαι μΜν, ΘΜΓ ἴσαι ἔσονται· ᾗ δὴ ἔσαι τμ : Μν :: ΓΕ : ΓΘ :: μ : ν· ἀλλὰ τμ ἐσὶν ἡ διαφορὰ τῆς ΑΜ, ᾗ ἡ Μν τῆς ΛΜ· ἄρα (166) ΒΜ — ΒΑ, ἄθροισμα πασῶν τῶν τμ διαφορῶν τῶν ἐν τῷ ΑΜ μέρει τῆς καμπύλης, πρὸς ΜΛ = ΑΗ — ΜΖ — ΖΗ, ἄθροισμα πασῶν τῶν συσοιχισῶν διαφορῶν νμ, ὡς μ : ν· ἄρα μ : ν :: ΒΜ — ΒΑ : (ΑΗ — ΜΖ — ΖΗ) = $\frac{\nu}{\mu}$. (ΒΜ — ΒΑ), ὅθεν ἀποφέρεται ΖΗ = ΑΗ — ΜΖ + $\frac{\nu}{\mu}$. ΒΑ — $\frac{\nu}{\mu}$. ΒΜ.

Παντοῖαί εἰσι περιπτώσεις, ὡς ἂν εἴη ἡ ἐπιπίπτουσα ἀκτὶς ΒΑ μείζων ἢ ἐλάσσων τῆς ΒΜ, ᾗ ἡ θραυσὴ ἀκτὶς ΑΗ ἐνελίσσηται, ἢ ἐξελίσσηται τῷ τόξῳ ΗΖ· εὑρεθήσεται μέντοι ἀεὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιπιπτουσῶν ἀκτίνων ἴσα πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν θραυσῶν ἀκτίνων, συναπτομένῳ μιᾷ αὐτῶν τῷ τῆς καυσικῆς τόξῳ, τῷ ἐξελιχθέντος πρὶν ἢ θατέρᾳ ἐπιπεσεῖν, ὥσπερ μ : ν· ἔτω φέρε (χ. 28) ΒΑ — ΒΜ : ΑΗ — ΜΖ — ΖΗ :: μ : ν (*)· ὅθεν εὐπετῶς ἀποφέρεται ἡ ἐξίσωσις ΖΗ = ΑΗ — ΜΖ + $\frac{\nu}{\mu}$. ΒΜ — $\frac{\nu}{\mu}$ ΒΑ· ἐὰν δὲ, κέτρῳ μὲν τῷ Β, δια-

(*) Ἐνταῦθα ἡ ΜΖ ἐξελίσσει τὸ τόξον ΖΗ, πρὶν ἢ ἐπιπέσῃ τῇ ΑΗ.

σήματι δὲ τῷ ΒΑ (κ. 27), γραφῇ τόξον τὸ ΑΠ, ΠΜ ἔσαι ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιπιπτουσῶν ἀκτίνων ΒΜ, ΒΑ· τῷ δὲ σημείῳ Β ἀπείρως ἀφεσῶτος τῷ τόξῳ ΑΜ, αἱ μὲν εὐθεῖαι ΒΑ, ΒΜ ὡς παράλληλοι ἐκληφθήσονται, τὸ δὲ ΠΑ τόξον ὡς γραμμὴ εὐθεῖα, κάθετος ταῖς ἐπιπιπτούσαις ἀκτῖσι· καὶ δὴ ἔσαι $ZH = AH - MZ - \frac{\nu}{\mu}\,\Pi M$.

174. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Δοθέντων τῆς καμπύλης ΑΔ, καὶ τοῦ ἀκτινοβόλου σημείου Β, καὶ τῆς ἐπιπιπτούσης ἀκτῖνος ΒΜ, εὑρεῖν ἐπὶ τῆς θραυσῆς ἀκτῖνος ΜΖ τὸ σημεῖον Ζ, καθ' ὃ ἐπιψαύει τῆς καυστικῆς (κ. 53).

ΛΥΣΙΣ. Εὑρεθήτω διάτινος τῶν προαποδεδομένων τύπων ἡ ΜΓ ἀκτὶς τῆς κατὰ τὸ Μ ἐξειλιγμένης, καὶ εἰλήφθω ἀπειροστὸν τὸ τόξον Μμ, καὶ ἤχθω ἡ εὐθεῖα Γμ, καὶ ἐξάφθωσαν κάθετοι ταῖς τε ἐπιπιπτούσαις καὶ ταῖς θραυσαῖς ἀκτῖσιν αἱ ΓΕ, Γε, ΓΘ, ΓΘ· ἤχθωσαν δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ δοθεῖσαι ΒΜ = υ, καὶ ΜΕ = α, καὶ ΜΘ = β, καὶ γεγράφθω τὸ τόξον Μτ = δχ· τούτου τεθέντος, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΜΕΓ, ΜΡμ, καὶ ΜΘΓ, μνμ, καὶ ΒΜτ, ΒΞε, πρόεισι ΜΕ = α : ΜΘ = β :: Μτ = δχ : Μν = $\frac{\beta\delta\chi}{\alpha}$, καὶ ΒΜ = υ : ΒΞ = ΒΕ (*) = υ + α :: Μτ = δχ : Ξε = $\frac{\delta\chi\cdot(\alpha+\upsilon)}{\upsilon}$. ἀλλὰ, διὰ τὸν τῆς θραύσεως νόμον, ἔσι Γε : ΓΘ :: ΓΕ : ΓΘ :: μ : ν· ἄρα (διαιρέσει) Γε — ΓΕ = Ξε : ΓΘ — ΓΘ = ΣΘ :: μ : ν, ἢ μ : ν ::

(*) Αὗται γὰρ αἱ εὐθεῖαι ἑδενὶ ἀλλ' ἢ ποσότητι ἀπειροστῇ τῇ ΞΕ διαφέρεσιν ἀλλήλων.

$\Xi\varepsilon = \frac{\delta\chi \cdot (\alpha + \upsilon)}{\upsilon} : \Sigma\vartheta = \frac{\alpha\nu\delta\chi + \nu\upsilon\delta\chi}{\mu\upsilon}$. ἔσι δὲ ϗ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ZMν, ZΣϑ, Mν : Σϑ :: MZ : ZΣ, ἢ (διαιρέσει) $\mathrm{M}\nu - \Sigma\vartheta = \frac{(\beta\mu\upsilon\delta\chi - \alpha\nu\upsilon\delta\chi - \alpha\alpha\nu\delta\chi)}{\alpha\mu\upsilon}$: $\mathrm{M}\nu = \frac{\beta\delta\chi}{\alpha}$ :: MΣ = MΘ = β : MZ = $\frac{\beta\beta\mu\upsilon}{\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon - \alpha\alpha\nu}$, ὅθεν προκύπτει ἡ ἐφεξῆς κατασκευή.

Γενέσθω ἐπὶ τὰ πρὸς τὴν ΓM (χ. 55) ἡ γωνία ΕΓΗ = ΜΓΘ, ϗ εἰλήφθω ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ σημεῖον B ἡ γραμμὴ $\mathrm{MT} = \frac{\alpha\alpha}{\upsilon}$. ἐὰν ἓν γένηται HT : HE :: MΘ : MZ (Υ), τὸ σημεῖον Z ἔσαι ἐν τῇ διὰ θραύσεως κάυσικῇ· ἐκ γὰρ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΘM, ΓEH πρόεισι ΓΘ : ΓE :: MΘ = β : EH· ἀλλὰ ΓΘ : ΓE :: ν : μ :: $\mathrm{EH} = \frac{\beta\mu}{\nu}$. ἄρα $\mathrm{HE} - \mathrm{ME} = \mathrm{HM} = \frac{\beta\mu - \alpha\nu}{\alpha}$, ϗ $\mathrm{HM} - \mathrm{MT} = \mathrm{HT} = \frac{\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon - \alpha\alpha\nu}{\nu\upsilon}$. ἄρα ἀνατιθαμένων ἐν τῇ ἀναλογίᾳ Υ τῶν ἀναλυτικῶν δυνάμεων τῶν τριῶν ὅρων, πορισθήσεται $\frac{\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon - \alpha\alpha\nu}{\nu\upsilon}$: $\frac{\beta\mu}{\nu}$ :: β : $\mathrm{MZ} = \frac{\beta\beta\mu\upsilon}{\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon - \alpha\alpha\nu}$. τῆς δὲ κατὰ τὴν HT δυνάμεως λειπτικῆς ἴσης, δῆλον, ὅτι ἔσαι ϗ ἡ τῆς MZ· ἄρα τὸ M σημεῖον πεσεῖται μεταξὺ τῶν σημείων Θ, Z, ὅταν εὑρεθῇ τὸ H μεταξὺ T ϗ E.

Ἐὰν ἡ καμπύλη κοίλη ἦ πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ ἀκτινοβόλον σημεῖον B (χ. 54), υ γενήσεται λειπτικὸν, ϗ ἔσαι

$MZ = \frac{-\beta\beta\mu\upsilon}{-\beta\mu\upsilon+\alpha\nu\upsilon-\alpha\alpha\nu} = \frac{\beta\beta\mu\upsilon}{\beta\mu\upsilon-\alpha\nu\upsilon+\alpha\alpha\nu}$ · ἡ δὲ κατασκευὴ ἡ αὐτὴ ἔσεται· ἐὰν δὲ υ ὑποτεθῇ ἄπειρον, εἴτ' ὢν παράλληλοι αἱ ἐπιπίπτουσαι ἀκτῖνες, πορισθήσεται $MZ = \frac{\beta\beta\mu\upsilon}{\beta\mu\upsilon-\alpha\nu\upsilon} = \frac{\beta\beta\mu}{\beta\mu-\alpha\nu}$· ἔσαι δὲ καὶ (κ. 55) $MT = \frac{\alpha\alpha}{\upsilon} = o$· ἐν ἄρα ταύτῃ τῇ περιπτώσει γενήσεται $HM : HE :: M\Theta : MZ$, ἐὰν AM ὑποτεθῇ τόξον κύκλου, οὗ ἄπειρος ἡ ἀκτὶς, ἢ ἐὰν AM ὑποτεθῇ γραμμὴ εὐθεῖα, τηνικαῦτα MΓ ἔσαι ἄπειρος, ᾗ ME = α, ᾗ MΘ = β· ἄρα ἡ ποσότης $\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon$, παραβαλλομένη τῇ ααν, ἐξισωθήσεται, ᾗ ἔσαι $MZ = \frac{\beta\beta\mu\upsilon}{\mp\alpha\alpha\nu}$ (τοῦ μὲν — ἀπονεμομένου τῷ 55 κήμ. τοῦ δὲ + τῷ 54), ᾗ γενομένου $HT = \frac{\alpha\alpha}{\upsilon}$, ἡ κατασκευὴ ἔσεται ἡ αὐτή.

175. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τοῦ λόγου, ὃν ἔχει τὸ τῆς ἐπιπτώσεως ἡμίτονον πρὸς τὸ τῆς θραύσεως, μὴ ὄντος τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ πάντων τῶν διαφανῶν σωμάτων, πρὶν ἢ ζητῆσαι τὴν καυσικὴν, ἀνάγκη γνῶναι τὸν λόγον μ : ν, ἐπὶ τῆς ὕλης, ἐξ ἧς σύγκειται ἡ καμπύλη, ἧς ζητεῖται ἡ καυσική.

176. Ε'ὰν μ ἄπειρον ᾖ ὡς πρὸς τὸ ν, ἡ θραυσὴ ἀκτὶς MZ πεσεῖται ἐπὶ τῆς ΓM καθέτου, ἡ δὲ διὰ θραύσεως καυσικὴ γενήσεται ἐξειλιγμένη· τηνικαῦτα γὰρ εὑρεθήσεται $MZ = \beta$, ἥτις ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει γίνεται = MΓ.

Ε'ὰν ἡ ἐπιπίπτουσα ἀκτὶς (χ. 54) ΒΑ κάθετος ἦ τῇ καμπύλῃ, τηνικαῦτα αἱ γραμμαὶ ΜΕ, ΜΘ γενήσονται ἴσαι ϗ ἀλλήλαις, ϗ τῇ ἀκτῖνι ΜΓ· τηνικαῦτα ἄρα α = β· ϗ ὑποτιθεμένων τῶν τεταγμένων υ παραλλήλων, πορισθήσεται $MZ = \frac{\beta\beta\mu\upsilon}{\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon} = \frac{\beta\mu}{\mu - \alpha}$.

177. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ε"σω ἡ καμπύλη ΑΔ (χ. 56) τεταρτημόριον κύκλου, οὗ κέντρον ἔσω τὸ Κ, ϗ αἱ ἐπιπίπτουσαι ἀκτῖνες παράλληλοι ϗ κάθετοι τῇ ΔΚ, ὑποτεθείσθω δὲ ϗ μ : ν :: 3 : 2· τέτων τεθέντων, εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα ΜΖ τῆς καυσικῆς.

Ε'πεὶ πᾶσαι αἱ κυκλικαὶ ἀκτῖνες κατὰ τὸ κέντρον συνίασι, τὸ σημεῖον Κ ἔσαι τοῦ κύκλου ἡ ἐνειλιγμένη· ἐὰν ἄρα γραφῇ ἡμικύκλιον τὸ ΚΕΜ, οὗ ἡ διάμετρος ΚΜ εἴη ἴση τῇ ἀκτῖνι ΚΔ, ϗ γένηται 3 : 2 :: ΚΕ : ΚΘ, ἦ ΚΘ = $\frac{2}{3}$ ΚΕ, ἡ ἀδιόριστος ΜΘ ἔσαι ἡ ζητουμένη ἀκτὶς, ἡ δὲ ΜΖ διορισθήσεται, ὥσπερ ἀνωτέρω δέδεικται.

Ι"να εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Η, καθ' ὃ ἡ ἐπιπίπτουσα ἀκτὶς ΒΑ (προαχθεῖσα) πρὸς ὀρθὰς τῷ κυκλικῷ τεταρτημορίῳ ἐπιψαύει τῆς καυσικῆς, εἰλήφθω ὁ τύπος $\frac{\beta\mu}{\mu - \nu}$, ὅστις γίνεται $\frac{3\beta}{3 - 2} = 3\beta = 3$ΑΚ.

Ε'ὰν γραφῇ ἡμικύκλιον τὸ ΔΝΚ, οὗ διάμετρος εἴη ἡ ΚΔ, ϗ γένηται ΚΝ = $\frac{2}{3}$ ΚΔ, τὸ Ν σημεῖον ἔσαι ἐν τῇ καυσικῇ· ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀκτὶς ΒΔ ἐπιψαύει τῆς καμπύλης κατὰ τὸ Δ, ἔσαι ΜΕ (χ. 29) = α = ο· ἄρα

$MZ = \frac{\beta\beta\mu\upsilon}{\beta\mu\upsilon - \alpha\nu\upsilon - \alpha\alpha\nu}$ γίνεται = $\frac{\beta\beta\mu\upsilon}{\beta\mu\upsilon}$ = β = ΜΘ· ἄρα κτ.

Τὸ τόξον ΖΗ (χ. 30) ἔσιν = ΑΗ — ΜΖ — $\frac{2}{5}$ ΠΜ, ἡ δὲ ὅλη καυσικὴ ΗΝ = 3β — ΔΝ — $\frac{2}{3}$ ΑΚ = 3β — $\frac{2}{3}$ β — ΔΝ = $\frac{7}{3}$ β — ΔΝ· ἀλλὰ ΚΝ = $\frac{2}{3}$ ΚΔ = $\frac{2}{3}$ β· καὶ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΝΔ δίδωσι

$\Delta N^2 = \beta^2 - \frac{4}{9}\beta^2 = \frac{5}{9}\beta^2$, ἢ $\Delta N = \frac{\beta\sqrt{5}}{3}$· ἄρα ΗΝ

$= \frac{\beta.(7-\sqrt{5})}{3}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τῶν σημείων τῆς καμπῆς καὶ τῆς ἀνακάμψεως.

178. Τὸ σημεῖον Δ, καθ' ὃ ἡ καμπύλη ἐκ κοίλης γίνεται κυρτὴ, ἢ τἀναντίον (χ. 57, 58), σημεῖον καμπῆς ὀνομάζεται· ἐὰν δὲ ἡ καμπύλη μΔΜ (χ. 33, 34), ἐκ τοῦ μ ἐπὶ τὸ Δ φθάσασα, τρέψῃ τὴν ὁδὸν αὐτῆς πρὸς τὸ Μ, τὸ Δ ἀκέει σημεῖον ἀνακάμψεως· ἐὰν ἓν ἀναμνηθῶμεν τῶν εἰρημένων (83, 84) περὶ τῶν μεγίσων καὶ ἐλαχίσων, ῥᾳδίως καταυοήσομεν, ὅτι ὁ τοῦ δυ πρὸς δχ λόγος, εἴτ' ἓν $\frac{\delta u}{\delta x}$ ἔσι πάντως ἐλάχισον (χ. 51) πρὸς τῷ τῆς καμπῆς σημείῳ (ἔσι δὲ αὐτὸ τοῦτο ἓν τὸ $\frac{\delta\delta u}{\delta x^2}$)· κατὰ γὰρ τὰ ἐκεῖθι εἰρημένα αἱ δυ, μειοῦνται μὲν ἐν τοῖς κοίλοις ἀπὸ τοῦ Α μέχρι τοῦ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ αὔξεσιν ἐν τοῖς κυρτοῖς· τἀναντίον δὲ ἐπὶ τοῦ 32 χήμ.

ἄρα ἐν τῇ περιπτώσει σημείῳ καμπῆς ὁ λόγος $\frac{\delta v}{\delta \chi}$, αὔξει μὲν μέχρι τοῦ Δ, ἀπομειοῦται δ' ἀπὸ τοῦ Δ, ἢ κ' τἐναντίον· ἄρα πρὸς τῷ Δ ἀναφυήσεται μέγιστον, ἢ ἐλάχιστον· τὸ δ' ἀπειροστὸν ἔσαι $\frac{\delta\delta v}{\delta \chi}$ (ἀτρέπτου ὑποτιθεμένου τοῦ $\delta\chi$) $= 0$, ἢ $= \infty$· ἄρα κ' $\frac{\delta\delta v}{\delta \chi^2} = 0$, ἢ $= \infty$· αὐτὸ δὲ τοῦτο ἔσεται κ' ἐπὶ τοῦ Δ σημείου τῆς ἀνακάμψεως (χ. 59, 60)· εἰς ἄρα εὕρεσιν τῶν σημείων τῆς καμπῆς κ' τῆς ἀνακάμψεως ἐν καμπύλαις, ὧν εἰσιν αἱ τεταγμέναι παράλληλοι, ἀπόχρη ὑποθέσθαι $\frac{\delta\delta v}{\delta \chi^2} = 0$, ἢ $= \infty$, ἢ ὁ ταὐτὸν, $\delta\delta v = 0$, ἢ $= \infty$ (*).

179. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εὐπετῶς κατανοεῖται, ὡς ἀχθείσης τῆς ἁπτομένης μΔι, κ' ὑποτεθείσης μν $= \Delta\Sigma$, κ' ἐπιζευχθείσης τῆς Σιρ (χ. 57), ἢ τῆς Σι (χ. 58), ἐκ τῶν ὁμοίων κ' ἴσων τριγώνων μΔν, ΔΣι ἔσαι Σι $=$ Δν· ἄρα Σρ $>$ Σι $=$ Δν (χ. 31)· ἀλλὰ Σρ $<$ Δν (χ. 58)· ἄρα αἱ δυ, προϊοῦσαι ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Δ, ἀπομειοῦνται, αὔξουσι δὲ ἀπὸ τοῦ Δ μέχρι τοῦ Μ (χ. 57)· τἐναντίον δὲ γίνεται ἐν τῷ 32 χήματι· ἄρα ὁ λόγος

(*) Οὐχ' ὅτι $\delta\delta v$ πραγματικῶς ἀποκαθίσαται $= \infty$, ἀλλ' ὅτι ἐκ ταύτης τῆς ὑποθέσεως τὸ αὐτὸ ἀποτελεῖται, ὃ $\frac{\delta\delta v}{\delta \chi^2} = \infty$, ὡς μικρὸν ἐπισήσασι ταῖς δυνάμεσι τοῦ $\delta\delta v$, ἐν τοῖς ἑφεξῆς ὑποδείγμασι, κατάδηλον γίνεται.

$\frac{\delta v}{\delta x}$ ἔσι μέγισον ἢ ἐλάχισον πρὸς τῷ Δ, ὥσπερ προείρηται.

180. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Εὑρεῖν τὸ σημεῖον τῆς καμπῆς Δ ἐν τῇ καμπύλῃ ΑΝ (χ. 61), ἧς ἐξίσωσίς ἐσιν $\alpha x^2 = v(\alpha\alpha + xx)$.

ΛΥΣΙΣ. Ἔσω ΑΓ = χ, καὶ ΑΒ = α, καὶ ΓΔ = $v = \frac{\alpha x^2}{\alpha\alpha + xx}$. ἄρα $\delta v = \frac{2\alpha^3 x\delta x + 2\alpha x^3\delta x - 2\alpha x^3\delta x}{(\alpha\alpha + xx)^2}$

$= \frac{2\alpha^3 x\delta x}{(\alpha\alpha + xx)^2}$, καὶ $\delta\delta v =$

$\frac{2\alpha^3\delta x^2(\alpha\alpha + xx)^2 - 4.\alpha^3 x\delta x.2x\delta x.(\alpha^2 + x^2)}{(\alpha\alpha + xx)^4}$,

(ὑποτιθεμένου ἀτρέπτου τοῦ δχ) =

$\frac{(2\alpha^7 - 4\alpha^5 x^2 - 6\alpha^3 x^4).\delta x^2}{(\alpha\alpha + xx)^4} = 0$. πολλαπλασιασμῷ δὲ διὰ τοῦ παρονομαςοῦ, καὶ διαιρέσει διὰ $\alpha^3\delta x^3$, προέρχεται $2\alpha^4 - 4\alpha^2 x^2 - 6x^2 = 0$. διαιρέσει δὲ διὰ $\alpha^2 + x^2$, εὑρίσκεται $2\alpha^2 - 6x^2 = 0$, ἢ $x^2 = \frac{2}{6}\alpha^2 = \frac{1}{3}\alpha^2$, καὶ $x = \sqrt{(\frac{1}{3}\alpha^2)}$. λαμβανομένης ἄρα τῆς ΑΓ μέσης ἀναλόγου τῶν α, $\frac{1}{3}\alpha$, ἡ τεταγμένη ΓΔ συναντήσει τῇ καμπύλῃ κατὰ τὸ ζητούμενον σημεῖον.

181. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν τὸ τῆς καμπῆς σημεῖον Δ ἐν καμπύλῃ τῇ ΑΔ, ἧς αἱ τεταγμέναι τρίται εἰσὶν ἀνάλογον τῶν ἐπὶ τοῦ ἡμικυκλίου ΑΜΒ, καὶ τῶν ἐπὶ τῆς παραβολῆς Αμ τεταγμένων (χ. 62).

ΛΥΣΙΣ. Ἔσω τοῦ κύκλου ἡ διάμετρος = α, καὶ ἡ ἀποτετμημένη ΑΓ = χ, καὶ ἡ τοῦ κύκλου τεταγμένη ΓΜ = τ, καὶ ἡ τῆς παραβολῆς τεταγμένη Γμ = υ, καὶ ἡ τε

ταγμένη τῆς προτεθείσης καμπύλης ΓΔ = ω· ἀκῶν ἔστι $\tau : \upsilon :: \upsilon : \omega = \frac{\upsilon\upsilon}{\tau}$· τιθεμένης δὲ τῆς παραβολικῆς παραμέτρου = π, ἔσαι $\upsilon^2 = \pi\chi$, ἡ διὰ τὴν κυκλικὴν ἰδιότητα, $\tau = \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$· ἀντικαθισαμένων ἄρα τούτων τῶν δυνάμεων, γίνεται $\omega = \frac{\pi\chi}{\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}$· ὅθεν $\delta\omega = \frac{\alpha\pi\chi\delta\chi}{2.(\alpha\chi - \chi\chi).\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}$· λαμβανομένων δὲ ἡ τῶν δευτέρων ἀπειροστῶν, ὑποτιθεμένου ἀτρέπτου τοῦ δχ, πορισθήσεται (διαιρέσει διὰ δχ, ἡ πολλαπλασιασμῷ ἐπὶ $\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$, ἡ τοῦ κλάσματος ἀφανισμῷ) $\delta\delta\omega = 0 = 2\alpha\pi(\alpha\chi - \chi\chi)^2 - 3\alpha\pi\chi(\alpha - 2\chi).(\alpha\chi - \chi\chi)$· διαιρέσει δὲ διὰ $(\alpha\chi - \chi\chi)$ ἡ μεταθέσει, πορισθήσεται $2\alpha^2\pi\chi - 2\alpha\pi\chi^2 = 3\alpha\alpha\pi\chi - 6\alpha\pi\chi^2$, ἢ $2\alpha - 2\chi = 3\alpha - 6\chi$· ὅθεν $4\chi = \alpha$, ἡ $\chi = \frac{1}{4}\alpha$· ἐὰν ἄρα γένηται $\text{ΑΓ} = \frac{\text{ΑΒ}}{4}$, ἡ τεταγμένη ΓΔ συναντήσει τῇ καμπύλῃ κατὰ τὸ τῆς καμπῆς σημεῖον.

182. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Εὑρεῖν τὸ τῆς ἀνακάμψεως σημεῖον ἐν καμπύλῃ τῇ μΔΜ, ἧς ἐξίσωσίς ἐστιν $\upsilon^5 = \alpha\chi^4 = \chi^4$, ὑποτιθεμένου τοῦ $\alpha = 1$ (χ. 62. Α).

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΑΠ = χ, ἡ ΠΜ = υ· ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ἔσαι $5\upsilon^4\delta\upsilon = 4\chi^3\delta\chi$, ἡ $\delta\upsilon = \frac{4}{5} \times \frac{\chi^3\delta\chi}{\upsilon^4}$

$= \frac{4}{5}\delta\chi\left(\frac{\chi^3}{\chi^{\frac{16}{5}}}\right)$ (*)· ἀφαιρουμένου ἄρα τοῦ κατὰ τὸν

(*) Καὶ γὰρ $\upsilon = \chi^{\frac{4}{5}}$, $\upsilon^4 = \chi^{\frac{16}{5}}$.

διαιρέτην δείκτη $\frac{16}{5}$ ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν διαιρετέον $3 = \frac{15}{5}$, γίνεται $\delta v = \frac{4}{5} \times \delta\chi \cdot \chi^{-\frac{1}{15}}$, $\delta\delta v = -\frac{4}{75}\delta\chi^2 (\chi)^{-\frac{1}{15}-1}$ (ὑποτιθεμένου ἀτρέπτου τοῦ $\delta\chi$)· ἀλλὰ $-\frac{1}{15} - 1 = -\frac{16}{15}$· ἄρα $\delta\delta v = \left(-\frac{4}{75} \times \frac{1}{\chi^{\frac{16}{15}}}\right) \times \delta\chi^2$· ὑποτιθεμένου ἔν τοῦ $\delta\delta v = 0$, ἐδὲν ὥστε χ γνωσθῆναι πρόεισιν· ἀλλ' εἴπερ γένοιτο $\delta\delta v = \infty$, ποριζεται $\chi = 0$· ὅθεν καθίσαται δῆλον, ὅτι τὸ ζητέμενον σημεῖον συσοιχεῖ τῇ τῶν χ ἀρχῇ A, ἔνθα $A\Pi = 0$· ἀντικαθισαμένης δὲ ταύτης τῆς τοῦ χ δυνάμεως ἐν τῇ τῆς καμπύλης ἐξισώσει, εὑρεθήσεται $v^5 = 0$, ἢ $v = 0$.

183. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἐκτεθεῖσα μέθοδος τυτὶ ἔχει δυσχερὲς, ὅτι ἀ διακρίνεται τὸ τῆς καμπῆς τοῦ τῆς ἀνακάμψεως σημεῖον, ἢ ὅτι ἐξαπατᾷν ἡμᾶς δύναται, ἡγεμένους ἅπαν καμπύλης σημεῖον, εὑρισκόμενον ἐκ τῆς ὑποθέσεως $\delta\delta v = 0$, ἢ $\delta\delta v = \infty$, εἶναι σημεῖον ἀνακάμψεως, ἢ καμπῆς, ὅπερ ἥκιστα ἀληθές· ὑποτιθεμένου γὰρ ἀτρέπτου τοῦ δx, ἀποφέρεται ἐκ τῆς τοῦ κύκλου ἐξισώσεως $vv = 2\alpha\chi - \chi\chi$, $\delta\delta v = \frac{-\alpha\alpha\delta\chi^2}{(2\alpha\chi - \chi\chi)\sqrt{(2\alpha\chi - \chi\chi)}}$· ἐὰν δὲ γένηται $\delta\delta v = \infty$, εὑρεθήσεται ὁ παρονομαστὴς $= 0$, ἢ $2\alpha\chi - \chi\chi = 0$, $2\alpha\chi = \chi\chi$, $2\alpha = \chi$, ὅπερ μόνον ἐνδείκνυσι πρὸς τῷ τῆς διαμέτρου πέρατι τὴν ἁπτομένην ταῖς τεταγμέναις ἴσαν παράλληλον· ἔκαν ἄχρηστον ἔσαι μέθοδον ἀποδοῦναι ἑτέραν.

184. Ὑποθέμεθα (142) μέτρον τῆς κατὰ καμπυ-

λότητα γωνίας ΔΓΛ (χ. 30) = ξ τὸ $\frac{\delta\upsilon\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\sigma^2}$.

ὑποτιθεμένε δὲ ἀτρέπτε τῦ δχ, πορισθήσεται ξ =

$\frac{-\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\sigma^2} = \frac{-\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2}$. ὑποτίθησι δὲ ὁ τύπος ἕτος τὰς τεταγμένας ταῖς ἀποτετμημέναις καθέτες· ἐὰν δὲ αἱ τεταγμέναι ἀφ' ἑνὸς σημείε ἐξίωσι, κλιθείσης Α τῆς κατὰ τὴν ἐνειλιγμένην ἀκτῖνος, πορισθήσεται (150) Α

$= \frac{\upsilon\delta\sigma^3}{\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}$. ἐὰν μέν-

τοι ἡ ΓΞ ὑποτεθῇ εἶναι ἀκτὶς τῆς κατὰ τὸ Γ τῆς καμπύλης ΑΔ διὰ τῆς Ε ἑσίας γεγραμμένης ἐνειλιγμένης (χ. 63), οἱ ὅμοιοι τομεῖς ΓΞΔ, ΔΓΛ παρέξεσι ΓΞ:

$= A : \Gamma\Delta :: \Gamma\Delta : \Delta\Lambda = \frac{\Gamma\Delta^2}{A} =$

$\frac{\delta\chi\delta\sigma^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\upsilon\delta\sigma}$, ἀντικαθισαμένων ἀμέλει τῶν δυνάμεων τῆς ΓΔ = δσ, ᾗ τῆς κατὰ τὴν Α, καὶ γνωσθείσης τῆς $\delta\chi^3 + \delta\chi\delta\upsilon^2$ ἴσης = $\delta\chi(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)$ = $\delta\chi\delta\sigma^2$· νῦν ἓν βελομένοις εὑρεῖν τὴν ξ δύναμιν τῆς ὑπὸ ΔΓΛ γωνίας, ὑποτεθείσης τῆς ἀκτῖνος = 1, γενέσθω ΓΔ = δσ (*) : 1 :: ΔΛ : ξ = $\frac{\Delta\Lambda}{\delta\sigma}$ =

$\frac{\delta\chi.\delta\sigma^2 + \upsilon\delta\upsilon\delta\delta\chi - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\upsilon\delta\sigma^2} = \frac{\delta\chi\delta\sigma^2 - \upsilon\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\upsilon\delta\sigma^2}$,

ἀτρέπτε ὑποτιθεμένε τῦ δχ· τῦ δὲ ξ λειπτικῦ ὄντος, ἡ

(*) Ὑποτίθεται ἡ χορδὴ ΓΔ ἴση τῷ ἑαυτῆς τόξῳ, εἴγε τόξον ἀπειροσὸν ἴσον τῇ αὐτῦ χορδῇ ἐκληφθῆναι δύναται.

καμπύλη κυρτὴ ἔσαι πρὸς τὴν ἐσίαν Ε, ἢ πρὸς τὸν ἄξονα, εἰ διὰ τοῦ ἄξονος γεγραμμένη εἴη ἡ καμπύλη· προσεκτέον μέντοι τὸν νοῦν ταῖς δε ταῖς τοῦ ξ δυνάμεσι· ἐὰν δὲ ἡ καμπύλη διατεθειμένη ἢ ὡς περ ἐν τῷ 64 σχήματι, δῆλον, ὅτι ἡ δύναμις τῆς ξ τὰ αὐτὰ ἕξει σύμβολα πρὸς τοῖς σημείοις μ, Μ ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τοῦ 60 σχήματος· ἀλλ' ἐπὶ τοῦ 65 τὰ τῆς ξ σύμβολα ἔσονται διάφορα.

185. Εἴρηται (139), ὅτι μόνη ἡ κωνικὴ παραβολὴ ἔχει πρὸς τῇ κορυφῇ κυκλικὴν καμπυλότητα· ἀλλὰ γὰρ ζητουμένης τῆς κατὰ τὴν καμπυλότητα ἀκτῖνος παραβολῆς ἡστινοσοῦν, ἣν ἐμφαίνει ἡ ἐξίσωσις $v^{\mu} = x$, τῆς μὲν παραμέτρου ὑποτιθεμένης $= 1$, τοῦ δὲ μ δηλοῦντος ἀριθμὸν ὁντινανοῦν ὁλοχερῆ, ἢ κλασματίαν, διὰ τοῦ τύπου $\frac{\delta\sigma^3}{-\delta x \delta\delta v}$, ἀντικαθισαμένων τῶν δυνάμεων τοῦ δx, καὶ τοῦ $\delta\delta v$, εὑρεθήσεται ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς $A =$

$$\frac{(\mu^2 v^{2\mu-2}+1)\cdot\sqrt{(\mu^2 v^{2\mu-2}+1)}}{(\mu\mu-\mu)\cdot v^{\mu-2}} = \frac{(\mu^2 v^{2\mu-2}+1)^{\frac{3}{2}}}{(\mu\mu-\mu)v^{\mu-2}},$$

ἐὰν δ' ὑποτεθῇ $\mu > 2$ καὶ $v = 0$, εὑρίσκεται $A = \frac{1}{(\mu\mu-\mu)0}$ $= \infty$· ἐὰν δὲ $\mu < 2$, ὁ ἀριθμητὴς γίνεται $\left(\frac{\mu^2}{v^{2-2\mu}}\right)^{\frac{3}{2}}$ (παρορωμένης τῆς 1, ἥτις τηνικαῦτα ἀφανίζεται, εἴγε $v^{2-2\mu}$ γίνεται $= 0$, καὶ $\frac{\mu^2}{v^{2-2\mu}} = \infty$) $= \frac{\mu^3}{v3-3\mu}$· ὑποτιθεμένου δὲ τοῦ $\mu\mu - \mu = \alpha$, καὶ τοῦ ἄρτι εὑρημένου κλάσματος διαιρεθέντος διὰ $\frac{\alpha}{v^{2-\mu}}$, καὶ γενομένου $\frac{\mu^3}{\alpha} = B$,

πρόεισι $B \cdot \frac{v^{2-\mu}}{v^{3-3\mu}} = B \cdot v^{2\mu-1}$, ἀφαιρουμένου τοῦ κατὰ τὸν διαιρέτην δείκτου ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν διαιρετέον· ἐὰν δὲ ἡ $2\mu > 1$, εὑρίσκεται $B \times 0 = 0$· ἐὰν δὲ $2\mu = 1$, εὑρίσκεται $\mu = \frac{1}{2}$, καὶ $v^{\mu} = x$ γίνεται $v^{\frac{1}{2}} = x$, ἢ $v = x^2$· ὅθεν, μεταβαλλομένου, τοῦ μὲν x εἰς v, τοῦ δὲ v εἰς x, γίνεται $v^2 = x$, ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς παραβολῆς, ὑποτιθεμένης τῆς παραμέτρου $= 1$· καὶ δὴ τηνικαῦτα $A = B = -\frac{1}{2}$· τὸ δὲ σύμβολον — δείκνυσιν, ὅτι λητέον ἐπὶ τὴν φιλοῦσαν ἀκτῖνα ἐκ τῶν ἀντιθέτων μερῶν τῆς τῶν x γραμμῆς, ἥτις ἐστὶν ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει γραμμὴ εὐθεῖα, ἁπτομένη τῆς παραβολῆς κατὰ τὴν κορυφήν, ὀρθῆς ὑποτιθεμένης τῆς τῶν συντεταγμένων γωνίας· ἐὰν ἡ $2\mu < 1$, ἢ $\mu > \frac{1}{2}$, γενομένου $2\mu - 1 = \nu$, εὑρίσκεται $A = Bv^{-\nu} = \frac{B}{v^{\nu}} = \frac{B}{0}$ (ὑποτιθεμένου $v = 0$) $= \infty$· ἐὰν δὲ ἡ $\mu = 2$, τηνικαῦτα ὁ ἀριθμητὴς $(\mu^2 v^{2\mu-2} + 1)^{\frac{3}{2}}$ γίνεται $= 1$, ὁ δὲ παρονομαστὴς $= (\mu\mu - \mu)$. $v^0 = \mu\mu - \mu$, ὅτι $v^0 = 1$, καὶ $A = \frac{1}{3}$· ἀδύνατον δὲ ὑποθεῖναι $\mu = 1$· καὶ γὰρ γενήσεται $v = x$, ἐξίσωσις γραμμῆς εὐθείας.

Ἐκ τῶν εἰρημένων ἓν πρόδηλον, ὅτι ἐξαιρουμένης τῆς κωνικῆς, ἡ τῆς καμπυλότητος ἀκτὶς ἔστιν $= 0$, ἢ ἄπειρος (*) πρὸς τῇ κορυφῇ τῶν ἄλλων παραβολῶν· ἔστι δὲ οὐδὲν σημεῖον ἐν κλωνὶ καμπύλης, οὗ ἡ καμπυλότης

(*) Ὑποτιθέμεθα γὰρ ἐνταῦθα πεπερασμένην τῆς κωνικῆς παραβολῆς τὴν παράμετρον.

ἐκ ἂν εἴη ἡ αὐτὴ τῇ πρὸς τῇ κορυφῇ παραβολῆς τινος· πᾶσαι δὲ αἱ παραβολαὶ ἔχουσι πρὸς τῇ ἑαυτῶν κορυφῇ σημεῖον καμπῆς, ἢ σημεῖον ἀνακάμψεως, ἐξαιρουμένης τῆς κωνικῆς· ἄρα πρὸς τῷ σημείῳ τῆς καμπῆς ἡ τῆς ἀνακάμψεως κλωνὸς καμπύλης ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς ἔσιν, ἤτοι $= 0$, ἢ $= \infty$.

186. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἵνα δὲ κρεῖττον κατανοήσωσι τὰ εἰρημένα οἱ πρωτόπειροι, ἔσω καμπύλη ἡ ΜΔμ (χ. 65), ἥτις ἔχει σημεῖον καμπῆς τὸ Δ, καθ' ὃ ἡ φιλοῦσα ἀκτὶς εὕρηται ἄπειρος· δῆλον δ' ἐν, ὅτι ὅσον αἱ φιλοῦσαι ἀκτῖνες ΜΖ, νΖ, ιζ ἐγγὺς γίνονται τοῦ κατὰ τὴν καμπὴν σημείου Δ, τοσούτῳ προσεγγίζουσι τῷ γενέσθαι παράλληλοι· ἡ ἐπείπερ ἀεὶ πρὸς ὀρθὰς ἐφεσήκασι τῇ καμπύλῃ, ἐὰν τὸ τοξίδιον Δι ἐκληφθῇ ὡς γραμμὴ εὐθεῖα, ἡ ἀκτὶς ιζ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἐπιςήσεται, ἡ παράλληλος ἔσεται τῇ εὐθείᾳ ΔΠ, ἥτις ὑποτίθεται κάθετος τῇ Δι· συμπεσεῖν ἄρα ἐδέποτε ἔχουσι, τοῦτ' ἔσιν αἱ φιλοῦσαι ἀκτῖνες ἐδέποτε δύνανται ἐξ ὑπαρκτικῶν λειπτικαὶ γενέσθαι, εἴτ' ἓν μεταςῆναι ἐκ τῶν κοίλων ΜΔ ἐπὶ τὰ κυρτὰ Δμ, εἰ μὴ παράλληλοι γένοιντο· ὡσαύτως ἐδ' ἐκ τῶν κοίλων μΔ μεταβῆναι δύνανται, εἰ μὴ αἱ φιλοῦσαι ἀκτῖνες παράλληλοι γένοιντο τῇ Δπ· ἀλλὰ γὰρ γραμμὴ εὐθεῖα ἡ βΔ ἐν τῇ μαθηματικῇ ἀκριβείᾳ ἐδέποτε ἐκληφθῆναι ἔχει ἀντὶ κυκλικοῦ τόξου (*), ἡ τῆς βζ ἀκτῖνος ὑποτεθείσης

(*) Ἔςιν ὅτε δυνατὸν ὑποθεῖναι τόξον κύκλου ἄπειρον, ἀκτῖνα ἔχοντος γραμμικὴν εὐθεῖαν ἴσην τῇ αὐτοῦ ἁπτομένῃ· δῆλον γὰρ, ὡς ἐὰν ὑποτεθῇ τὸ Δν τόξον πεπερασμένον, ἡ δ' αὐτοῦ ἀκτὶς ἄπειρος, ἡ διαφορὰ τοῦ τόξου καὶ τῆς αὐτοῦ ἁπτομένης Δβ ἀνεπαίσθητος ἔσαι· δυνατὸν ἄρα, ἄνευ ἀπάτης, τὰς γραμμὰς ταύτας ἰσαλλήλους ὑποτίθεσθαι.

σης = ∞ · ἐν ταύτῃ γὰρ τῇ περιπτώσει αἱ τοῖς πέρασι Δ, β ταύτης τῆς γραμμῆς κάθετοι συναντήσονται κατὰ τὸ κέντρον τῦ κύκλυ, ϗ συσήσυσι γωνίαν (ὅσον ἄντις βάλοιτο μικράν), ϗ αἱ γωνίαι τῦ ὑπὸ τῶν δύω ἀκτίνων ϗ τῆ Δβ γράμμῆς συνισαμένυ τριγώνυ δυνήσονται πλεῖν ἢ δύω ὀρθὰς γωνίας· ὅπερ ἀδύνατον· ὠ μὴν ἀλλ' ὐδὲ σρογγύλος ἔσεται ὁ τοιός δε κύκλος· ὑποτιθεμένων ἄρα, Δν τῦ τόξυ, ϗ Δβ τῆς ἀπτομένης, ἀεὶ ἔσαι βραχύτι διάσημα μεταξὺ β ϗ ν, ὅσον ἂν εἴη μεγάλη ἡ τῦ κύκλυ ἀκτίς· ἄρα πρὸς τῷ σημείῳ Δ ὠκ ἔσι κύκλος φιλῶν, ὐδ' ἢν ὑποτεθῇ ἡ τῦ κύκλυ ἀκτὶς = ∞. ἐὰν δὲ αἱ ἀκτῖνες Mζ, νζ προϊῦσαι ἀπομειῶνται (χ. 66), προσπελάζυσαι τῷ Δ, ὥσε τὸ σημεῖον Π, καθ' ὃ ἡ ΔΠ συναντᾷ τῇ ιζ, ἐπιπεσεῖν τῷ σημείῳ Δ, τὸ τόξον οΔν ὠκ ἔσεται κυκλικόν· πῦ γὰρ κείσεται αὐτῦ τὸ κέντρον; ἆρ' ἐν τῷ π, ἢ ἐν τῷ Π; ἀλλ' ὐδὲν μᾶλλον τεθῆναι δύναται ἐν τῷ π, ἢ ἐν τῷ Π· ἐπεὶ δὲ ὐ δυνατὸν κεῖσθαι ἑκατέρωθεν τῆς ἀπτομένης βΔ, δῆλον, ὅτι τὸ τόξον τῦτο ὠκ ἔσι κυκλικὸν (*)· συνάδει δὲ ταῦτα τοῖς εἰρημένοις (139), ὅτι ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ τῶν παραβολῶν καμπυλότης, ἐξαιρυμένης τῆς καμπικῆς, ὠκ ἔσι κυκλική· ὅταν ἓν ἡ φιλῦσα ἀκτὶς, ἡ σημείῳ τινὶ τῆς καμπύλης συσοιχῦσα, ἢ = 0, ἢ = ∞, συνάγειν δεῖ ὡς κατ' ἐκεῖνο τὸ σημεῖον ὑπάρχει καμπὴ, ἢ ἀνάκαμψις· ὐδὲν δὲ ἔσαι σημεῖον καμπῆς, ἢ ἀνακάμψεως, εἴπερ αἱ τοῖς τῦ B, καθ' ὃ A

(*) Εἰ δ' εἴποι τις, ὅτι ἔσιν ἐπὶ τῆς ἀπτομένης, ἀκατανόητον ἐρεῖ· δεῖ γὰρ εἶναι μεταξὺ τῦ κέντρυ ϗ τῆς ἀπτομένης διάσημά τι· ἄλλως γὰρ σημεῖον ἔσαι, ἀλλ' ὐ κύκλος, τὸ ζητῦμενον.

$= o$, ἢ $= \infty$, προσεχέσι σημείοις συσοιχῆσαι Α μὴ εἶεν διαφόρων συμβόλων.

187. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως κλωνὸς καμπύλης, ἧς αἱ τεταγμέναι εἶεν κάθετοι τῶν ἀποτετμημένων γραμμῇ, ἢ, ἧς αἱ τεταγμέναι ἐκπηγάζωσιν ἀφ' ἑσίας, εὑρεῖν αὐτῆς τὰ σημεῖα τῆς ἀνακάμψεως, καὶ τὰ σημεῖα τῆς καμπῆς.

ΛΥΣΙΣ. Ζητηθήτω ἡ Α διάτινος τῶν προαποδεδομένων τύπων, ὡς ἂν ᾖ ἡ καμπύλη γεγραμμένη διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ διὰ τῆς ἑσίας· καὶ ὑποτεθείσθω Α $= o$, εἶτα Α $= \infty$, καὶ ζητηθήτω ὁ χ· ζητηθήτωσαν εἶτα αἱ Α ὡς πρὸς τὰ σημεῖα μ, Μ τὰ προσεχῆ τοῦ εὑρεθέντος σημείου Δ· καὶ εἰ μὲν τὰ κατ' αὐτὰς σύμβολα ταυτίζοιντο, ἠ ἔσαι πρὸς τῷ σημείῳ Δ, ἔτε καμπὴ, ἔτε ἀνάκαμψις· εἰ δὲ διαφέροιεν, ἔσαι ἤτοι καμπὴ, ἢ ἀνάκαμψις· ἵνα δὲ διακριθείη, ὁπότερόν ἐσι, ζητηθήτω ἡ δύναμις τῆς τῷ ξ δηλωθείσης γωνίας πρὸς τοῖς σημείοις μ, Μ· καὶ εἰ μὲν τὰ σύμβολα τῆς ξ ταυτίζοιντο, πορισθήσεται σημεῖον ἀνακάμψεως· διαφερόντων δὲ, καμπῆς· ὄντος δὲ τοῦ τῆς ξ σημείου, τοῦ συσοιχοῦντος τῷ Μ, ὑπαρκτικοῦ, ἡ καμπύλη (χ. 64) ἔσαι, κοίλη μὲν πρὸς τὰ κάτω, κυρτὴ δὲ πρὸς τὰ ἄνω· ἐὰν δὲ τὸ σύμβολον τῆς ξ, τῆς συσοιχούσης τῷ σημείῳ μ (χ. 67), ᾖ λειπτικὸν, τὸ τόξον Δμ ἔσαι, κυρτὸν μὲν πρὸς τὰ κάτω, κοῖλον δὲ πρὸς τὰ ἄνω· τὸ πᾶν εὐξύνετον γίνεται τὸν νοῦν τοῖς προειρημένοις ἐπισήσασι.

188. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Εὑρεῖν τὰ σημεῖα τῆς καμπῆς καὶ τῆς ἀνακάμψεως τοῦ κλωνὸς καμπύλης, ἧς ἐξ-

ἰσωσις $v = \sqrt[3]{(a^3 \pm x^3)}$, ἢ $v^3 = a^3 + x^3$· ἑκατέρα

γὰρ ἐξίσωσις τὸν αὐτὸν κλῶνα ἐμφαίνει· εἷγε μιᾷ ἀποτετμημένη μία μόνη υ συσοιχεῖ. (*)

ΛΥΣΙΣ. Ληφθέντων τῶν ἀπειροσῶν, γίνεται $3v^2\delta v = \chi\chi\delta\chi$, $v^4\delta v^2 = \chi^4\delta\chi^2$, $\delta v^2 = \frac{\chi^4\delta\chi^2}{v^4}$ (Π)· ληφθέντων δὲ τῶν ἀπειροσῶν τῆς ἐξισώσεως $v^2\delta v = \chi\chi\delta\chi$, ὑποτιθεμένου ἀτρέπτου τοῦ $\delta\chi$, προέρχεται $2v\delta v^2 + v^2\delta\delta v = 2\chi\delta\chi^2$, ἢ $v^2\delta\delta v = 2\chi\delta\chi^2 - 2v\delta v^2$, ἢ $v^2\delta\delta v = 2\chi\delta\chi^2 - \frac{2\chi^4\delta\chi^2}{v^3}$, ἀντικατασαθείσης τῆς τοῦ δv^2 δυνάμεως, τῆς ἐκ τῆς ἐξισώσεως Π πορισζομένης· ἀφανιζομένου δὲ τοῦ κλάσματος, εὑρίσκεται $v^5\delta\delta v = 2\chi v^3\delta\chi^2 - 2\chi^4\delta\chi^2$· ἐὰν δὲ ἀντικατασαθῇ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει ἡ τοῦ v^3 δύναμις, πορισζομένη ἐκ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἐξισώσεως, πορισθήσεται $v^5\delta\delta v = 2\alpha^3\chi\delta\chi^2 + 2\chi^4\delta\chi^2 - 2\chi^4\delta\chi^2 = 2\alpha^3\chi\delta\chi^2$, καὶ ἑπομένως $\delta\delta v = \frac{2\alpha^3\chi\delta\chi^2}{v^3}$· εἰλήφθωσαν δὲ, ὅτε τύπος τῆς φιλάσης ἀκτῖνος $\frac{\delta\sigma^3}{-\delta\chi\delta\delta v}$, καὶ ἡ τῆς $\xi = \frac{-\delta\chi\delta\delta v}{\delta\sigma^2}$, οἱ εὑρεθέντες ἐν τῇ αὐτῇ ὑποθέσει·

(*) Εἰ γὰρ εἴη ἐξίσωσις προκειμένη ἡ $v^2 = \alpha^4 + \chi^4$, ἦν ἄν $v = \pm\sqrt{(\alpha^4 + \chi^4)}$· καὶ τηνικαῦτα ἑκάτη μὲν ἀποτετμημένη δύω συνεσοίχουν τεταγμέναι· ἡ δὲ καμπύλη δύω κλῶνας ἂν εἶχε, τὸν μὲν παρισάμενον διὰ τῆς ἐξισώσεως $v = +\sqrt{(\alpha^4 + \chi^4)}$, τὸν δ' ἕτερον διὰ τῆς $v = -\sqrt{(\alpha^4 + \chi^4)}$· καὶ ἰδίᾳ τὰς πράξεις ἐφ' ἑκατέρου κλωνὸς ἐκτελεσθῆναι ἂν ἔδει.

καὶ δὴ πορισθήσεται διὰ τῶν εὑρεθεισῶν δυνάμεων, $\delta\sigma^2 = \delta\chi^2 + \delta\upsilon^2 = \delta\chi^2 + \frac{\chi^4\delta\chi^2}{\upsilon^4} = \frac{(\upsilon^4+\chi^4).\delta\chi^2}{\upsilon^4}$, καὶ $\delta\chi\delta\delta\upsilon = \frac{2\alpha^3\chi\delta\chi^3}{\upsilon^3}$. ἄρα $A = \frac{-\sqrt{(\upsilon^4+\chi^4)}}{2\alpha^3\chi\upsilon}$, καὶ $\xi = \frac{-2\alpha^3\chi\delta\chi}{\upsilon^5+\chi^4\upsilon}$.

Ε'ὰν ὑποτεθῇ $A = o$, ἔσαι $\sqrt{(\upsilon^4+\chi^4)} = o$, ἢ $\upsilon^4 = -\chi^4$, $\upsilon = \pm\sqrt{(-\chi^4)}$, ποσότης ἀνύπαρκτος· ἀδύνατον ἄρα ὑποτεθῆναι $A = o$· ἐκὸν ὑποτεθείσθω $A = \infty$· καὶ δὴ ἔσαι $2\alpha^3\chi\upsilon = o$, ἢ $\chi\upsilon = o$, ἧς ποιητὰι $\chi = o$, καὶ $\upsilon = o$· ἀντικαταξαθείσης δὲ τῆς δυνάμεως τοῦ $\chi = o$ ἐν τῇ τῆς καμπύλης ἐξισώσει, εὑρίσκεται $\upsilon^3 = \alpha^3$, $\upsilon = \alpha$· ἐὰν δὲ ἐν τῇ αὐτῇ ἐξισώσει ἀντικαταξαθῇ ἡ δύναμις τοῦ $\upsilon = o$, εὑρίσκεται $\chi^3 + \alpha^3 = o$, $\chi^3 = -\alpha^3$, $\chi = -\alpha$· ἐξεταξέον ἄρα τὰ σημεῖα, τὰ συσταθέντα, τῇ τε $\chi = o$, καὶ τῇ $\chi = -\alpha$· καὶ ὑπὲρ μὲν τοῦ πρώτου, ὑποτεθείσθω τὸ χ αὐξηθὲν, ἢ μειωθὲν, ποσότητι ἐλαχίστῃ τῇ ζ, τοῦτ' ἔστιν, ὑποτεθείσθω $\chi = o \pm \zeta$, εἴτ' ἓν $\chi = \pm\zeta$· καὶ δὴ ἔσαι $\upsilon^3 = \pm\zeta^3 + \alpha^3$, $\upsilon^3 = \alpha^3$, παρορωμένου τοῦ ζ^3· τοῦτ' ἔστι τὸ σύμβολον τοῦ υ ἀμετάβλητον διαμένει ἐν ταύτῃ τῇ ὑποθέσει· δῆλον δὲ, ὡς εἴπερ ἐν τῇ δυνάμει τῆς $A = \frac{-\sqrt{(\upsilon^4+\chi^4)^3}}{2\alpha^3\chi\upsilon}$ τεθείη α ἀντὶ τοῦ υ, λειπτικὸν μὲν ἔσαι τὸ A, ὑπαρκτικοῦ ὑποτεθέντος τοῦ χ ($\ddot{\eta} = \zeta$), ὑπαρκτικὸν δὲ, ὑποτεθέντος λειπτικοῦ τοῦ χ· ἄρα, καθ' ὃ σημεῖον ἔστι $\chi = o$, ἔσαι καμπὴ, ἢ ἀνάκαμψις· ἵνα δὲ, ὁπότερόν ἐστι, γνῶμεν, ἐξεταξέον

τὴν ζ ποσότητα· ἀλλαμὴν $\xi = \frac{-2\alpha^3\chi\delta\chi}{v^5+v\chi^4}$, λειπτικὸν μὲν γίνεται, ὑποτιθεμένῳ ὑπαρκτικῷ τῷ χ, ὑπαρκτικὸν δὲ, ὑποτιθεμένου τοῦ χ λειπτικοῦ (*)· ἄρα πρὸς τῷ σημείῳ τῷ συσοιχοῦντι τῇ $\chi = o$ ἔσαι, ἤτοι καμπὴ, ἢ ἀνάκαμψις.

Ἐξετάζωσι δὲ τὸ σημειον, καθ' ὃ $\chi = -\alpha$, εἴπερ ἀντικατασαθείη $-\alpha+\zeta$ ἀντὶ χ, ἡ τῆς καμπύλης ἐξίσωσις δίδωσιν $v^3 = \alpha^3 - \alpha^3 + 3\alpha^2\zeta$ (παροραμένων τῶν ἐφάτων τῷ ζ βαθμῶν, ὅτι ζ ἔσιν ἀπειροσὸν) $= 3\alpha^2\zeta$, ἢ $v = \sqrt{(3\alpha^2\zeta)}$· ἐν ταύτῃ ἄρα τῇ περιπτώσει ἔσιν $A = \frac{-\sqrt{(v^4+\chi^4)}}{-2\alpha^4\sqrt[3]{\alpha^2\zeta}}$, παροραμένῳ ἐν τῷ παρονομασῇ τῷ περιέχοντος ζ^2 ὅρῳ· ᾗ ὁ μὲν ἀριθμητὴς τηρήσει ἀεὶ τὸ αὐτὸ σύμβολον, οἱα ἂν ᾖ ἡ τῷ v δύναμις, ὁ δὲ παρονομασὴς γενήσεται ὑπαρκτικὸς, ὑποτιθεμένῳ λειπτικῷ τῷ ζ· ἄρα, καθ' ὃ σημεῖον ἔσι $\chi = -\alpha$, ἔσαι, ἤτοι καμπὴ, ἢ ἀνάκαμψις· ἀλλ' ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἔσι $\xi = \frac{2\alpha^4\delta\chi}{(v^4+\chi^4)\cdot\sqrt[3]{3\alpha^4\zeta}}$, ἢ $\frac{\xi}{\delta\chi} = \frac{2\alpha^4}{(v^4+\chi^4)\sqrt[3]{3\alpha^2\zeta}}$. δῆλον δὲ, ὅτι, ὑπαρκτικῷ μὲν ὑποτεθέντος τῷ ζ, ἔσαι ᾗ ξ ὑπαρκτικόν· λειπτικῷ δὲ, λειπτικόν, τοῦτ' ἔσιν, αὐξηθείσης μὲν τῆς χ ποσότητι ἐλαχίστῃ, εὑρεθήσεται τοῦ ξ ἡ δύναμις ποσότης ὑπαρκτική· ἀυξηθείσης δὲ τῆς χ

(*) Οὐ παρατηρεῖται τὸ δχ, ὅπερ ἐκλαμβάνεται ὡς μὴ τρέπον τὸ σύμβολον, εἴτ' ἓν ὡς ἔχον τὸ σύμβολον +.

ποσότητι ἐλαχίστῃ λειπτικῇ, εὑρεθήσεται πρὸς τῷ σημείῳ (ὃ κληθήτω μ), τῷ συσοιχοῦντι τῇ ὅτως αὐξηθείσῃ χ, δύναμις τοῦ ξ λειπτική· ἔσαι ἄρα ἐπὶ τοῦ σημείου, τοῦ συσοιχοῦντος τῇ χ = — α, καμπὴ, ἀλλ' οὐκ ἀνάκαμψις.

189. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Α'λλ' ἄλις ἔσω καὶ τούτων, κἂν ἢ λίαν βραχέα· τὰ γὰρ περί τε τῶν εἰρημένων σημείων τῆς καμπῆς, καὶ τῆς ἀνακάμψεως, καὶ τῶν ἐν τῷ πρὸ τούτου κεφαλαίῳ περὶ τῶν καυστικῶν καμπύλων, πέλαγος ἀτεχνῶς ἐστιν ἀνεξάντλητον, οἷς ἐφεῖται ἐπ' ἀδείας ἐναχολεῖσθαι μόνοις τοῖς μόνα τὰ Μαθηματικὰ διὰ βίου μελετῶσιν ἠρημένοις· ἡμῖν δὲ καὶ ταῦτα ἱκανὰ παραχεῖν ἔννοιάν τινα τῶν ὑψηλοτέρων τοῦ τῶν ἀπειροσῶν λογισμοῦ ζητημάτων· ἴωμεν δὲ ἤδη ἐπὶ τὴν ἐναντίως τούτῳ βαίνουσαν ἐπισήμην τοῦ τῶν Ο'λοκλήρων καλουμένου λογισμοῦ.

ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΩΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΘΕΩΡΟΥΜΕΝΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΟΣ.

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τῦ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τῶν μίαν ἐχόντων τρεπτὴν ποσότητα ἀπειροςῶν, ὧν τὸ ὁλόκληρον ἔςι Γεωμετρικὸν, καὶ πρῶτον περὶ τῶν μονωνύμων ἀπειροςῶν.

190. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὁ Ὁλοκληρωτικὸς λογισμὸς, ἐναντίως ἔχων τῷ τῶν ἀπειροςῶν, μέθοδός ἐςι, καθ' ἣν, ἀπειροςῷ δοθέντος, πεπερασμένη ποσότης εὑρίσκεται, ἧς ἐςιν ἀπειροςὸν τὸ δοθέν.

191. Δι' αὐτῦ δὲ ποσότης ἀπειροςὴ ὁλοκληρῶσθαι λέγεται τὸ εὑρεῖν πάντων τῶν ἀπειροςῶν τὸ ἄθροισμα (1), ὅπερ ἀποτελεῖ τὴν πεπερασμένην ποσότητα, ἧς ἐςιν ἀπειροςὸν τὸ προτιθέμενον ποσόν.

192. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Οὐδεμία ἐςὶ ποσότης τρεπτὴ γεωμέτρικῶς ἐκκειμένη, ἧς οὐκ ἔςιν εὑρεῖν τὸ ἀπει-

ροσόν· εἰσὶ μέντοι πολυάριθμοι ποσότητες ἀπειροσαὶ (*), ἃς ὁλοκληρῶσαι ἀμήχανον, τὰς μέν, ὡς μὴ παραχθείσας ἐκ λήψεως ἀπειροσῶν· οἷαι αἱ χδυ, χδυ — υδχ κτ· τὰς δὲ, ἅτε μήπω μεθόδῳ τῆς αὐτῶν ὁλοκληρώσεως εὑρεθείσης· εἰσὶ δέ τινες αὐτῶν, ὧν ὐδ' εὑρεθήσεται τυχὸν τῆς ὁλοκληρώσεως μέθοδος.

193. Ποσότης, Γεωμετρικὴ μὲν ἡμῖν ἀκούει, ἧς ἡ δύναμις ἀκριβῶς παρασχεθῆναι δύναται, προϊοῦσα ἐκ πράξεων τοῦτε Συμβολικοῦ λογισμοῦ καὶ τῆς Ἀριθμητικῆς· μὴ Γεωμετρικὴ δὲ, ἧς ἡ δύναμις ἀτελῶς διὰ προσεγγίσεως ἐκτίθεται· οἷοί εἰσιν οἵτε λογάριθμοι, καὶ πολλαὶ ἄλλαι ποσότητες.

194. Εἰς δήλωσιν τοῦ ἀπάσης ἀπειροσῆς ποσότητος ὁλοκλήρου χρησόμεθα τῷ γράμματι Ο, προτιθέντες αὐτὸ τῆς ὁλοκληρωτέας ἀπειροσῆς ποσότητος· ἰσοδυναμήσει δὲ τὸ γράμμα τόδε τῇ λέξει ὁλόκληρον.

195. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ἀπειροσὸν, συνεργοῦτε καὶ δείκτου ἄμοιρον, ὁλοκληρῶσαι.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω δχ, ἢ δυ, τὰ προβαλλόμενα· ἀπολείφθω τοίνυν τὸ δ· καὶ δὴ ἔσαι χ, υ· ἐπεὶ γὰρ δχ, δυ ἐμφαίνει τὰ ἀπειροσὰ μέρη τῶν χ, υ· αὐτὰ ἄρα τὰ περασμένα ποσὰ ἔσαι προδήλως τὰ υ, χ· Ο. Ε. Π.

196. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Ποσότητα, δείκτου εὐμοιροῦσαν, ὁλοκληρῶσαι.

ΛΥΣΙΣ. ά. Ηὐξήσθω μονάδι ὁ τῆς μεταβλητῆς ποσό-

(*) Ποσότητα ἀπειροσὴν ἐκδεχόμεθα ἐνταῦθα, ὐ μόνον τὴν ἐκ λήψεως ἀπειροσῶν ἀποτελεσμένην· ἀλλ' ἐν γένει πᾶσαν ποσότητα, ἢ ἐνυπάρχουσι τὰ ἀπειροσὰ δχ, δυ κτ μιᾶς τρεπτῆς, ἢ καὶ πλειόνων.

τητος δείκτης· β΄. διηρήωω τὸ προτεθὲν ἐπειροσὸν διά τε τοῦ ἄτω γεγονότος δείκτυ, καὶ διὰ τοῦ τῆς τρεπτῆς ἀπειροσοῦ, εἴτ' ἂν διὰ τοῦ γενομένυ ἔκ τε τοῦ νέυ δείκτυ, καὶ τοῦ τῆς τρεπτῆς ποσότητος ἀπειροσοῦ· ὁ δὲ τούτων λόγος ἔσαι συμφανὴς, ἀναπολησαμένοις, ὅτι ἡ τοῦ ὁλοκληρῶν μέθοδος ἔσιν ἀντίστροφος τῆς τοῦ λαμβάνειν τὰ ἀπειροσὰ (190), καὶ ὅπως δείκτυ εὐμοιρέσης τρεπτῆς εὑρίσκονται τὰ ἀπειροσά (12).

Υποδείγματα.

$$\text{O}\,2\chi\delta\chi, \text{ ἢ } \text{O}2\chi^1\delta\chi = \frac{2\chi^{1+1}\delta\chi}{(1+1)\delta\chi} = \frac{2\chi^2\delta\chi}{2\delta\chi} =$$

$$\chi^2 \cdot \text{O}\chi\delta\chi = \frac{\chi^2\delta\chi}{2\delta\chi} = \frac{\chi^2}{2} \cdot \text{καὶ γὰρ } \delta(\chi^2) = 2\chi$$

$\delta\chi$ (12), καὶ $\delta\left(\frac{\chi^2}{2}\right) = \frac{2\chi\delta\chi}{2} = \chi\delta\chi$· ὡσαύτως $\text{O}\,\alpha\chi^{\frac{2}{3}}$

$$\delta\chi = \frac{\alpha\chi^{\frac{2}{3}+1}\delta\chi}{\left(\frac{2}{3}+1\right)\delta\chi} = \frac{\alpha\chi^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}\alpha\chi^{\frac{5}{3}} \cdot \text{ὁμοίως O}\frac{\alpha\delta\chi}{\chi^3},$$

$$\text{εἴτ' ἂν O}\alpha\chi^{-3}\,\delta\chi = \frac{\alpha\chi^{-3+1}\delta\chi}{(-3+1)\delta\chi} = \frac{\alpha\chi^{-2}}{-2} = \frac{-\alpha}{2\chi^2} \cdot$$

ἐν γένει δὲ, τοῦ μ ὑπάρχοντος δείκτυ ὑπαρκτικοῦ ἢ λειπτικοῦ, ὁλοκερῶς, ἢ κεκλασμένυ, $\text{O}\alpha\chi^{\mu}\delta\chi$

$$= \frac{\alpha\chi^{\mu+1}\delta\chi}{(\mu+1)\delta\chi} = \frac{\alpha\chi^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

197. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Μία μόνη ἐξὶ περίπτωσις, καθ' ἣν ἡ γενικὴ αὕτη μέθοδος ταράττει τὰς πρωτοπείρυς, ἀμέλει τοῦ δείκτυ μ ὑπάρχοντος $= -1$. τηνικαῦτα γὰρ τὸ ὁλόκληρον γίνεται $= \frac{\alpha\chi^{-1+1}}{-1+1} = \frac{\alpha\chi^0}{0}$

$\frac{\alpha}{0}$, ποσότης ἀδιόριστος, ἅτε ἄπειρος ἴσα (Συμβολ. Λογ. 539)· ἐν τοῖς ἑφεξῆς μέντοι τὸν τύτυ ἀποδώσομεν λόγον, προσημειῶντες μόνον ἐνταῦθα, ὅτι τὸ προτιθέμενον ἀπειροσὸν $\alpha\chi^{\mu}\delta\chi$, ὃ τηνικαῦτα καθίσαται $\alpha\chi^{-1}\delta\chi$, ἢ $\frac{\alpha\delta\chi}{\chi}$, ἔστιν ἀπειροσὸν λογαρίθμυ τῦ $\alpha\lambda\chi$, ἢ τῦ $\lambda\chi^{\alpha}$, ὡς ἄντις εὐχερῶς γνοίη, τὰ ἀπειροσὰ αὐτῦ λαβών (48).

198. Ε'ὰν τῷ μονωνύμῳ ἀπειροσῷ ῥίζικὸν ἐνυπάρχῃ, θετέον δείκτην κεκλασμένον ἀντὶ τῦ ῥίζικῦ· ἕτως εἰς ὁλοκλήρωσιν τῦ $\alpha\delta\chi\sqrt[3]{\chi^2}$, ὁλοκληρωθήσεται τὸ $\alpha\delta\chi\chi^{\frac{2}{3}}$, ἢ $\alpha\chi^{\frac{2}{3}}\delta\chi$· ὅπερ διὰ τῆς γενικῆς μεθόθυ (196) τελεωθήσεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἴδομεν ἐν τῷ τῶν ἀπειροσῶν λογισμῷ (3), ὅτι οἱ σαθερὰς ποσότητας περιέχοντες ὅροι τῶν ἀπειροσῶν ἀπαλείφονται· ὁλοκληρῦντες ἄρα προσθήσομεν ποσότητα ἀμετάβλητον τῇ τῦ ὁλοκλήρυ ἐνθέσει· αὕτη δὲ ἡ ἄτρεπτος, ὅταν ἄντις βέλοιτο, ἔξει δύναμιν. ὅταν τις μόνον ὁλοκληρῶσαι ἐπιβάληται, τῦτ' ἔστιν εὑρεῖν ποσότητα, ἧς λαβὼν τὸ ἀπειροσὸν, ἀπολήψεται τὸ προτεθὲν ἀπειροσόν· καὶ γὰρ $\frac{\alpha\chi^{\mu+1}}{\mu+1}$ καὶ $\frac{\alpha\chi^{\mu+1}}{\mu+1}+\Gamma$ (τῦ Γ ποσότητα ἄτρεπτον ἡντιναῦν δηλῦντος) ἔξυσιν ἐπίσης ἀπειροσὸν τὸ ποσὸν $\alpha\chi^{\mu}\delta\chi$, ὁποίαν ἄντις ἀπονείμαι τῇ Γ δύναμιν· ἀλλ ὅταν ἐπὶ ζητήματός τινος ἡ ὁλοκλήρωσις τελῆται, τηνικαῦτα ἡ ἀμετά-

τρεπτος ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ζητήματος διοριωθήσεται, ὡς ἐν τοῖς ἑφεξῆς ὀψόμεθα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ ἀπειροςῶν συνεζευγμένων, ὧν ἡ ὁλοκλήρωσις ἐκ τοῦ γενικοῦ κανόνος (196) ἀποτελεῖται.

199. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ὁλοκληρῶσαι ποσότητα, ἥ ἐκ ἐνυπάρχεσι βαθμοὶ πολυωνύμων ποσῶν, ἅτε διαιρέται πολυώνυμοι, πλὴν εἰμὴ εἶεν ποσότητες ἄτρεπτοι.

ΛΥΣΙΣ. Κείωω ὁλοκληρωτέα ἡ ποσότης $\alpha x^3 \delta x + \frac{\beta x^2 \delta x}{\gamma} + \varepsilon \delta x$· ὁλοκληρώωω ἓν ἰδίᾳ ἕκαστος ὅρος ὡς δέδειπται (196)· ᾗ δὴ πορισθήσεται $\frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^3}{3\gamma} + \varepsilon x + \Gamma$· ὡσαύτως τὸ ὁλόκληρον τοῦ $\alpha x^3 \delta x + \frac{\beta \delta x}{x^4}$, εἶτ' οὖν $\alpha x^3 \delta x + \beta x^{-4} \delta x$ ἔστιν $\frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^{-3}}{-3} + \Gamma$, ἢ $\frac{\alpha x^4}{4} - \frac{\beta}{3x^3} + \Gamma$.

200. Ἀλλὰ ᾗ βαθμῶν ἐκ πολυωνύμων τοῖς ἀπειροστοῖς ἐνυπαρχόντων, εἰ μόνον οἱ αὐτῶν δεῖκται ὑπάρχοιεν ἀριθμοὶ ὁλοχερεῖς ὑπαρκτικοί, ᾗ εἰμὴ εὑρίσκοιντο ἐν τῷ παρονομαστῇ, διὰ τῆς γενικῆς αὖ (196) μεθόδου ἡ ὁλοκλήρωσις ἔσεται· τὸ γὰρ $(\alpha + \beta x^2)^3 x \delta x$ ὁλοκληρω-

θήσεται διὰ τῆς εἰρημένης μεθόδου, ἐνεργείᾳ ὑψωθέντος τοῦ $(\alpha+\beta\chi^2)^3$ εἰς τρίτον βαθμὸν, ἐξ γενομένου $\alpha^3+3\alpha^2\beta\chi^2+3\alpha\beta^2\chi^4+\beta^3\chi^6$· ἐπεὶ οὖν $(\alpha+\beta\chi^2)^3\times\delta\chi=\alpha^3\delta\chi+3\alpha^2\beta\chi^2\delta\chi+3\alpha\beta^2\chi^4\delta\chi+\beta^3\chi^6\delta\chi$, ἧς ἡ ὁλοκληρία, καθ' ὅρον γινομένη, ἔστιν $\alpha^3+\frac{3\alpha^2\beta\chi^3}{3}+\frac{3\alpha\beta^2\chi^5}{5}+\frac{\beta^3\chi^7}{7}+\Gamma$.

201. Ἐπεὶ δὲ πᾶσα ποσότης πολυώνυμος εὐχερῶς ὑψοῦται εἰς βαθμὸν δείκτου ὁλοχεροῦς ὑπαρκτικοῦ διὰ τῆς ἀποδοθείσης μεθόδου (Συμβ. Λογ. 106, κτ.) ἐυπετῶς ἄρα ὁλοκληρωθήσεται ποσότης ἅπασα πολυώνυμος, μηδὲν περιέχουσα ἄλλο, ὅτι μὴ βαθμοὺς, ὧν οἱ δείκται εἶεν ἀριθμοὶ ὁλοχερεῖς ὑπαρκτικοί· ἔστω προκειμένου εἰς ὁλοκλήρωσιν τοῦ $\vartheta\chi^3\delta\chi(\alpha+\beta\chi^2)^2+\alpha^2\chi^7\delta\chi(\gamma+\varepsilon\chi^2+\zeta\chi^3)^4$, διὰ τῆς ἀνακλησθείσης μεθόδου ἀναπτυχθήσεται ἡ δύναμις τοῦ $(\alpha+\beta\chi^2)^2$, ἐξ πολλαπλασιασθήσεται ἕκαστος ὅρος αὐτοῦ ἐπὶ $\vartheta\chi^3\delta\chi$, εἶτα ἀναπτυχθήσεται ἡ δύναμις τοῦ $(\gamma+\varepsilon\chi^2+\zeta\chi^3)^4$, ἐξ ἕκαστος αὐτοῦ ὅρος πολλαπλασιασθήσεται ἐπὶ $\alpha^2\chi^7\delta\chi$· τηνικαῦτα ἓν σειρὰ μονωνύμων ὁλοκληρωθήσεται, ὅπερ ἐστὶν ἔργον τῆς εἰρημένης γενικῆς μεθόδου (196).

202. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ἐξαιρετέον μέντοι τὰς ποσότητας, ἐν αἷς δεικτῶν τινων λειπτικῶν ὄντων, συμβαίνει μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν ἐξ τὸν πολλαπλασιασμὸν, τὸν τῆς τρεπτῆς δείκτην ἔντισιν ὅροις ὑπάρχειν — 1· ἀλλὰ γὰρ ὡς εἴρηται (197) τηνικαῦτα λογάριθμοι ὁλοκληρωθήσονται· ἔστω γὰρ $\frac{\alpha\beta\chi}{\chi^3}(+\beta\chi^2)^2$, εἴτ' ἓν $\alpha\chi^{-3}\delta\chi$

$(\alpha+\beta\chi^2)^2$· μεταβεβλήϑω εἰς $\alpha\chi^{-3}\delta\chi\,(\alpha^2+2\alpha\beta\chi^2+\beta^2\chi^4)$, ὅπερ γίνεται $\alpha^3\chi^{-3}\delta\chi+2\alpha^2\beta\chi^{-1}\delta\chi+\alpha\beta^2\chi\delta\chi$, ἧ οἱ μὲν δύω ὅροι $\alpha^3\chi^{-3}\delta\chi+\alpha\beta^2\chi\delta\chi$ ἔ-χουσιν ὁλόκληρον τὸ $\frac{-\alpha^3\chi^{-2}}{2}+\frac{\alpha\beta^2\chi^2}{2}$, ὁ δὲ ὅρος $2\alpha^2\beta\chi^{-1}\delta\chi$, ὁ αὐτὸς ὢν τῷ $2\alpha^2\beta\frac{\delta\chi}{\chi}$, ἔξι λογαριθμικὸν ἀ-πειροστὸν, (48) τῆ $2\alpha^2\beta\lambda\chi$· ὡς τὸ ὁλικὸν ὁλόκληρον εἶναι — $\frac{\alpha^3\chi^{-2}}{2}+\frac{\alpha\beta^2\chi^2}{2}+\alpha^2\beta\lambda\chi+\Gamma$.

203. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ε᾽ὰν ἡ προκειμένη ἀπειρο-σὴ ποσότης περιέχῃ ποσότητα πολυώνυμον, ὑψωμένην εἰς βαθμὸν ὁντιναῦν (ἧ δείκτης εἴη, εἴτε ὁλοχερὴς. εἴτε κλασματίας, εἴτε ὑπαρτικὸς, εἴτε λειπτικὸς) ϰ᾽ ἔτως ὁλοκληρωθήσεται, εἴπερ αἱ τὴν πολυώνυμον πολλαπλασιάζουσαι ποσότητες εἶεν τὸ ἀπειροστὸν τῆς πολλαπλασιαζομένης ποσότητος, ϑεωρυμένης ἄνευ τῆ κατ᾽ αὐτὴν ὁλικῆ δείκτη· ἢ εἰ τὸ ἀπειροστὸν εἴη πεπολλαπλασιασμένον, ἢ διηρημένον δι᾽ ἀριθμῆ ἀτρέπτη· ἐκληπτέον ἦν τηνικαῦτα τὴν πολυώνυμον ποσότητα ὥσπερ μίαν μόνην τρεπτὴν, ϰ᾽ ἐφαρμοσέον αὐτῇ κατὰ λέξιν τὰ εἰρημένα (196)· ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἔξι τὸ $\vartheta\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi)^\pi$, εἴγε τὸ $\vartheta\delta\chi$ ἀ-πειροστόν ἐξι τῆ $\alpha+\beta\chi$, πεπολλαπλασιασμένον ἐπὶ $\frac{\vartheta}{\beta}$, ὅ-περ ἐξὶ ποσὸν ἄτρεπτον· εἰς ἦν τὴν τάτη ὁλοκλήρωσιν γραπτέον $\mathrm{O}\vartheta\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi)^\pi=\frac{\vartheta\delta\chi(\alpha+\beta\chi)^{\pi+1}}{(\pi+1).\delta(\alpha+\beta\chi)}+$ $\Gamma=\frac{\vartheta\delta\chi(\alpha+\beta\chi)^{\pi+1}}{(\pi+1).\beta\delta\chi}+\Gamma=\frac{\vartheta(\alpha+\beta\chi)^{\pi+1}}{(\pi+1).\beta}+$

Γ· ἡ γὰρ ἐὰν ταύτης τῆς ποσότητος ληφθῶσι τὰ ἀπειροσὰ, ἀναδίδοται ϑδχ $(\alpha+\beta\chi)^{\pi}$.

Ὡσαύτως ἐξεταζόμενον τὸ ἀπειροσὸν $\frac{\alpha^2\delta\chi+2\alpha\chi\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi+\chi\chi)}}$, εἴτ' ἂν $(\alpha^2\delta\chi+2\alpha\chi\delta\chi)(\alpha\chi+\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$ ὁλοκληρώσεως εὑρεθήσεται ἐπιδεκτικὸν, εἴγε τὸ $\alpha^2\delta\chi+2\alpha\chi\delta\chi$ τὸ ἀπειροσὸν ἐσι τῆς $\alpha\chi+\chi\chi$, πολλαπλασιαωθὲν ἐπὶ τὸ ἄτρεπτον α· ἐφαρμοζομένω ἄρα τῦ κανόνος, περιωθήσεται $O(\alpha^2\delta\chi+2\alpha\chi\delta\chi)(\alpha\chi+\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}=\frac{(\alpha^2\delta\chi+2\alpha\chi\delta\chi)(\alpha\chi+\chi\chi)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(\alpha\delta\chi+2\chi\delta\chi)}+\Gamma=2\alpha(\alpha\chi+\chi\chi)^{\frac{1}{2}}+\Gamma$· ἐξαίρεσιν δὲ ὑφίσαται ὁ κανὼν (196), ὅταν ὁ δείκτης τῆς πολυωνύμω ποσότητος ᾖ — 1· τηνικαῦτα γὰρ διὰ τῶν λογαρίθμων γενήσεται ἡ ὁλοκλήρωσις, ὡς δὴ καὶ εἴρηται, καὶ ὀψόμεθα ἐφεξῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ ἀπειροσῶν δυωνύμων, γεωμετρικῶς ὁλοκληρεῖσθαι δυναμένων.

204. Ἀπειροσὸν δυώνυμον ὀνομάζομεν, ᾧ ἐνυπάρχει ποσότης πολυώνυμος, βαθμός τις ὑπάρχωσα δυωνύμωτινός· ἔτω $\vartheta\chi^5\delta\chi(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{3}{5}}$ ἔσιν ἀπειροσὸν δυώνυμον· ὡσαύτως τὸ $\vartheta\chi^{\mu}\delta\chi(\alpha+\beta\chi_{\nu})^{\pi}$, ὅπερ παρισᾶν ἔχει ἅπαν δυώνυμον ἀπειροσὸν, ἐπεὶ διὰ ϑ, α, β, μ, ν, π ἐννοῆσαι δυνάμεθα πάντας τὰς ἀριθμὰς, ὑπαρκτικές τε καὶ λειπτικὰς, πραγματικάς καὶ ἐπιπλάσας.

Καὶ ἐν γένει μὲν τῶ ἅπαν δυώνυμον ἀπειροσὸν ὁλο-

κληρῶσαι ὁ τρόπος εἰσέτι ἄγνωστος· ἐκ δὲ τῶν προῤῥηθέντων δῆλον, ὅτι ὁλοκληρῶν δυνάμεθα δυώνυμον ἀπειροστὸν τὸ $\vartheta\chi^{\mu}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$:

α΄. Ὅταν π ᾖ ἀριθμὸς ὁλοχερὴς ὑπαρκτικὸς ὁστισῶν, ὁποῖοι ἂν ὦσιν οἱ δεῖκται μ, ν (200), ἐξαιρουμένης μόνης τῆς σημειωθείσης (202) περιπτώσεως.

β΄. Ὅταν ὁ δείκτης μ τῆς ἐκτὸς τοῦ δυωνύμου χ ᾖ μονάδι ἐλάττων τοῦ τῆς ἐν τῷ δυωνύμῳ χ δείκτου ν, τοῦτ' ἔστιν ἐν γένει ὁλοκληρῶσαι δυνατὸν τὸ $\vartheta\chi^{\nu-1}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$, ὁποῖοι ἂν ὦσιν οἱ ν, π, πλὴν εἰ μὴ εἴη $\pi=-1$· ᾗ γὰρ $\vartheta\chi^{\nu-1}\delta\chi$ ἀπειροστόν ἐστι τῆς $\alpha+\beta\chi^{\nu}$, πολλαπλασιαθείσης ἐπὶ $\frac{\vartheta}{\nu\beta}$, τοῦτ' ἔστιν ἐπὶ ποσὸν ἄτρεπτον· ἀνάγεται ἄρα εἰς τὴν δειχθεῖσαν (203) περίπτωσιν, καὶ δὴ ὁλοκληρῶται διὰ τοῦ γενικοῦ θεωρήματος, ἐκλαμβανομένης τῆς $\alpha+\beta\chi$ ὡς μιᾶς μόνης ποσότητος.

γ΄. Ὁλοκληρῶσαι δυνάμεθα ἅπαν ἀπειροστὸν δυώνυμον, ἐν ᾧ ὁ τῆς χ τῆς ἐκτὸς τοῦ δυωνύμου δείκτης, μονάδι αὐξηθείς, διαιρέσιμος εἴη ἐπ' ἀκριβὲς διὰ τοῦ δείκτου τῆς ἐντὸς τοῦ δυωνύμου χ, πηλίκον δὲ ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικόν· τηνικαῦτα ἓν ἥτε ὁλοκλήρωσις καὶ ἡ δεῖξις αὐτῆς διαπραχθήσονται, τῆς δυωνύμου ποσότητος (δίχα τοῦ κατ' αὐτὴν ὁλικοῦ δείκτου) μιᾷ μόνῃ τρεπτῇ ποσότητι ἰσωθείσης, καὶ τοῦ προκειμένου ἀπειροστοῦ ἐκτεθέντος διὰ μόνης ταύτης τῆς τρεπτῆς, καὶ ἀτρέπτων ἅμα ποσοτήτων· φανήσεται δὲ τὸ λεγόμενον ἐκ τῶν ἑφεξῆς.

205. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ὁλοκληρῶσαι ἀπειροστὸν τὸ $\vartheta\chi^{3}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{2})^{\frac{4}{5}}$, οὗ ὁ ἐκτὸς τοῦ δυωνύμου τῆς χ

δείκτης, μονάδι αὐξηθεὶς, διαιρέσιμος εἴη διὰ τοῦ δείκτου τῆς ἐντὸς χ, διδοὺς πηλίκον ὁλοχερὲς ὑπαρκτικόν.

ΑΤΣΙΣ. Γενέσθω $\alpha + \beta\chi^2 = \psi$· ὅθεν $\chi^2 = \frac{\psi - \alpha}{\beta}$· ᾧ ἐπεὶ τὸ $\chi^3 \delta\chi$, τὸ τῆς δυωνύμου ποσότητος ἡγούμενον, πρόεισιν ἐκ τῆς λήψεως τοῦ ἀπείρου τῆς χ^4, τετραγώνου ἀπὸ χ^2 (ἐκτὸς τοῦ ἀτρέπτου πολλαπλασιαστοῦ)· τετραγωνιωθήτω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2 = \frac{\psi - \alpha}{\beta}$· ὅθεν ἔσαι $\chi^4 = \left(\frac{\psi - \alpha}{\beta}\right)^2$,

$4\chi^3 \delta\chi = 2\left(\frac{\psi - \alpha}{\beta}\right) \cdot \frac{\delta\psi}{\beta}$, $\chi^3 \delta\chi = \left(\frac{\psi - \alpha}{\beta}\right) \cdot \frac{\delta\psi}{2\beta} = \frac{(\psi - \alpha)\delta\psi}{2\beta^2}$· ἀντικαθισαμένων ἄρα ἀντὶ $\chi^3 \delta\chi$, ᾗ $(\alpha + \beta\chi^2)$ τῶν κατ' αὐτὰς διὰ ψ δυνάμεων ἐν $\vartheta\chi^3 \delta\chi (\alpha + \beta\chi^2)^{\frac{4}{5}}$, εὑρεθήσεται $\frac{\vartheta.(\psi - \alpha)\delta\psi}{2\beta^2} \times \psi^{\frac{4}{5}}$, εἶτ' ἓν $\frac{\vartheta\psi^{\frac{4}{5}+1}\delta\psi}{2\beta^2} - \frac{\vartheta\alpha\psi^{\frac{4}{5}}\delta\psi}{2\beta^2}$· ἄρα $0\vartheta\chi^3 \delta\chi (\alpha + \beta\chi^2)^{\frac{4}{5}}$

$= 0\frac{\vartheta\psi^{\frac{4}{5}+1}\delta\psi}{2\beta^2} - 0\frac{\vartheta\alpha\psi^{\frac{4}{5}}\delta\psi}{2\beta^2} = \frac{\vartheta\psi^{\frac{4}{5}+2}}{(\frac{4}{5}+2)2\beta^2} - \frac{\vartheta\alpha\psi^{\frac{4}{5}+1}}{(\frac{4}{5}+1)2\beta^2} + \Gamma$, εἶτ' ἓν (ἐπεὶ $\frac{\vartheta\psi^{\frac{4}{5}+1}}{2\beta^2}$ κοινός ἐστι πολλαπλασιαστής) $= \frac{\theta\psi^{\frac{4}{5}+1}}{2\beta^2}\left(\frac{\psi}{(\frac{4}{5}+2)} - \frac{\alpha}{\frac{4}{5}+1}\right) + \Gamma = \frac{\vartheta\psi^{\frac{4}{5}+1}}{2\beta^2}\left(\frac{5}{14}\psi - \frac{5}{9}\alpha\right) + \Gamma$· ἀντὶ ψ ἄρα εἰσα-

γαγόντες τὸ $\alpha + \beta\chi$, ἔξομεν $\frac{\vartheta}{2\beta^2}(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{4}{3}+1}$ $[\frac{5}{14}(\alpha+\beta\chi^2)-\frac{5}{9}\alpha]+\Gamma$.

206. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὡσαύτως δὲ διαπραξόμεθα καὶ ἐπὶ πάσης ἄλλης ὁμοίας περιπτώσεως· κείσθω γὰρ $\vartheta\chi^s\delta\chi(\alpha+\beta\chi^3)^{-\frac{2}{3}}$, ὅπερ ἐστὶν ὁλοκληρώσιμον, εἴγε ὁ δείκτης 8, μονάδι αὐξηθεὶς, διαιρεθείη ἂν διὰ τοῦ 3, πηλίκον προβάλλων ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικόν· γενέσθω τοίνυν $\alpha+\beta\chi^3=\psi$, ὅθεν $\chi^3=\frac{\psi-\alpha}{\beta}$, ἢ ἐπεὶ τὸ $\chi^s\delta\chi$, τὸ τοῦ δυωνύμου ποσοῦ ἡγούμενον, πρόεισι (πλὴν τοῦ ἀτρέπτου πολλαπλασιαστοῦ) ἐκ τῆς λήψεως τῶν ἀπειροστῶν τοῦ χ^9, κυβισθήτω ἡ ἐξίσωσις $\chi^3=\frac{\vartheta-\alpha}{\beta}$· ἑκατὸν ἔσαι $\chi^9=(\frac{\psi-\alpha}{\beta})^3$, $9\chi^8\delta\chi=3\cdot(\frac{\psi-\alpha}{\beta})^2\frac{\delta\psi}{\beta}$, ἢ $\chi^8\delta\chi=(\frac{\psi-\alpha}{\beta})^2\frac{\delta\psi}{3\beta}$· τὸ ἄρα ἀπειροστὸν $\vartheta\chi^8\delta\chi(\alpha+\beta\chi^3)^{-\frac{2}{3}}$ τρέψεται εἰς $\vartheta(\frac{\psi-\alpha}{\beta})^2\cdot\frac{\delta\psi}{3\beta}\cdot\psi^{-\frac{2}{3}}$, εἴτ' ἓν (περανθεισῶν τῶν σεσημειωμένων πράξεων, τοῦτ' ἔστι τετραγωνισθέντος τοῦ $\frac{\psi-\alpha}{\beta}$, ἢ πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ $\psi^{-\frac{2}{3}}$) $\frac{\vartheta\psi^{2-\frac{2}{3}}}{3\beta^3}\delta\psi-\frac{2\vartheta\alpha\psi^{1-\frac{2}{3}}\delta\psi}{3\beta^3}+\frac{\vartheta\alpha^2\psi^{-\frac{2}{3}}\delta\psi}{3\beta^3}$, οὗ τὸ ὁλόκληρον ἔστι $\frac{\vartheta\psi^{3-\frac{2}{3}}}{3\beta^3(3-\frac{2}{3})}-\frac{2\vartheta\alpha\psi^{2-\frac{2}{3}}}{3\beta^3(2+\frac{2}{3})}+$

$\frac{\vartheta\alpha^2\psi^{1-\frac{2}{3}}}{3\beta 3\,(1-\frac{2}{3})}+\Gamma$, ὅπερ, διὰ τὸν κοινὸν πολλαπλασια-
σμὸν $\frac{\vartheta}{3\beta 3}\psi^{1-\frac{2}{3}}$, ἀνάγεται εἰς $\frac{\vartheta}{3\beta 3}\psi^{1-\frac{2}{3}}(\frac{\psi^2}{3-\frac{2}{3}}$
$-\frac{2\alpha\psi}{2-\frac{2}{3}}+\frac{\alpha^2}{1-\frac{2}{3}})+\Gamma$, ἢ $\frac{\vartheta}{3\beta^3}\psi^{1-\frac{2}{3}}(\frac{3\psi^2}{7}-\frac{6\alpha\psi}{4}$
$+3\alpha^2)+\Gamma$, ἢ τελευταῖον, ἀντεισαγομένου ἀντὶ ψ τοῦ α
$+\beta\chi^3$, τὸ ὁλόκληρον ἔσαι $\frac{\vartheta}{3\beta 3}(\alpha+\beta\chi^3)^{1-\frac{2}{3}}(\frac{3}{7}(\alpha$
$+\beta\chi^3)^2-\frac{6\alpha}{4}(\alpha+\beta\chi^3)+2\alpha^2)+\Gamma$.

207. δ'. Καὶ δυωνύμου δὲ ἀπειροστῆς ποσότητος μὴ ὄν-
σης ἐν τῇ εἰρημένῃ περιπτώσει, συμβαίνει μέντοι πολλά-
κις ἀνάγεσθαι εἰς ἐκείνην δι' ἁπλῆς τινος προπαρασκευῆς,
δι' ἧς ὁ τῆς ἐν τῷ δυωνύμῳ χ δείκτης, λειπτικὸς μὲν, εἰ
εἴη ὑπαρκτικὸς, ὑπαρκτικὸς δὲ, εἰ λειπτικὸς, γίνε-
ται· πρὸς δὲ τοῦτο, διαιρετέον μὲν τοὺς δύω τοῦ δυωνύμου
ὅρους διὰ τοῦ τῆς χ βαθμοῦ, τοῦ τῷ δυωνύμῳ ἐνυπάρχοντος,
καὶ πολλαπλασιαστέον τὰ ἐκτὸς τοῦ δυωνύμου ἐπὶ τὸν αὐτὸν
βαθμὸν, ἀρθέντα εἰς βαθμὸν ἐμφαινόμενον ὑπὸ τοῦ κατὰ τὸ
δυώνυμον ὁλικοῦ δείκτου· ἔστω γὰρ δυώνυμον τὸ $\vartheta\chi^4\delta\chi$
$(\alpha+\beta\chi^2)^5$· ἵν' ἓν λειπτικὸς γένηται ὁ ἐν τῷ δυωνύμῳ
δείκτης 2 τοῦ χ, διηρήσθω $\alpha+\beta\chi^2$ διὰ χ^2· ὅθεν προ-
κύπτει $\vartheta\chi^4\delta\chi(\frac{\alpha}{\chi^2}+\beta)^5$, εἴτ' ἓν $\vartheta\chi^4\delta\chi(\alpha\chi^{-2}+$
$\beta)^5$· ἀλλ' ἐπεὶ ἡ, δι' ἧς διήρηται, ποσότης χ^2 ἐκλαμβά-
νεται ὡς ἐπηρμένη εἰς βαθμὸν πέμπτον, ὡς ἐμπεριεχλειο-
μένη τῷ τοῦ δυωνύμου ὁλικῷ δείκτῃ 5, εἰς ἀναπλήρωσιν,

πολλαπλασιασέον τὰ ἐκτὸς τῦ δυωνύμυ ἐπὶ $(\chi^2)^5 = \chi^{10}$. ὅθεν γίνεται $\vartheta\chi^{14}\delta\chi\,(\alpha\chi^{-2}+\beta)^5$.

208. Ἐφαρμοζομένης ἓν ταύτης τῆς προπαρασκευῆς, εὑρεθήσονται πλεῖσα δυώνυμα ἀπειροσὰ, τῇ εἰρημένῃ μὲν περιπτώσει ἥκιστα ἐμπεριλαμβανόμενα, ταύτῃ μέντοι καθυπαγόμενα· κείσθω γὰρ φέρε εἰς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\frac{\alpha\alpha\delta\chi}{(\alpha\alpha+\chi\chi)}^{\frac{3}{2}}$, εἴτ' ἓν τὸ $\alpha\alpha\delta\chi\,(\alpha\alpha+\chi\chi)^{-\frac{3}{2}}$· καταφανὲς ἓν, ὅτι ὁ ἐκτὸς τῦ δυωνύμυ δείκτης τῆς χ, τυτέσι 0, αὐξηθεὶς μονάδι, ἡ γενόμενος 1, ἥκ ἂν διαιρεθείη ἀκριβῶς διὰ τῦ ἐντὸς δείκτυ 2 τῆς χ· ἀλλ' ἐπισφαλῶς ἂν ἐντεῦθεν συναχθείη τὴν προτεθεῖσαν ποσότητα ἀνεπίδεκτον ὑπάρχειν ὁλοκληρώσεως· ἐὰν γὰρ λειπτικὸς ὁ ἐντὸς τῦ δυωνύμυ δείκτης τῦ χ γένηται, ἡ ἔκθεσις μεταβάλῃ εἰς $\alpha\alpha\,(\chi^2)^{-\frac{3}{2}}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2+1})^{-\frac{3}{2}}$, ὅπερ ἀνάγεται εἰς $\alpha\alpha\chi^{-3}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2+1})^{\frac{3}{2}}$, δῆλον, ὅτι -3, αὐξηθεὶς μονάδι τυτέσι $-3+1$, εἴτ' ἓν -2, διαιρεθεὶς διὰ τῦ δείκτυ -2 τῆς ἐν τῷ δυωνύμῳ χ, δίδωσι πηλίκον ἀριθμὸν ὁλοχερῆ· τοιγαρῦν γενομένυ $\alpha\alpha\chi^{-2}+1=\psi$, ἐκ τύτυ πορισθήσεται $\chi^{-2}=\frac{\psi-1}{\alpha\alpha}$, ἡ ἐπεὶ $\chi^{-3}\delta\chi$ ἔσι (πλὴν τῦ πολλαπλασιαστῦ) ἀπειροστὸν τῦ χ^{-2}, ληφθέντων τῶν ἀπειροστῶν $-2\chi^{-3}\delta\chi = \frac{\delta\psi}{\alpha\alpha}$· ἐντεῦθεν ἀποφέρεται $\chi^{-3}\delta\chi = \frac{-\delta\psi}{2\alpha\alpha}$· τὸ ἄρα ἀπειροστὸν $\alpha\alpha\chi^{-3}\delta\chi(\alpha\alpha\chi^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$ τρέπεται εἰς $\frac{-\alpha\alpha\cdot\delta\psi}{2\alpha\alpha}\cdot\psi^{\frac{3}{2}}$, εἴτ' ἓν $\frac{-\psi^{-\frac{3}{2}}\delta\psi}{2}$, ἓ τὸ ὁλόκληρόν ἐσι $\frac{-\psi^{1-\frac{3}{2}}}{2\cdot(1-\frac{3}{2})}$

$+\Gamma$, ἢ $\psi^{-\frac{1}{2}}+\Gamma$, ἢ (ἀντικαθισαμένου ἀντὶ ψ τοῦ αὐτῷ ἴσου) $(\alpha\alpha\chi^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}+\Gamma$, εἴτ' ἕν $\frac{1}{\sqrt{(\alpha\alpha\chi^{-2}+1)}}$ $+\Gamma$, ὅπερ ἀνάγεται εἰς $\frac{\chi}{\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)}}+\Gamma$· τὸ ἄρα εἰς ὁλοκλήρωσιν προτεθὲν ἐν τῇ αὐτῇ ϗ αὐτό ἐστι περιπτώσει, ἐν ᾗ ϗ τὰ προειρημένα.

209. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ὁλοκληρῶσαι ἀπειροστὸν δυώνυμον, ἑκατέρῳ ὅρῳ ἔχον ἐγκείμενον τὸ χ.

ΛΥΣΙΣ. Διηρήσθω τὸ δυώνυμον διὰ θατέρου τῶν τῆς χ βαθμῶν· ϗ δὴ λειφθήσεται ἐκ τούτου ἓν μόνον χ· πολλαπλασιαθήτω δὲ ἑκτὸς ἐπὶ τὸν αὐτὸν βαθμὸν, ἐπαρθέντα εἰς βαθμὸν τὸν ἐμφαινόμενον τῷ τοῦ δυωνύμου δείκτῃ, ἵνα γένηται λειπτικὸς ὁ δείκτης (207)· κείσθω εἰς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\frac{\alpha\alpha d\chi}{\chi\sqrt{(\alpha\chi+\chi\chi)}}$, εἴτ' ἕν $\alpha\alpha\chi^{-1}d\chi(\alpha\chi+\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$, ὅπερ μεταβληθήτω εἰς $\alpha\alpha\chi^{-1}(\chi)^{-\frac{1}{2}}d\chi(\alpha+\chi)^{-\frac{1}{2}}$, διαιρεμένου τοῦ δυωνύμου διὰ χ, ϗ πολλαπλασιαζομένου ἑκτὸς ἐπὶ χ ἀρθεῖσαν εἰς βαθμὸν $-\frac{1}{2}$, ὃς ἐστιν ὁ τοῦ δυωνύμου· αὕτη δὲ ἡ ποσότης ἀνάγεται εἰς $\alpha\alpha\chi^{-\frac{3}{2}}d\chi(\alpha+\chi)^{-\frac{1}{2}}$· ἐὰν ἓν αὐτῇ ἐφαρμοσθῇ ὁ κανὼν (205), εὑρεθήσεται ποσότης, ὁλοκληρώσεως ἀνεπίδεκτος· γενομένου δὲ λειπτικοῦ τοῦ ἐν τῷ δυωνύμῳ δείκτου τῆς χ, πορισθήσεται $\alpha\alpha\chi^{-\frac{3}{2}}.(\chi)^{-\frac{1}{2}}d\chi(\alpha\chi^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}$, εἴτ' ἕν $\alpha\alpha\chi^{-2}d\chi(\alpha\chi^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$, ἥτις (205) ὁλοκλήρωσιν ἐπιδέχεται· γενέσθω τοίνυν $\alpha\chi^{-1}+1=\psi$,

ὅθεν προκύψει $\chi^{-1} = \frac{\psi - 1}{\alpha}$, $-\chi^{-2}\delta\chi = \frac{\delta\psi}{\alpha}$, $\chi^{-2}\delta\chi = \frac{-\delta\psi}{\alpha}$. ἄρα τὸ $\alpha\alpha\chi^{-2}\delta\chi(\alpha\chi^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$ μεταβάλλει εἰς $-\alpha\delta\psi.\psi^{-\frac{1}{2}}$, εἴτ' ἓν $-\alpha\psi^{-\frac{1}{2}}\delta\psi$, ἧς ὁλόκληρόν ἐςι τὸ $\frac{-\alpha\psi^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \Gamma$, εἴτ' ἓν $-2\alpha\psi^{\frac{1}{2}} + \Gamma$, ἢ $(\dot{\alpha}\nu\tau\iota\kappa\alpha\theta\iota\varsigma\alpha\mu\acute{\epsilon}\nu\omega\ \tau\tilde{\omega}\ \tau\tilde{\omega}\ \psi\ \ddot{\iota}\sigma\omega)$ $-2\alpha(\alpha\chi^{-1}+1)^{\frac{1}{2}} + \Gamma$, ἢ τελευταῖον $-2\alpha\sqrt{(\frac{\alpha}{\chi}+1)} + \Gamma$.

210. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὁλοκληρώσεως ἓν γινομένης ἐπὶ δυωνύμῳ ἀπειροσῷ, εἰ ὑδεμιᾷ τῶν εἰρημένων περιπτώσεων ἐφαρμόζοιτο, γεωμετρικὴ ὁλοκλήρωσις ἐ γενήσεται· τὰ δὲ τριώνυμα, τετραώνυμα κτ. ἀπειροσὰ, ὧν δηλονότι ἡ συνεζευγμένη ποσότης τρεῖς, τέσσαρας, κτ. ὅρους περιέχει, ὁλοκληρῶται ἐν ταῖς εἰρημέναις περιπτώσεσι (109 κτ). ἐπιδέχονται δὲ ἡ ἄλλοτέ ποτε ὁλοκλήρωσιν γεωμετρικὴν, σπανίως ἀλλ' ἓν· δι' ὃ ὑδεμία αὐτῶν ἐν τῷ παρόντι ἡμῖν ἐκτεθήσεται· παρακατιοῦσι μέντοι ἥτε μέθοδος τῶ τὰς ὁλοκληρωσίμως ἀνακαλύπτειν, ἡ ὧν τὸ ὁλόκληρον εἰς δεδομένον ὁλόκληρον ἀνάγεται, ἀποδοθήσεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Τῶν ἀποδοθέντων κανόνων ἐφαρμογὴ εἰς τετραγωνισμὸν τῶν καμπύλων.

211. Εἰς εὕρεσιν τῆς ἐπιφανείας, ἢ (ὃ ταὐτὸν) τοῦ τετραγωνισμοῦ τῶν καμπύλων γραμμῶν, παρισῶν εἰώθασιν ὡς ἀπειρόπλευρα πολύγωνα τὰς καμπύλας· ἐκ δὲ τῶν περάτων αὐτῶν Μ, μ (χ 68) ἐπινοεῖν καθέτους ΜΠ, μπ τῷ τῶν ἀποτετμημένων ἄξονι· ὅθεν ἡ ὅλη ἐπιφάνεια ἀναλύεται εἰς ἄπειρα τὸν ἀριθμὸν, ᾗ ἐλάχιστα τὸ ποσὸν, τραπέζια· θεωροῦσιν ὃν τηνικαῦτα ἕκαστον τραπέζιον, οἷον τὸ ΠπμΜ ὡς ἀπειροστὸν τοῦ πεπερασμένου χωρίου ΑΠΜ· ἐπεικῶς γὰρ ΠπμΜ = Απμ — ΑΠΜ = δ(ΑΠΜ)· ἐδὲν ἄρα λοιπὸν ἢ συμβολικῶς παρασῆσαι τὸ τραπεζίδιον ΠπμΜ, ᾗ ταύτην τὴν ἔκθεσιν διὰ τῶν προαποδοθέντων κανόνων ὁλοκληρῶσαι.

Α'λλ' ἰσέον, ὅτι τὸ ΠπμΜ, ἐκλαμβανόμενον ὡς ἀπειροστὸν τῆς ἐπιφανείας, ἐμᾶλλόν ἐστιν ἀπειροστὸν τῆς ὑπὸ τῆς τῶν ἀποτετμημένων ἀρχῆς Α ἀπολαμβανομένης ἐπιφανείας, ἢ παντὸς ἄλλου χωρίου ἀπολαμβανομένου ὑπότινος μονίμου ᾗ διωρισμένου σημείου τοῦ Κ· ἐπίσης γὰρ ἔστι ΠπμΜ = ΚπμΛ — ΚΠΜΛ = δ(ΚΠΜΛ)· τῆς ὁλοκληρώσεως ἄρα γενομένης, τὸ ἐκ τοῦ λογισμοῦ προκύψαν ὁλόκληρον ἐκ ἀμέσως ἀποδοτέον τῷ χωρίῳ ΑΠΜ μᾶλλον, ἢ παντὶ ἄλλῳ χωρίῳ τῷ ΚΠΛΜ, ὃ διαφέρει ἐκείνου χωρίῳ διωρισμένῳ ᾗ ἀτρέπτῳ τῷ ΚΑΛ· προσθετέον ἄρα τῷ ἐκ τοῦ λογισμοῦ εὑρεθέντι ὁλοκλήρῳ ποσότητα ἄτρεπτον, ἐμφαίνουσαν χωρίον, ᾧ τὸ διοριωθησόμενον διαφέρει τοῦ εὑρεθέν-

τος ἀμέσως ἐκ τῦ λογισμῦ· ὅπως δὲ τῦτο διοριωθήσεται ἐν τοῖς ἐφεξῆς ὀψόμεθα.

212. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Εὑρεῖν τὴν ἔκθεσιν τῦ χωρίυ ΠπμΜ.

ΛΥΣΙΣ. Κλιθήτω ΑΠ = χ, ϗ ΠΜ = υ· ὠκῦν ἔσαι Ππ = δχ, πμ = υ ∔ δυ· ἡ δὲ τῦ τραπεζίυ ἐπιφάνεια (Γεωμ. 295) ἔσι $\frac{\Pi M + \pi\mu}{2} \times \Pi\pi = \frac{2\upsilon + \delta\upsilon}{2}$ $\times \delta\chi = \upsilon\delta\chi + \frac{\delta\upsilon\delta\chi}{2}$· ἀλλ' ἐπεὶ τὸ $\frac{\delta\upsilon\delta\chi}{2}$, παρατιθέμενον πρὸς τὸ υδχ, ἀπειροσόν ἐσιν· ἄρα υδχ ἔσιν ἡ γενικὴ ἔκθεσις τῦ ἀπειροσῦ, ἢ τῦ ϛοιχείυ τῆς ὅλης καμπύλης.

213. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἵνα δὲ ὁ τύπος ἕτος ἐφαρμοσθῇ τῇ προκειμένῃ ἐπιφανείᾳ, ἧς δέδοται ἡ ἐξίσωσις, ληπτέον ἐκ τῆς ἐξισώσεως τὴν τῦ υ δύναμιν, ἣν εἰσακτέον τῷ τύπῳ υδχ· τηνικαῦτα γὰρ παραϛαθήσεται διὰ χ ϗ δχ ἡ ποσότης, ἥτις, ἂν ὁλοκληρωθῇ, παρέξει μετὰ ποσότητος ἀτρέπτυ προϛιθεμένης τὴν ἔκθεσιν τῆς ἐπιφανείας ταύτης τῆς καμπύλης, προσλογιζομένης, ἀφ' ἕτινος ἄντις βυληθείη σημείυ· λείπεται δὲ μόνον τὴν ἄτρεπτον προσδιορίσαι, ὅπερ περιέϛαι ἐκθεμένοις, ἀφ' ἕτινος σημείυ ἐπιλογίζεται ἡ ἐπιφάνεια· ὅπως δὲ τῦτὶ τελεωθήσεται, ὀψόμεθα ἐχομένως.

214. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Τετραγωνίσαι τὴν κωνικὴν παραβολήν.

ΛΥΣΙΣ. Ε᾽ ϛιν ἐν αὐτῇ ἐξίσωσις υυ = πχ, ὐ = $\sqrt{\pi\chi} = \pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{1}{2}}$· ἄρα $\upsilon\delta\chi = \pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{1}{2}}\delta\chi$· ἀλλ' ὁλόκληρον ταύτης τῆς ποσότητος ἔϛι τὸ $\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}}\delta\chi}{\frac{3}{2}\delta\chi} + \Gamma$, ἢ $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}}$

+Γ· αὕτη ἄρα ἐμφαίνει τὴν τῆς παραβολῆς ἐπιφάνειαν· ὥσε, γνωσθείσης τῆς ἀποτετμημένης χ, καὶ τῆς παραμέτρου π, εὑρεθήσεται ἡ δύναμις τοῦ χωρίου ΑΠΜ, ἢ τοῦ χωρίου ΚΠΜΛ, τοῦ ἐπιλογιζομένου ἐκ τοῦ μονίμου σημείου Κ, εἰ διορισθείη τὸ ποσὸν Γ, τοῦτ' ἔσιν εἰ ἀληθῶς τὸ ὁλόκληρον ἐμφαίνει, ἐκ τίνος σημείου ἡ ἀρχὴ γίνεται· ζητηθήτω δὴ τὰ ἐκ τοῦ Α ἀρχόμενα χωρία· ἔσαι τοίνυν ΑΠΜ $= \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}} + \Gamma$· ἵνα δὲ μάθωμεν, ὅ,τι δύναται τὸ Γ, ἐπισατέον, ὅτι, ἡνίκα ἔσι χ = ο, καὶ τὸ χωρίον ΑΠΜ γίνεται ὡσαύτως ο· τηνικαῦτα ἡ ἐξίσωσις τρέπεται εἰς ο = ο + Γ· ἄρα Γ = ο· ἵν' ἄρα τὸ ὁλόκληρον ἐμφήνῃ τὰ ἐκ τοῦ Α ἀρχόμενα χωρία, τὴν ἄτρεπτον Γ δεῖ εἶναι μηδέν· τοῦτ' ἔσι τηνικαῦτα ἀδεμίαν προσθετέον ἄτρεπτον· καὶ ἐν γένει τοίνυν ἔσαι τὸ ἀδιόριστον χωρίον ΑΠΜ $= \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}}$· ἐὰν μέντοι τὰ χωρία ἄρχωνται ἐκ τοῦ σημείου Κ, καθ' ὃ ΑΚ = β (τοῦ β γνωστοῦ ποσοῦ ὑπάρχοντος), ἔσαι τηνικαῦτα ΚΠΜΛ = $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}} + \Gamma$· ἀλλὰ τὰ χωρία ταῦτα γίνεται μηδὲν, ὅταν ΑΠ, ἢ χ, γένηται = β· ἔσαι ἄρα τότε ο + $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}} + \Gamma$· ἄρα Γ = − $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}}$, καὶ ἑπομένως ΚΠΜΛ = $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}}$. Ο. Ε. Π.

215. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δῆλον ἄρα, εἰς ὅ,τι συμβάλλεται ἡ προσθετέα ἄτρεπτος, καὶ ὅπως μόνη ἡ τοῦ προβλήματος κατάσασις ταύτην διορίζει· ἔσιν δὴ $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{1}{2}} \times \chi$, ἀλλὰ $\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{1}{2}} = \upsilon$· ἄρα $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}}$, ἢ $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{1}{2}} \times \chi = \frac{2}{3}\chi\upsilon$· ἐπεὶ ἄρα $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}}$ παρίσησι τὸ χωρίον ΑΠΜ, δηλώσει ἄρα τοῦτο καὶ ἡ ἔκθεσις $\frac{2}{3}\chi\upsilon$, τοῦτ' ἔσι

$\frac{2}{3}$ ΑΠ × ΠΜ, ἢ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΠΜΟ, ὁποία ἂν εἴη ἡ ΑΠ· εὕρηται δὲ ἔτω κϛ (Τ῾ψ. Γ. 70).

Ὡσαύτως $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}\chi\beta$, ἀλλ᾽ ὅταν ἡ χ = ΑΚ = β, ἡ ἐξίσωσις υυ = πχ δίδωσιν υυ = πβ, κϛ ἑπομένως $\upsilon = \pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}$, τοῦτ᾽ ἔστι ΚΛ $= \pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}$· ἄρα $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}}$, ἢ $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}} \times \beta = \frac{2}{3}$ ΚΛ × ΑΚ· ἐπεὶ οὖν τοῦ χωρίου ΚΠΜΛ ἔκθεσίς ἐστιν ἡ $\frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\chi^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\pi^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}}$, ἔσαι ἄρα τοῦ αὐτοῦ ἔκθεσις κϛ ἡ $\frac{2}{3}$ ΑΠ × ΠΜ — $\frac{2}{3}$ ΑΚ × ΚΛ, τοῦτ᾽ ἔστι $\frac{2}{3}$ ΑΠΜΟ — $\frac{2}{3}$ ΑΚΛΙ· μόνη δὲ τῶν τεσσάρων κωνικῶν τομῶν ἡ παραβολὴ τετραγωνισμῷ ὑπάρχει ἐπιδεκτική.

216. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Τετραγωνίσαι τὰς παντὸς γένους παραβολάς.

ΛΥΣΙΣ. Ἐξίσωσις αὐτῶν ἔστιν (Τψ. Γ. 268) $\upsilon^{\mu+\nu} = \alpha^{\mu}\chi^{\nu}$· ἄρα $\upsilon = \sqrt[\mu+\nu]{(\alpha^{\mu}\chi^{\nu})} = \alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}$· ἄρα $\upsilon d\chi = \alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}d\chi$, οὗ ὁλόκληρον $\frac{\alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}+1}}{\frac{\nu}{\mu+\nu}+1}$ + Γ, ὅπερ ἀνάγεται εἰς $\frac{\mu+\nu}{\mu+2\nu}\alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}+1}$ + Γ, ὅπερ τ᾽ αὐτόν ἐστι τῷ $\frac{\mu+\nu}{\mu+2\nu}\alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}} \times \chi$ + Γ, ἢ (ἐπεὶ $\upsilon = \alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}\chi^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}$) $\frac{\mu+\nu}{\mu+2\nu}\chi\upsilon$ + Γ· ὡς

εἴπερ ἄρχοιντο τὰ χωρία ΑΠΜ (χ. 69) ἐκ τῆς τῶν χ ἀρχῆς Α, ὅπερ ἀπαιτεῖ μηδὲν εἶναι τὸ ὁλόκληρον, ὅταν ΑΠΜ ᾖ μηδὲν, καὶ ἑπομένως ὅταν χ ᾖ μηδὲν, τηνικαῦτα τὸ ἄτρεπτον Γ μηδὲν γίνεται, λειπομένου ἁπλῶς τοῦ $\frac{\mu+\nu}{\mu+2\nu}$ χυ, τοῦτ' ἔστι τὸ χωρίον ΑΠΜ ἀεί ἐστι μέρος διωρισμένον τοῦ γινομένου χυ, ἢ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΠΜΟ, ἐμφαινόμενον τῷ κλάσματι $\frac{\mu+\nu}{\mu+2\nu}$, οὗ ἡ δύναμις ἐξέχεται τῆς τῶν μ, ν, τοῦτ' ἔστιν ἐκ τοῦ βαθμοῦ τῆς παραβολῆς· τοιγαροῦν τετραγωνισμοῦ εἰσὶν ἐπιδεκτικαὶ πᾶσαι αἱ παραβολαί.

217. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Τετραγωνίσαι τὰς παντὸς γένους ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ὑπερβολὰς, ἐξαιρουμένης τῆς ἐκ τοῦ κώνου.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπ' αὐτῶν ὑπάρχει $\upsilon\mu = \alpha^{\mu+\nu}\chi^{-\nu}$ (Υ'ψ. Γ. 273), $\upsilon = \alpha^{\frac{\mu+\nu}{\mu}}\chi^{\frac{-\nu}{\mu}}$· ἄρα $\upsilon\delta\chi = \alpha^{\frac{\mu+\nu}{\mu}}\chi^{\frac{-\nu}{\mu}}\delta\chi$, οὗ ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $\frac{\alpha^{\frac{\mu+\nu}{\mu}}\chi^{1-\frac{\nu}{\mu}}}{1-\frac{\nu}{\mu}} + \Gamma$, ἢ $\frac{\mu}{\mu-\nu}\alpha^{\frac{\mu+\nu}{\mu}}\chi^{1-\frac{\nu}{\mu}} + \Gamma$, ἔνθα ἡ ἄτρεπτος εὐκόλως διορίζεται, ὅταν μ ὑπερέχῃ τὴν ν· ἀλλ' ὅταν μ ἐλάττων ᾖ τοῦ ν, εὑρίσκεται ὡς ἄτρεπτος ποσότης, ἄπειρος μὲν, τῶν χωρίων ἀρχομένων ἐκ τῆς τῶν χ ἀρχῆς, πεπερασμένη δὲ, ὅταν ἄρχωνται ἀπὸ παντὸς ἄλλου χωρίου· ἔστω γὰρ μ = 1, καὶ ν = 2, ἔνθα η ἐξίσωσίς ἐστιν υ =

$\alpha^3 \chi^{-2}$, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τηνικαῦτα ἀνάγεται εἰς — α^3 $\chi^{-1} + \Gamma$, ἢ $\Gamma - \frac{\alpha 3}{\chi}$. εἰ μὲν ἓν ἐκ τῆς τῶν χ ἀρχῆς Α (χ. 70) ἄρχωνται τὰ χωρία, δεήσει μηδὲν εἶναι τὸ $\Gamma - \frac{\alpha 3}{0}$, ὄντος $\chi = 0$, τοῦτ' ἔστι $\Gamma - \frac{\alpha 3}{0} = 0$, καὶ ἐπομένως $\Gamma = \frac{\alpha 3}{0}$, τοῦτ' ἔστιν, ἄπειρον· τἀναντίον δὲ, εἰ ἄρχοιντο ἐκ τοῦ Κ, ὡς εἶναι ΑΚ $= \beta$, ἔσαι $\Gamma - \frac{\alpha 3}{\beta} = 0$, ὅθεν $\Gamma = \frac{\alpha 3}{\beta}$. ὃ δὲ τοῦτα σημαίνει, δῆλον ποιήσομεν. ἡ γὰρ καμπύλη, ἧς ἐξίσωσις ἡ $\upsilon = \alpha^3 \chi^{-2}$, ἢ $\upsilon = \frac{\alpha 3}{\chi^2}$, ἐπεκτείνεται ἐπ' ἄπειρον πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους ΑΖ, ΑΥ (χ. 70)· ἐγγίζει μέντοι μᾶλλον τῇ ἀσυμπτώτῳ ΑΖ, ἢ τῇ ΑΥ, ὥσπερ ἐκ τῆς κατ' αὐτὴν ἐξισώσεως συναγαγεῖν δυνατόν· ὡς, εἴπερ ἐπιλογιοῖεν τὰ χωρία ἐπὶ τῆς ἀσυμπτώτου ΑΥ, ἔσονται ἄπειρα, εἴγε τὸ χωρίον, τὰ ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς ἀσυμπτώτου, καὶ τοῦ ἀπείρου κλωνὸς ΒΣ, ἔστιν ἄπειρον· ἀμήχανον ἄρα δηλωθῆναι τὰ χωρία ΑΠΜΣ, τὰ ἐπιλογιζόμενα ἐπὶ τῆς ΑΥ ἀσυμπτώτου· τἀναντίον δὲ, τὰ χωρία, τὰ ἀπολαμβανόμενα ὑπὸ τοῦ κλωνὸς ΒΜ καὶ τῆς ἀσυμπτώτου ΑΖ, καὶ ἐπ' ἄπειρον προήκοντα, πεπερασμένην ἔχουσι δύναμιν, εἴγε μετὰ βραχύ τι διάστημα τάχιστα προσεγγίζει ὁ κλὼν τῇ ἑαυτοῦ ἀσυμπτώτῳ· ὥστε τὸ ἀπειρόμηκες χωρίον ΚΛΜΟΖ ἐκτίθεσθαι διὰ $\frac{\alpha 3}{\beta}$, καὶ ΠΜΟΖ $= \frac{\alpha 3}{\chi}$, καὶ ἑπομένως ΚΛΜΠ $= \frac{\alpha 3}{\beta} - \frac{\alpha^3}{\chi}$.

ἐντεῦθεν ἄρα, κἂν εἴη ἀμήχανον εὑρεῖν τὰ χωρία, τὰ ἐπὶ τῆς ΑΥ ἀσυμπτώτῳ λαμβανόμενα, δυνατὸν μέντοι ζητεῦσαθαι τὰ ΚΛΜΠ, τὰ ἀρχόμενα ἐκ τοῦ σημείου Κ, κειμένου, ὅσον ἄντις βέλοιτο, ἐγγὺς τῆς ΑΥ.

218. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Τετραγωνίσαι τὴν καμπύλην, ἣν ἐμφαίνουσιν ἡ $y = \frac{aax - x^3}{aa}$ ἐξίσωσις ἐν τὸ 71 σχῆμα.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς λήψεως τῶν τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως ἀπείροστῶν πορισθήσεται $ydx = \frac{aaxdx - x^3dx}{aa}$, ἧς ὁλόκληρόν ἐστι (196) $Oydx$, ἢ $\Pi AM = \frac{2aax^2 - x^4}{4aa} + \Gamma$. ἐὰν οὖ ἄρχωνται ἐκ τῆς ἀρχῆς Α τῶν ἀποτετμημένων τὰ χωρία ΑΠΜ, δείσει μηδὲν εἶναι τὸ ὁλόκληρον, ὄντος = ο τοῦ x. ὅθεν μηδὲν ἔσαι ἐν ἡ ἀμετάτρεπτος Γ. ὥσε τὸ ἀδιόριστον χωρίον ΑΠΜ ἔσαι ἁπλῶς = $\frac{2aax^2 - x^4}{ax} + \Gamma$.

Ἐν γένει δ' ἂν, ἐὰν ἡ y ἐκ μονωνύμων ποσῶν, ὡς ἐν ταῖς ἀνωτέρω περιπτώσεσι, συγκέηται, ἀεὶ εὐπετῶς πορισθήσεται ἡ ἐπιφάνεια (196).

219. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς΄. Τετραγωνίσαι καμπύλην, ἧς ἐξίσωσίς ἐστιν ἡ $a^5yy = x^4(a^3 - x^3)$.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως πρόεισιν $y = \pm\sqrt{\left(\frac{x^4(a^3 - x^3)}{a^3}\right)} = \pm\frac{x^2}{a^2\sqrt{a}}\sqrt{(a^3 - x^3)}$· ἄρα (μιᾶς μόνης λαμβανομένης δυνάμεως τοῦ y), $ydx =$

$\frac{\chi^2 \delta\chi}{\alpha^2 \sqrt{\alpha}} \sqrt{(\alpha^3 - \chi^3)} = \frac{\chi^2 \delta\chi}{\alpha^2 \sqrt{\alpha}} (\alpha^3 - \chi^3)^{\frac{1}{2}}$. ἔστι δὲ αὕτη ποσότης ἐπιδεχομένη ὁλοκλήρωσιν (203), εἴγε $\chi^2 \delta\chi$ ἔστιν ἀπειροστὸν τοῦ χ^3, διαιρούμενον διὰ ποσοῦ ἀτρέπτου· ἄρα (196) $\text{Ου}\delta\chi = \frac{\chi^2 \delta\chi \cdot (\alpha^3 - \chi^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\alpha^2 \sqrt{\alpha} - 3\chi^2 \delta\chi} + \Gamma =$

$- \frac{2(\alpha^3 - \chi^3)^{\frac{3}{2}}}{9\alpha^2 \sqrt{\alpha}} + \Gamma$· τὸ δὲ ἄτρεπτον Γ διορισθήσεται, γνωσθέντος τοῦ σημείου, ἀφ' οὗ ἄρχεται ἡ ἐπιφάνεια.

220. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δυνατὸν δὲ εὑρίσκειν τὰς τῶν καμπύλων ἐπιφανείας καὶ εἰς τρίγωνα ἀντὶ τραπεζίων, ἀναλυομένων· δυνατὸν γὰρ εὑρεῖν τὴν τοῦ τμήματος ΑΝΞ ἐπιφάνειαν (χ. 63), θεωρουμένην, ὡς εἰ συγκέοιτο ἐξ ἀπειραρίθμων τριγώνων ἐλαχίστων, οἷόν ἐστι τὸ ΑΞξ, οὗ ἔκθεσις ἡ $\frac{\text{ΑΞ}\chi\Xi\tau}{2}$, καταγομένης τῆς καθέτου Ξτ, ἢ (ὁ ταὐτὸν), κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΞ, τόξου ἐλαχίστου γραφέντος τοῦ Ξτ· τηνικαῦτα γὰρ, κληθείσης τῆς ΑΞ $= \tau$, καὶ τοῦ τόξου Ξτ $= \delta\chi$, πορισθήσεται Αξ $= \tau + \delta\tau$, καὶ ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΞξ $= \frac{\tau + \delta\tau}{2} \delta\chi =$ $\frac{\tau\delta\chi}{2} + \frac{\delta\tau\delta\chi}{2}$, τοῦτ' ἔστιν $= \frac{\tau\delta\chi}{2}$, ἀπορριπτομένου τοῦ ὄρου $\frac{\delta\tau\delta\chi}{2}$, ὅτι $\delta\chi$ καὶ $\delta\tau$ εἰσὶν ἀπειροστὰ, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον, ἀπειροστὸν δευτεροταγές· ἐδὲν ἦν ἄλλο λοιπὸν, ἢ εὑρεῖν τὴν μεταξὺ χ καὶ τ ἐξίσωσιν, καὶ ἐντεισαγαγόντας ἀντὶ τ τὴν τοῦ χ δύναμιν, τὴν ὁλοκλήρωσιν ἀπεργάσασθαι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ εὐθύνσεως τῶν καμπύλων γραμμῶν.

221. Καμπύλην εὐθύνειν διορίζειν ἐσὶν αὐτῆς τὸ μῆκος, ἢ δηλῶν, τίνι εὐθείᾳ γραμμῇ ἴσῆται, ἤτοι ὅλη ἡ καμπύλη, ἢ τόξον αὐτῆς δεδομένον· ἰδὲ δὴ τετὶ, ὅταν ἐξῇ, ὅπως περαίνεται· ἐκλαμβανομένης ἀεὶ ἀπάσης καμπύλης AM (χ. 68) ὡς ἀπειροπλεύρε πολυγώνε, ἡ ἐλαχίση πλευρὰ Mμ ἐκληφθῆναι δύναται ὡς ἀπειροσὸν τῆ τόξε AM, εἴγε $M\mu = A\mu - AM = \delta(AM)$· ἀγομένης τοίνυν τῆς Mρ παραλλήλως τῇ AΠ, ἔσαι $M\mu = \sqrt{(M\rho^2 + \rho\mu^2)} = \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$· λείπεται ἄρα ὁλοκληρῶσαι μόνον τὸ $\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$· ἐπὶ δὲ τέτῳ εἰλήφθω τὰ ἀπειροσὰ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἐξισώσεως, ϗ ἐντεῦθεν πορισθεῖσα ἡ τῆ δυ δύναμις, παρισαμένη διὰ χ ϗ $\delta\chi$, ἢ ἡ τῆ $\delta\chi$, παρισαμένη διὰ υ ϗ δυ, ἀντικαταστάθήτω ἐν $\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$, ἥτις μόνον χ ϗ $\delta\chi^2$, ἢ μόνον υ ϗ δυ, περιέξει· ἐξήχθω δὲ τῆ ῥιζικῆ ἐκτὸς τὸ $\delta\chi^2$, ἢ $\delta\upsilon^2$ (Συμβ. Λογισ. 167), ϗ γενέσθω ἡ ὁλοκλήρωσις.

222. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Τόξον κυκλικὸν εὐθύναι.

ΛΥΣΙΣ. Ἔσιν (Τ' ψηλ. Γ. 10) $\upsilon = \sqrt{2\alpha\chi - \chi\chi}$.

$$\text{ϗ } \delta\upsilon = \frac{\alpha\delta\chi - \chi\delta\chi}{\sqrt{(2\alpha\chi - \chi\chi)}}, \text{ ϗ } \delta\upsilon^2 = \delta\chi^2 \cdot \frac{(\alpha - \chi)^2}{2\alpha\chi - \chi\chi}$$

· ἀντικαταστάσει δὲ ταύτης τῆς τῆ $\delta\upsilon^2$ δυνάμεως ἐν τῷ $\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$, πορίζεται $\sqrt{\left(\delta\chi^2 + \frac{\delta\chi^2 \cdot (\alpha - \chi)^2}{2\alpha\chi - \chi\chi}\right)} =$

$$\frac{2\alpha\chi\delta\chi^2 - \chi\chi\delta\chi^2 + \alpha^2\delta\chi^2 - \alpha\alpha\chi\delta\chi^2 + \chi\chi\delta\chi^2}{2\alpha\chi - \chi\chi} =$$

$$\frac{\sqrt{\alpha^2\delta\chi^2}}{\sqrt{(2\alpha\chi - \chi\chi)}} = \frac{\alpha\delta\chi}{\sqrt{2\alpha\chi - \chi\chi}}$$, ὅπερ ἐσὶν ἀπει-

ροσὸν παντὸς τόξυ, ὁλοκληρέμενον διὰ προσεγγίσεως, ὡς ὀψόμεθα ὕσερον.

223. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ε'κ τῶν ἐν γένει διὰ $\upsilon^{\mu+\nu} = \alpha^\mu\chi^\nu$ ἐμφαινομένων παραβολῶν εὐθύναι τὴν δηλυμένην ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon^3 = \alpha\chi^2$.

ΛΥΣΙΣ. Ε'κ τῆς ἐξισώσεως πρόεισι $\chi^2 = \frac{\upsilon^3}{\alpha}$, ἢ χ

$= \frac{\upsilon^{\frac{3}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}}$. ἄρα $\delta\chi = \frac{\frac{3}{2}\upsilon^{\frac{1}{2}}\delta\upsilon}{\alpha^{\frac{1}{2}}}$, ἢ $\delta\chi^2 = \frac{9\upsilon\delta\upsilon^2}{4\alpha}$. ἄρα $\sqrt{(\delta\chi^2}$

$+ \delta\upsilon^2) = \sqrt{(\delta\upsilon^2 + \frac{9\upsilon\delta\upsilon^2}{4\alpha})} = \delta\upsilon\sqrt{(1 + \frac{9\upsilon}{4\alpha})}$ (Συμ-

βολ. Λογ. 167)· ὁλοκληρῦται δ' ἐυπετῶς (193) ἡ ποσότης αὕτη, εἴγε ὁ ἐκτὸς τῦ δυωνύμυ δείκτης τῆς υ ἐλάττων ἐσὶ μονάδι τῦ ἐν τῷ δυωνύμῳ· πορισθήσεται ἄρα

$$\text{Ο } \delta\upsilon\sqrt{(1 + \frac{9\upsilon}{4\alpha})} \text{ ἢ } \text{Ο}\delta\upsilon\,(1 + \frac{9\upsilon}{4\alpha})^{\frac{1}{2}} = \frac{\delta\upsilon(1 + \frac{9\upsilon}{4\alpha})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9\delta\upsilon}{4\alpha}}$$

$$+ \Gamma = \frac{8\alpha}{27}.(1 + \frac{9\upsilon}{4\alpha})^{\frac{3}{2}} + \Gamma\cdot$$ ἡ δὲ ἀμετάτρεπτος Γ ὕτω διορισθήσεται· ἐὰν ἐκ τῆς τῶν υ ἀρχῆς Α ἄρχηται τὸ τόξον ΑΜ, δείσει τὸ ὁλόκληρον, ἢ τὴν τῦ ΑΜ τόξυ δύναμιν, εἶναι μηδὲν, ὅταν ἢ $\upsilon = 0$· τηνικαῦτα ἄρα

τὸ ὁλόκληρον ἀνάγεται εἰς $\frac{8\alpha}{27}(1)^{\frac{3}{2}} + \Gamma$, ἢ $\frac{8\alpha}{27} + \Gamma$.

ἔσαι ἄρα $\frac{8\alpha}{27} + \Gamma = 0$· ἄρα $\Gamma = -\frac{8\alpha}{27}$· ἄρα τὸ μῆκος παντὸς τόξυ AM, ἐκ τῆς κορυφῆς ἀρχομένυ, ἔσι $\frac{8\alpha}{27}(1 = \frac{9v}{4\alpha})^{\frac{3}{2}} - \frac{8\alpha}{27}$.

224. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Βυλομένοις δὲ εἰδέναι, αἵ ἂν εἶεν ἄλλαι τῶν παραβολῶν εὐθύνσιμοι, ἐπιχειρητέον ἔτως· ἡ παντὸς γένυς παραβολῶν ἐξίσωσις $v^{\mu+\nu} = \alpha^{\mu}x^{\nu}$ δίδωσιν $v = \alpha^{\frac{\mu}{\mu+\nu}} x^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}$· γενέωω δὲ εὐμαρείας χάριν $\frac{\mu}{\mu+\nu} = \varkappa$, καὶ $\frac{\nu}{\mu+\nu} = \zeta$· ἔξομεν ἄρα $v = \alpha^{\varkappa} x^{\zeta}$· ἄρα $\delta v = \zeta\alpha^{\varkappa} x^{\zeta-1}\delta x$, καὶ $\delta v^2 = \zeta^2\alpha^{2\varkappa} x^{2\zeta-2}\delta x^2$· ἄρα $\sqrt{(\delta x^2 + \delta v^2)} = \sqrt{(\delta x^2 + \zeta^2\alpha^{2\varkappa} x^{2\zeta-2}\delta x)} = \delta x$ $= \delta x\sqrt{(1 + \zeta^2\alpha^{2\varkappa} x^{2\zeta-2})}$ ποσότης, ἥτις, ὡς ἔχυσά ἐσιν, ἐχ' ὁλοκληρῶται, εἰμὴ εἴη $2\zeta - 2 = 1$· ἐὰν μέντοι μεταβληθῇ τὸ σύμβολον τῦ δείκτυ τῆς ὑποῤῥίζυ x, προκύψει $x^{-\zeta+1}\delta x\sqrt{(x^{-2\zeta+2} + \zeta^2\alpha^{2\varkappa})}$, ἥτις (195) ὁλοκληρῶται, εἴπερ $-\zeta + 1$, αὐξηθεὶς μονάδι, καὶ διαιρεθεὶς διὰ $-2\zeta + 2$, προβάλλει ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικὸν, τῦτ' ἔσιν, εἰ $\frac{\zeta}{-2\zeta+2} = \tau$, τῦ τ ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος ὁλοχερῆ ὑπαρκτικόν· ἐντεῦθεν ἄρα ἀποφέρεται $\zeta = \frac{2\tau}{2\tau+1}$· ἀλλὰ $\zeta = \frac{\nu}{\mu+\nu}$· ἄρα

$\frac{\nu}{\mu+\nu} = \frac{2\tau}{2\tau+1}$ · ὅθεν $\mu = \frac{\nu}{2\tau}$ · ἄρα εὐθύνονται αἱ παραβολαὶ, ὧν ἐσιν ἐξίσωσις ἡ $\upsilon^{\frac{\nu.(2\tau+1)}{2\tau-2}} = \alpha^{\frac{\nu}{2\tau}} \chi^{\nu}$, ἢ (ἐξαγομένης τῆς ῥίζης ν) $\upsilon^{\frac{2\tau+1}{2\tau}} = \alpha^{\frac{1}{2\tau}} \chi$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ τετραγωνισμῦ τῶν καμπύλων ἐπιφανειῶν.

225. Τῶν ἐκ περιαγωγῆς καμπύλης τινὸς ἀπογενωμένων ἐπιφανειῶν τὸν τετραγωνισμὸν ἐνταῦθα ζητήσομεν· τῆς τοίνυν AM (χ. 72) καμπύλης περὶ εὐθεῖαν τὴν AΠ περιαγομένης, αἱ, περὶ ὧν ὁ λόγος, παράγονται ἐπιφάνειαι.

Ἀλλὰ τῆς AM περὶ τὴν AΠ περισρεφομένης, ἡ μικρὰ πλευρὰ Mμ, ζώνην περιγράφει, ἢ κώνου κολάρου μέρος, ὅπερ σοιχειόν τε ὑπάρχει τῆς ἐπιφανείας, καὶ ἴσεται τῷ γινομένῳ ὑπὸ Mμ καὶ τῆς περιφερείας, ἧς ἀκτὶς ἡ ἐκ τοῦ μέσου τῆς Mμ τῇ AΠ ἀγομένη κάθετος, ἢ (ὃ ταὐτὸν, εἴγε ἀπειροσημόριός ἐσιν ἡ Mμ) ἧς ἀκτὶς ἡ ΠM· ἀλλὰ τὸ τόξον $M\mu = \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$· ἐὰν δι' η: π ὁ λόγος τῆς ἀκτῖνος πρὸς τὴν περιφέρειαν δηλωθῇ, πορισθήσεται η : π :: υ πρὸς τὴν περιφέρειαν, ἧς ἀκτὶς ἡ ΠM, ἥτις ἔσαι $= \frac{\pi\upsilon}{\eta}$· ἔσιν ἄρα $\frac{\pi\upsilon}{\eta}\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$ σοικεῖον τῶν εἰρημένων καμπύλων ἐπιφανειῶν.

226. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. *Τετραγωνίσαι τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν* (χ. 73).

ΛΥΣΙΣ. Τοῦ *γεννήτορος κύκλου* ΑΜΒ ἔστιν ἐξίσωσις $υυ = αχ - χχ$· ἄρα $υ = \sqrt{(αχ - χχ)}$, *καὶ* $δυ = \frac{\frac{1}{2}αδχ - χδχ}{\sqrt{(αχ - χχ)}}$· ἄρα $δυ^2 = \frac{\frac{1}{4}ααδχ^2 - αχδχ^2 + χ^2δχ^2}{αχ - χχ}$, ἄρα $\sqrt{(δχ^2 + δυ^2)} = \sqrt{(δχ^2 + \frac{\frac{1}{4}ααδχ^2 - αχδχ^2 + χ^2δχ^2}{αχ - χχ})} = \frac{\frac{1}{2}αδχ}{\sqrt{(αχ - χχ)}}$· *ἀντὶ καθισαμένων ἄρα ἐν τῷ τύπῳ* $\frac{πυ}{α}\sqrt{(δχ^2 + δυ^2)}$ *ἀντὶ* $υ$ *καὶ* $\sqrt{(δχ^2 + δυ^2)}$ *τῶν κατ' αὐτὰς δυνάμεων, πορισθήσεται* $\frac{π\sqrt{(αχ - χχ)}}{η} \cdot \frac{\frac{1}{2}αδχ}{\sqrt{(αχ - χχ)}}$, *ὅπερ ἀνάγεται ἐπὶ* $\frac{\frac{1}{2}απδχ}{η}$, *οὗ ὁλόκληρόν ἐστι τὸ* $\frac{\frac{1}{2}απχ}{η} + Γ$, *ἢ ἁπλῶς* $\frac{\frac{1}{2}απχ}{η}$, *ἀρχομένης ἀμέλει τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τοῦ σημείου* Α.

227. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. *Τετραγωνίσαι τὴν τῆς παραβολικῆς κωνοίδος ἐπιφάνειαν* (χ. 72).

ΛΥΣΙΣ. Τῆς παραβολῆς ἐξίσωσις ἔστιν $υυ = πχ$· ἄρα $χ = \frac{υυ}{Π}$, $δχ = \frac{2υδυ}{Π}$, $δχ^2 = \frac{4υ^2δυ^2}{Π}$· ἄρα $\sqrt{(δχ^2 + δυ^2)} = \sqrt{(δυ^2 + \frac{4υ^2δυ^2}{ΠΠ})} = δυ\sqrt{(1 + \frac{4υ^2}{ΠΠ})}$· ἄρα $\frac{πυ}{η}\sqrt{(δχ^2 + δυ^2)}$ *γίνεται* $\frac{πυδυ}{η}\sqrt{(1 + \frac{4υ}{ππ})}$, *ποσότης ὁλοκληρώσεως ἐπιδεκτικὴ* (193), *ἧς τὸ ὁλόκληρόν ἐστι*

$$\frac{\frac{\pi\upsilon\delta u}{\eta}\left(1+\frac{4\upsilon^2}{\Pi\Pi}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\frac{1}{2}\cdot 8\upsilon\delta u}{\pi\pi}}+\Gamma,$$

ἥτις ἀνάγεται ἐπὶ $\frac{\Pi\Pi\pi}{12\eta}\left(1+\frac{4\upsilon^2}{\Pi\Pi}\right)^{\frac{3}{2}}+\Gamma$· ἀλλὰ γὰρ ἡ ποσότης αὕτη τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἀρχομένην δηλοῦσα ἐπιφάνειαν, ὅταν ἡ $\upsilon=0$, καὶ αὕτη μηδὲν ἔσαι· ἀλλὰ τηνικαῦτα γίνεται $\frac{\Pi\Pi\pi}{12\eta}(1)^{\frac{3}{2}}+\Gamma$, εἴτ' οὖν $\frac{\Pi\Pi\pi}{12\eta}+\Gamma=0$, καὶ $\Gamma=-\frac{\Pi\Pi\pi}{12\eta}$· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἀδιορίστου παραβολικῆς κωνοΐδος ΑΜΛΑ ἔσιν $=\frac{\pi\Pi\Pi}{12\eta}\left(1+\frac{4\upsilon^2}{\Pi\Pi}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{\Pi\Pi\pi}{12\eta}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ τῆς τῶν στερεῶν καταμετρήσεως.

228. Πρὸς καταμέτρησιν τῆς τῶν σωμάτων στερεότητος, ἐννοητέον ταῦτα συγκείμενα ἐκ στιβάδων λεπτοτάτων τε καὶ παραλλήλων, ἢ γοῦν ἐξ ἀπειραρίθμων πυραμίδων, ὧν αἱ κορυφαὶ εἰς ἓν σημεῖον συντρέχουσιν· ὅταν δ' ἐκείνως ἐξεικονίζωνται, τὴν τῶν δύω ἀντιθέτων ἐπιφανειῶν διαφορὰν, τὴν ἑκατέραν στιβάδα περατοῦσαν, ἀπειροστὴν τε ἐκληπτέον, καὶ παροπτέον ἐν τῷ ὑπολογισμῷ· λαβεῖν δὲ χρὴ εἰς ἔκθεσιν τῆς στερεότητος ταύτης τῆς στιβάδος τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς ἑτέρας τῶν δύω ἀντιθέτων βά-

σεων, ϗ τῆ ἀπειροσῆ ὕψη· ἐὰν φέρε ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓ (χ. 74) ἐκληφθῇ ὡς συγκειμένη ἐκ σιβάδων λεπτοτάτων, οἵα ἡ αβγδεζ, ληπτέον ὡς μέτρον ταύτης τῆς σιβάδος τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας αβγ, ἢ τῆς δεζ ϗ τῆ πάχη αὐτῆς.

Ὡ᾽σαύτως, ἐὰν τὸ περιαγωγῇ τῆς ΑΜ (χ. 72) καμπύλης περὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΠ ἀπογεννώμενον σερεὸν ἐκληφθῇ ὡς συγκείμενον ἐκ σιβάδων παραλλήλων ϗ λεπτοτάτων, ἐκληπτέον ὡς μέτρον ἑκάσης σιβάδος τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς κυκλικῆς ἐπιφανείας, ἧς ἀκτὶς ἡ ΠΜ, ϗ τῆ πάχη Ππ. Τότε τεθέντος, ἰδὲ ὅπως ἐκτιμηθήσεται ἡ παντὸς σώματος σερεότης.

Ἐννοηθήτω ἑκάση σιβὰς ὡς ἴσα τῆ σερεῆ τὸ ἐπειροσὸν, εἴγε ἡ σιβὰς Μμλλ ἔσιν = Αμλλ — ΑΜ ΛΑ = δ(ΑΜΛΑ)· ϗ διοριωθεῖσα ἡ συμβολικὴ αὐτῆς ἔκθεσις ὡλοκληρώσθω· ἡ δὲ παντὸς σερεῆ καταμέτρησις ϗ κυβισμὸς αὐτῆ ὀνομάζεται, ὥσπερ τετραγωνισμὸς ἡ τῶν ἐπιφανειῶν.

229. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Κυβίσαι τὴν πυραμίδα ΚΑΒΓ (χ. 74).

ΛΥΣΙΣ. Ἐμφαινέτω τὴν τῆς κατ᾽ αὐτὴν βάσεως ΑΒΓ ἐπιφάνειαν ἡ γνωσὴ ποσότης ββ· τὸ δ᾽ ὕψος αὐτῆς ΚΤ, τὸ υ· τὸ δὲ χ ἐμφαινέτω τὸ μιᾶς τινος σιβάδος ἀπόσημα· ὅθεν πάχος ταύτης τῆς σιβάδος ἔσαι τὸ δχ· ἡ δ᾽ ἐπιφάνεια αβγ εὑρεθήσεται (*) διὰ τῆς ἀναλογίας $\Sigma T^2 : \Sigma \tau^2$

(*) Τῆς ἀναλογίας ταύτης τὴν δεῖξιν περιττὸν, οἶμαι, ἐκθέσθαι ὧδε· οἱ γὰρ ἐνταῦθα γενόμενοι οἷοι πάντως ἔσονται αὐτόθεν τῆς ταύτης ἀληθείαν συνιδεῖν, ϗ, εἰ δέοι, δεῖξαι.

:: ΑΒΓ : αβγ, τοῦτ' ἔσιν υυ : χχ :: ββ : αβγ = $\frac{\beta\beta\chi\chi}{\upsilon\upsilon}$.

ὁμοίων ἡ τῆς σιβάδος σερεότης ἔσαι $\frac{\beta\beta\chi\chi\delta\chi}{\upsilon\upsilon}$, ὃ ὁλόκληρόν

ἐσι τὸ $\frac{\beta\beta\chi^3}{3\upsilon\upsilon}$ + Γ, ἢ ἁπλῶς $\frac{\beta\beta\chi^3}{3\upsilon\upsilon}$, ἐὰν ἄρχηται ἐκ τῆς

κορυφῆς Κ τὸ σερεόν· αὕτη ὢν ἡ ποσότης, ἡ ἐμφαίνουσα

ὁποιονοῦν μέρος Καβγ τῆς πυραμίδος, ταὐτίζεται τῇ $\frac{\beta\beta\chi\chi}{\upsilon\upsilon}$

× $\frac{\chi}{3}$, ἥτις οὐδέν ἐσιν ἀλλ' ἢ αβγ × $\frac{\text{Κτ}}{3}$, ὅπερ συνάδει

τοῖς δεδειγμένοις ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ (457).

230. Περὶ δὲ τῶν ἐκ περιαγομένης καμπύλης οἱασοῦν ἀπογεννωμένων σερεῶν, ἔξεσι γενικώτερον εὑρεῖν τὴν ἔκθεσιν τῆς σοιχειώδους σιβάδος, ἢ τὸ ἀπειροσόν· ἐμφαιρέτω γὰρ η : π τὸν τῆς ἀκτῖνος πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγον· εὑρεθήσεται ὢν περιφέρεια, ἧς ἀκτὶς ἡ ΠΜ = $\frac{\pi\upsilon}{\eta}$ (χ. 72), ἐκ τῆς ἀναλογίας η : π :: υ : $\frac{\pi\upsilon}{\eta}$· ἐὰν δὲ ἡ τῆς

περιφερείας ταύτης $\frac{\pi\upsilon}{\eta}$ δύναμις πολλαπλασιαθῇ ἐπὶ τὸ

ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ΠΜ, εἴτ' ὢν ἐπὶ $\frac{1}{2}$ υ, εὑρεθήσεται ἡ

κυκλικὴ ἐπιφάνεια $\frac{\pi\upsilon^2}{2\eta}$, ἥτις, πολλαπλασιαθεῖσα ἐπὶ τὸ

πάχος Ππ = δχ, δίδωσι $\frac{\pi\upsilon^2\delta\chi}{2\eta}$, ἔκθεσιν τοῦ σοιχείου τῆς

σερεότητος παντὸς ἐκ περιαγωγῆς σερεοῦ· ἵνα δὲ χρησώμεθα τῷ τύπῳ τούτῳ ἐπὶ μερικωτέραις περιπτώσεσι,

εἰσακτέον αὐτῷ ἀντὶ υ τὴν αὐτῆ δύναμιν, διὰ χ ποριζομένην ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης AM τῆς τῆ σερεῆ γεννητρίας, ϗ ὁλοκληρωτέον αὐτόν.

231. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Σφαῖραν κυβίσαι (χ. 73).

ΛΥΣΙΣ. Ε῎σω ἡ διάμετρος AB = 2η, ϗ ἡ ἀποτετμημένη AΠ = χ, ϗ ἡ τεταγμένη ΠM = υ· ἔσαι τοίνυν, διὰ τὴν φυσικὴν ἰδιότητα τῆ γεννήτορος κύκλυ AMB, $υ^2 = 2ηχ + χ^2$· ἀντικατασάσει ἄρα τῆς τῆ $υ^2$ δυνάμεως γίνεται ὁ τύπος $\frac{πυ^2δχ}{2η} = πχδχ - \frac{πχχδχ}{2η}$, καὶ Ο

$\frac{πυ^2δχ}{2η} = \frac{π}{2η}$· Ο· $υυδχ = \frac{πχ^2}{2} - \frac{πχ^3}{3.2η}$· ἄρα τὸ μέρος τῆς σφαίρας τῆς ἀπογεννωμένης τῷ ἡμίσει τμήματι ΑΠM, περισρεφομένῳ περὶ τὸν ἄξονα AB, ἔσιν = $\frac{πχ^2}{2} - \frac{πχ^3}{6η} = \frac{3πηχ^2 - πχ}{6η}$· ἐὰν δὲ ὑποτεθῆ χ = 2, ἡ ὅλη σφαῖρα ἔσαι = $\frac{12.πη^3 - 8.π.η^3}{6.η} = \frac{4π.η^3}{6η} =$

$\frac{2}{3}.πη^2 = 2πη.\frac{1}{2}η.$ ἀλλὰ $\frac{πη}{2}$ δηλοῖ μέγισον κύκλον τῶν ἐπὶ τῆς σφαίρας, ϗ 2πη τὸ τετραπλῆν αὐτῆ· ἄρα ἡ σερεότης τῆς σφαίρας ἴση ἐσὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆ τετραπλῆ μεγίσῃ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλῳ, ϗ τριτημορίῳ τῆς ἀκτῖνος· ὅπερ συνάδει τοῖς δεδειγμένοις (Γεωμ. 452, 463).

232. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Κυβίσαι τὴν τῆς ἐλλείψεως κωνοΐδα (χ. 75).

$\mathbf{AK} = \varepsilon$, ἡ χρησέον τῷ γενικῷ ὁλοκλήρῳ $\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}\left(\frac{\alpha\chi^3}{2} - \frac{\chi^3}{3}\right) + \Gamma$· ἐν τῷ εἰρημένῳ ἓν σημείῳ, τὸ ὁλόκληρον γίνεται ο, τοῦτ' ἔσιν ὅταν ἡ $\chi = \varepsilon$· ἄρα $\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}\left(\frac{\alpha\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3}\right) + \Gamma = 0$, ἡ ἑπομένως $\Gamma = -\frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}\left(\frac{\alpha\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3}\right)$· ἡ ἄρα ἐκ τοῦ K ἀρχομένη στερεότης ἔσιν $= \frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}\left(\frac{\alpha\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3}\right) - \frac{\pi\beta\beta}{2\eta\alpha\alpha}\left(\frac{\alpha\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3}\right)$· οὗτος τύπος ὑπάρχει τμήματος ἐλλειπτικῆς κωνοΐδος, ἀπολαμβανομένης ὑπὸ δύω παραλλήλων ἐπιπέδων, οἷς ὁ ἄξων πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκε, ἡ ὧν τὸ ἀπόστημα ἔσιν $= \chi - \varepsilon$.

234. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Κυβίσαι τὴν παραβολικὴν κωνοΐδα (χ. 72).

ΛΥΣΙΣ. Ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς ἐσιν $\upsilon\upsilon = \Pi\chi$· ἐκεῖν ὁ τύπος $\frac{\pi\upsilon^2\delta\chi}{2\eta}$ γίνεται $\frac{\pi\Pi\chi\delta\chi}{2\eta}$, ὃ ὁλόκληρόν ἐσι τὸ $\frac{\pi\Pi\chi^2}{4\eta} + \Gamma$, ἢ $\frac{\pi\Pi\chi}{2\eta} \times \frac{\chi}{2} + \Gamma$, ἢ (τιθεμένου ἀντὶ $\Pi\chi$ τοῦ $\upsilon\upsilon$) $\frac{\pi\upsilon\upsilon}{2\eta} \times \frac{\chi}{2} + \Gamma$· ἢ (ἐκ τοῦ A τοῦ στερεοῦ ἀρχομένου) $\frac{\pi\upsilon\upsilon}{2\eta} \times \frac{\chi}{2}$· ἀλλὰ $\frac{\pi\upsilon\upsilon}{2\eta}$ ἐμφαίνει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου, ὃ ἀκτὶς ἡ ΠΜ, εἴτ' ὧν τῆς κατὰ τὴν παραβολικὴν κωνοΐδα βάσεως· ἄρα ἡ παραβολοῖς ἴση ἐσὶ τῷ γι-

νομένῳ ὑπὸ τῆς κατ' αὐτὴν βάσεως, ϗ τῇ κατ' αὐτὴν ἡμίσεως ὕψος χ· ἡμίσεια ἄρα ἐϛὶ κυλίνδρε, τὴν αὐτὴν βάσιν ϗ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντος.

235. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ε'ὰν δὲ ἡ ϛερεότης ἄρχηται ἀπὸ σημείε γνωϛῇ τῇ Κ, ὡς εἶναι ΑΚ = ε, τηνικαῦτα μηδὲν εἶναι δέον τὴν ϛερεότητα πρὸς τῷ σημείῳ Κ, τῇτ' ἔϛιν ὅταν ἡ χ = ε, ϗ τὸ γενικὸν ὁλόκληρον ἔϛαι ἴϛον μηδενὶ, εἴτ' ἕν $\frac{\pi\Pi\chi^2}{4\eta} + \Gamma = 0$, ϗ ἑπομένως $\Gamma = -\frac{\pi\Pi\varepsilon^2}{4\eta}$. ἡ ϛερεότης ἄρα τμήματος παραβολικῆς κωνοίδος, ἀπολαμβανομένε ὑπὸ δύω παραλλήλων ἐπιπέδων, ὧν τῷ μὲν τὸ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀπόϛημα = χ, θατέρῳ δὲ = ε, ὑπάρχει = $\frac{\pi\Pi\chi^2}{4\eta} - \frac{\pi\Pi\varepsilon^2}{4\eta}$.

236. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὴν ἐκτεθεῖϛαν μέθοδον ϗ ἡ ὑπερβολικὴ κωνοΐς, εἴτ' ἕν τὸ ϛερεὸν, τὸ ἀπογεννώμενον περιαγωγῇ τῆς ὑπερβολῆς περὶ ἕνα τῶν ἑαυτῆς ἀξόνων, κυβίζεται· ἥτε ἐλλειπτικὴ κωνοΐς, ἡ περιαγωγῇ τῆς ἐλλείψεως περὶ τὸν αὐτῆς ἐλάϛω ἄξονα ἀπογεννωμένη, ἥτις καὶ ἐκτενὴς καλεῖται, ἀντιδιαϛελλομένη τῆς ἑτέρας, ἥτις ἐπιμήκης ὀνομάζεται· εὑρεθήϛεται δὲ ὅτι ϗ ἡ ἐκτενὴς ἴϛη ἐϛὶ $\frac{2}{3}$ κυλίνδρε αὐτῇ περιγεγραμμένε, τῇτ' ἔϛιν α ϗ β ἀξόνων ὄντων τῆς γεννητρίας ἐλλείψεως, τῷ μὲν μείζονος, θατέρῳ δὲ ἐλάϛονος, ἡ μὲν ἐπιμήκης ἔϛιν $= \frac{\pi\alpha\beta\beta}{12\eta}$, ἡ δ' ἐκτενὴς $= \frac{\pi\alpha\alpha\beta}{12\eta}$· ἡ ἄρα

ἐπιμήκης ἔσι πρὸς τὴν ἐκτενῆ :: $\frac{παββ}{12η} : \frac{ππαβ}{12η}$ ::

β : α, ὥσπερ ὁ ἐλάσσων πρὸς τὸν μείζονα ἄξονα.

237. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Κυβίσαι κωνοΐδα, ἀπογενωμένην ὑπὸ ἡμιπαραβολίς ΑΜ, περιενεχθέντος περὶ τὴν αὐτῆ ἀπτομένην ΑΒ (κ. 76).

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ἡ παράμετρος = α, καὶ Αι = Ζν = χ, καὶ ιν = ΑΖ = υ, καὶ ΖΒ = δυ· ἐκὼν κύκλος ὁ ἀκτῖνι τῇ ΖΝ γεγραμμένος ἔσαι = $\frac{π·χχ}{2η}$, ὅς τις, πολλαπλασιαθεὶς ἐπὶ δυ ἀποδώσει τὸ στοιχεῖον, τὸ ἀπογενώμενον ὑπὸ τῆ ἐπιπέδς ΒΜΖν = $\frac{πχ^2δυ}{2η} = \frac{πυ^4δυ}{2α^2υ}$

(ὅτι $χ^2 = \frac{υ^4}{αα}$, πηγάζον ἐκ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην φύσεως·) ἕ τὸ ὁλόκληρόν ἐσι $\frac{πυ^5}{10α^2η} = \frac{πα^2χ^2υ}{10α^2η} = \frac{πχ^2υ}{10·η}$, τιθεμένς τῆ $α^2χ^2$ ἀντὶ $υ^4$· ἐὰν ὑποτεθῇ χ = ΑΠ = β, καὶ ΠΜ = υ = ϑ, ἡ ἐκ τῆ ἐπιπέδς ΑΜΒ ἀπογεννηθεῖσα κωνοΐς ἔσαι = $\frac{πβ^2ϑ}{10η}$· ἀλλὰ κύκλος, ἕ ἡ ἀκτὶς = β, ἔσιν = $\frac{πβ^2}{2η}$· ἐὰν αὕτη ἡ ποσότης πολλαπλασιαθῇ ἐπὶ ϑ, πορισθήσεται κύλινδρος ὁ $\frac{πβ^2ϑ}{2η}$, ὅς ἔσαι πρὸς τὴν εὑρεθεῖσαν κωνοΐδα :: $\frac{πβ^2ϑ}{2η} : \frac{πβ^2ϑ}{10η}$

$:: \frac{1}{2\eta} : \frac{1}{10\eta} :: 10\eta : 2\eta :: 10 : 2 :: 5 : 1$·

ῥᾷσα δ' ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι κωνοῖς ἡ ἀπογεννηθεῖσα ἐκ τῆ ἐπιπέδῳ ΑΠΜ ἔσιν $= \frac{2\pi\beta^2\vartheta}{5\eta}$, ὃ δὴ ἀκριβῶς συνάδει τοῖς προαποδεδειγμένοις (234).

238. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς'. Κυβίσαι κωνοῖδα ὑπερβολικὴν, ἀπογεννωμένην ὑπὸ τῆ ἐπιπέδῳ ΣΡμκ ἐν τῷ τὴν κυκλικὴν ὑπερβολὴν ΖΜΣ περιάγεσθαι περὶ τὴν ἀσύμπτωτον ΑΡ (χ. 77).

ΑΥΣΙΣ. Ἔσω ἐξίσωσις τῆς κυκλικῆς ὑπερβολῆς ἡ $\upsilon\chi = \alpha^2$, καὶ ὑποτεθείσθω ΑΡ = ΡΣ = α· ἀκῆν ἔσαι $\upsilon^2 = \frac{\alpha^4}{\chi\chi}$· ἄρα $\frac{\pi}{2\eta} \times O\upsilon^2\delta\chi = \frac{\pi}{2\eta}.O\frac{\alpha^4}{\chi^2}\delta\chi = \frac{\pi}{2\eta}$·

$O\ \alpha^4\ \chi^{-2}\delta\chi = -\frac{\pi}{2\eta}\alpha^4\chi^{-1} + \Gamma$· ἵνα δὲ διορισθῇ ἡ ἀμετάβλητος Γ, σημειωτέον, ὅτι τὸ ζητέμενον στερεὸν ὀφείλει ὑπάρχειν = ο, ὅταν ἡ χ = ΑΡ = α· ἄρα $-\frac{\pi}{2\eta}\alpha^3 + \Gamma = o$, καὶ $\Gamma = +\frac{\pi\alpha^3}{2\eta}$· τὸ δὲ πλῆρες ὁλόκληρον ἔσαι $= \frac{\pi\alpha^3}{2\eta} - \frac{\pi\alpha^4}{2\eta\chi}$· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\chi = \infty$, τὸ στερεὸν γίνεται $= \frac{\pi\alpha^3}{2\eta}$· ἀλλὰ $\frac{\pi\alpha^2}{2\eta}$ παρίσησι κύκλον, ὧ ἡ ἀκτὶς = α, καὶ $\frac{\pi\alpha^3}{2\eta}$ κύλινδρον, ὧ ἡ μὲν ἀκτὶς τῆς βάσεως ἔσιν = α, τὸ δὲ ὕψος καὶ αὐτὸ = α, ἢ κύλινδρον γεγραμμένον ἐκ τῆς τῶ ΑΡΣΤ ἐπιπέδῳ περὶ τὴν

ΑΡ εὐθεῖαν περιαγωγῆς· ἄρα ὁ κύλινδρος ἴτος ἴσος ἐςὶ τῇ ἀπειρομήκει κωνοΐδι τῇ γεγραμμένῃ ΡΣΜκ (*).

239. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ΄. Εὑρεῖν τὴν ςερεότητα τμήματος κυλινδρικῦ τῦ ΑΔΒΕ, τῦ ἀπογεννωμένυ, εἰ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ ΔΑΒ, πλαγίῳ τῇ τῦ κυλίνδρυ βάσει, κ᾽ διὰ τῦ κέντρυ αὐτῆς διήκοντι, τμηθείη (κ. 78.)

ΛΥΣΙΣ. Ε᾽πινενοήσθω τὸ ςερεὸν τῦτο τετμημένον ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων, ἔγγιςα ἀλλήλοις, κ᾽ καθέτων τῇ βάσει ΑΕΒ (κ. 79), αἱ τοίνυν τομαὶ ἔσονται τρίγωνα ὅμοια, κάθετα τῇ τῦ τμήματος βάσει, εἴγε αἱ αὐτῶν γωνίαι, κείμεναι ἐπὶ τῆς διαμέτρυ ΑΒ, καθέτυ τῇ ΕΚ, ἔσονται ἴσαι· κ᾽ ἑπομένως ἔσονται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα· ὧν κληθείσης η τῆς ἀκτῖνος ΚΕ τῆς βάσεως, κ᾽ ι τῦ ὕψυς ΔΕ, κ᾽ υ τῆς ΠΜ βάσεως τῦ τριγώνυ ΠΜΝ, πορισθήσεται ΚΕΔ : ΠΜΝ

:: ηη : υυ· ἀλλὰ $\text{ΚΕΔ} = \frac{\eta\eta}{2}$· ἄρα $\text{ΠΜΝ} \ \frac{\eta\eta\upsilon\upsilon}{2\eta\eta} =$

$\frac{\iota\upsilon\upsilon}{2\eta}$· κληθείσης ἄρα τῆς ΑΠ = χ, ἔσαι τὸ πάχος Ππ τῆς ὑπὸ δύω προσεχῶν ἐπιπέδων ἀπολαμβανομένης ςιβάδος, = δχ· αὐτὴ δὲ ἡ ςιβὰς = $\frac{\iota\upsilon\upsilon\delta\chi}{2\eta}$· ἀλλὰ υ ἐςὶν ἡ τεταγμένη τῦ εἰς βάσιν ὑποκειμένυ κύκλυ, κ᾽ ἐν αὐτῷ ἐςιν ἑπομένως υυ = 2ηχ — χχ· ἡ ἄρα ςοιχειώδης ςι-

---

(*) Περὶ τῦ ἐξαισίυ τύτυ ἰδιώματος τῆς ὑπερβολῆς, ὅρα κ᾽ Νικηφ. Θεοτ. Στοιχ. Μαθημ. τόμ. Β. Σελ. 208. εὐρετὴς δὲ τύτυ ἐγένετο ὁ ἐκ Φαένσης Τοριχέλλιος ὁ τῦ Γαλιλαίυ ἀκροατὴς, ὁ κατὰ τὸ 1647 ἔτος τὸν βίον μεταλλάξας.

βὰς γίνεται $\frac{\iota\eta\delta\chi.(2\eta\chi-\chi\chi)}{2\eta}$, ἢ $\frac{\iota}{2\eta}\cdot(2\eta\chi\delta\chi-\chi\chi$ $\delta\chi)$, ἕ τὸ ὁλόκληρον, τῦ σερεῦ ἀπὸ τῦ Α ἀρχομένυ, ἔ-σιν $\frac{\iota}{2\eta}(\eta\chi^2-\frac{\chi^3}{3})$· εἰς ἄρα εὕρεσιν ὅλυ τῦ σερεῦ ὑπο-τεθείσω $\chi=2\eta$· ὅθεν πρόεισιν $\frac{\iota}{2\eta}\times(4\eta^3-\frac{8\eta^3}{3})$

εἶτ' ἴσον $\frac{2}{3}\iota\eta^3=\frac{\iota\eta}{2}\times\frac{4}{3}\eta=$ ΚΕΔ $\times\frac{4}{3}$ ΑΚ $=$ ΚΕΔ $\times\frac{2}{3}$ ΑΒ, τῦτ' ἔσι δυσὶ τριτημορίοις τῦ πρίσματος, ἕ βάσις μὲν τὸ τρίγωνον ΚΕΔ, ὕψος δὲ ἡ διάμετρος ΑΒ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ ὁλοκληρώσεως ποσοτήτων, αἷς ἐνυπάρχεσιν ἡμίτονα ϗ συνημίτονα.

240. Ἡ ὁλοκλήρωσις τῶν, αἷς ἔνεσιν ἡμίτονα ϗ συνημίτονα, ποσοσήτων ἐπερείδεται ὅλως τοῖς ἀποδοθεῖσι (35) περὶ τῆς λήψεως τῶν κατ' αὐτὰς ἀπειροσῶν· εἴδομεν ἓν ἐκεῖθι, ὅτι δ(ημ.ψ) $=$ δψ. συνημ.ψ, ϗ δ (συνημ. ψ) $=-$ δψ. ἡμ. ψ. ἐναλλὰξ ἄρα, τὸ ὁλόκληρον τῦ δψ. συνημ.ψ ἔσαι ἡμ. ψ, ἢ γενικώτερον ἡμ. ψ $+$ Γ, ὃ ϗ αὐτὸ ἔχει τὸ προτεθὲν ἀπειροσόν· ὡσαύτως τὸ ὁλόκληρον τῦ $-$ δ. ψ. ἡμ. ψ. ἔσαι συνημ ψ $+$ Γ· εἰς ταύτας δὲ τὰς δύω περιπτώσεις ἀνάγεται ἡ ὁλοκλήρωσις πασῶν τῶν ἄλλων ποσοτήτων, αἳ σύγκεινται ἐξ ἡμιτόνων ϗ συνημιτόνων, διατηρῦσι ϗ τὰς ἐς δεῦρο ἀποδοθέντας γενικὰς κανόνας τῆς ὁλοκληρώσεως.

Τὸ τοίνυν ὁλόκληρον τοῦ δψ συνημ. 3ψ, εἴτ' οὖν $\frac{3\,\delta\psi\ \text{συνημ.}\ 3\psi}{3}$, ἔξαι $\frac{\text{ἡμ.}\ 3\psi}{3}$ + Γ· ὡσαύτως τὸ ὁλόκληρον τοῦ δψ. ἡμ. 3ψ εὑρεθήσεται, γραφέντος $\frac{-3\,\delta\psi.\ \text{ἡμ.}\ 3\psi}{-3}$, οὗ ὁλόκληρον ἔξαι τὸ $\frac{\text{συνημ.}\ 3\psi}{-3}$ + Γ.

Ἐν γένει δὲ, Οδψ. ἡμ· μψ (τοῦ μ ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος ἄτρεπτον) μεταβάλλει εἰς $\frac{0 - \mu\delta\psi.\ \text{ἡμ.}\ \mu\psi}{-\mu}$, ἧς ἀποκαθίσαται $\frac{-\ \text{συνημ.}\ \mu\psi}{\mu}$ + Γ.

Ἐὰν δὲ προκέηται (ἡμ. ψ)$^{\nu}$ δψ. συνημ. ψ, παρατηρητέον ὡς αὕτη ἡ ποσότης ταὐτίζεται τῇ (ἡμ. ψ)$^{\nu}$ δ (ἡμ. ψ)· ἀλλ' ἐκληφθεῖσαν τὴν ἡμ. ψ ὡς ἁπλῶς τρεπτὴν ποσότητα ὁλοκληρώσαντες διὰ τοῦ γενικοῦ κανόνος, ἔξομεν $\frac{(\text{ἡμ.}\ \psi.)^{\nu+1}}{\nu+1}$ + Γ.

Ἐὰν ἡ τὸ προκείμενον ἀπειροσὸν (ἡμ. μψ)$^{\nu}$ δψ. συνημ. μψ, γραπτέον αὐτὸ $\frac{(\text{ἡμ.}\ \mu\psi)^{\nu}\,\mu\delta.\,\psi\ \text{συνημ.}\ \mu\psi}{\mu}$, ὅπερ ταὐτίζεται τῷ $\frac{(\text{ἡμ.}\ \mu\psi)^{\nu}\,\delta(\text{ἡμ.}\ \mu\psi)}{\mu}$, οὗ ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $\frac{(\text{ἡμ.}\ \mu\psi)^{\nu+1}}{\mu(\nu+1)}$.

Ὡσαύτως, ἵν' ὁλοκληρωθῇ τὸ (συνημ. μψ)$^{\nu}$ δψ ἡμ. μψ, γραπτέον $\frac{(\text{συνημ.}\ \mu\psi)^{\nu}.\ -\mu\delta\psi.\ \text{ἡμ.}\ \mu\psi}{-\mu}$, ὅπερ ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $\frac{(\text{συνημ.}\ \mu\psi)^{\nu+1}}{-\mu(\nu+1)}$ + Γ.

Ε'ὰν δὲ προκέηται εἰς ὁλοκλήρωσιν δψ ἡμ. πψ. συνημ. κψ, ἀναμνησέον (Γεωμ. 507) ὅτι α, β δυεῖν οἱωνδήποτε γωνιῶν ἐσῶν, ἔσιν ἡμ (α+β) = ἡμ. α. συνημ. β + ἡμ. β. συνημ. α· ϗ ἡμ (α — β) = ἡμ. α. συνημ. β — ἡμ. β. συνημ. α· ὅθεν συνάγεται ἡμ. α συνημ. β = $\frac{1}{2}$ ἡμ. (α+β) + $\frac{1}{2}$ ἡμ. (α — β). ὡσαύτως ἐπεί (Γεωμετ. 508) ἐσι συνημ. (α+β) συνημ. α. συνημ. β — ἡμ. α. ἡμ. β· ϗ συνημ. (α — β) = συνημ. α. συνημ. β + ἡμ. α. ἡμ. β, πορισθήσεται συνημ. α × συνημ. β = $\frac{1}{2}$ συνημ. (α+β) + $\frac{1}{2}$συνημ. (α — β), ϗ ἡμ. α × ἡμ. β = $\frac{1}{2}$ συνημ. (α — β) — $\frac{1}{2}$ συνημ. (α+β).

Ε'κ τέτων τοίνυν τῶν ἀρχῶν τραπείη ἂν τὸ ἡμ. πψ × συνημ. κψ εἰς $\frac{1}{2}$ ἡμ. (πψ + κψ) + $\frac{1}{2}$ ἡμ. (πψ — κψ) = $\frac{1}{2}$ ἡμ. (π+κ)ψ + $\frac{1}{2}$ ἡμ. (π — κ) ψ· ἐκεῖν ὁλοκληρωτέον ἔσαι τὸ $\frac{1}{2}$ δψ ἡμ. (π+κ) ψ + $\frac{1}{2}$ δψ ἡμ. (π — κ)ψ, ἕτινος, γραφέντος ἔτω, $\frac{1}{2}$

$$\frac{(\pi+\kappa)\,\delta\psi \times \text{ἡμ.}\,(\pi+\kappa)}{\pi+\kappa} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{(\pi-\kappa)\,\delta\psi \times \text{ἡμ.}\,(\pi-\kappa)\psi}{(\pi-\kappa)}$$

, ὁλόκληρον προδήλως ἐσὶ τὸ

$$\frac{-\frac{1}{2}\,\text{συνημ.}\,(\pi+\kappa)\,\psi}{\pi+\kappa} - \frac{\frac{1}{2}\,\text{συνημ.}\,(\pi-\kappa)\psi}{\pi-\kappa} + \Gamma.$$

Ο'λοκληρωθήσεται ὡσαύτως τὸ δψ. ἡμ. πψ συνημ. κψ. ἡμ. ρψ κτ, μετατρεπομένων τῶν δε τῶν γινομένων εἰς ἡμίτονα, ἢ συνημίτονα, τε ἀθροίσματος, ἢ τῆς διαφορᾶς, τῶν τόξων πψ, κψ, ρψ κτ διὰ τῶν αὐτῶν ἀρχῶν.

Ε'ὰν προτεθῇ δψ (ἡμ. ψ)^3, μεταβαλεῖ εἰς δψ. ἡμ. ψ (ἡμ. ψ)^2· ἀλλὰ (ἡμ. ψ)^2, ἢ ἡμ. ψ × ἡμ. ψ ἔσι, κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀρχὴν, = $\frac{1}{2}$ συνημ. (ψ — ψ) — $\frac{1}{2}$

συνημ. $(\psi+\psi) = \frac{1}{2}$ συνημ. $o - \frac{1}{2}$ συνημ. $2\psi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ συνημ. 2ψ, εἰ συνημ. $o = 1$· ἄρα ἡμ. ψ $(\dot{\eta}\mu.\psi)^2 = \frac{1}{2}$ ἡμ. $\psi - \frac{1}{2}$ ἡμ. $\psi \times$ συνημ. 2ψ. ἄρα $\delta\psi$ $(\dot{\eta}\mu.\psi)^3 = \frac{1}{2}\delta\psi$. ἡμ. $\psi - \frac{1}{2}\delta\psi$. ἡμ. ψ. συνημ. 2ψ. γενήσεται ἄρα ἡμ. ψ. συνημ. 2ψ, ὥσπερ γέγονε καὶ ἐπὶ τοῦ ἡμ. $\pi\psi$. συνημ. $\kappa\psi$, καὶ εὐπετῶς ὁλοκληρωθήσεται· δῆλον ἄρα, ὅπως ὁλοκληρωθήσεται τὸ $\delta\psi$ $(\dot{\eta}\mu.\psi)^\nu$, τοῦ ν ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικὸν ἐμφαίνοντος· κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τὸ $\delta\psi$ $(\text{συνημ}\,\psi)^\nu$· δυνατὸν ἄρα διὰ τῶν ἐκτεθειμένων τῶν δε ἀρχῶν ὁλοκληρῶσαι καὶ τὰς τοιαυτῴδεις ποσότητας $\delta\psi$ $(\dot{\eta}\mu.\pi\psi)^\mu$ $(\text{συνημ}.\kappa\psi)^\nu$ $(\dot{\eta}\mu.\rho\psi)^\sigma$ κτ. τῶν μ, ν, σ ἀριθμὲς ὁλοχερεῖς ὑπαρκτικὲς ἐμφαινόντων.

Τελευταῖον δὲ, διὰ τῶν ἀρχῶν τούτων, καὶ τῶν προαποδεδομένων εἰς ὁλοκλήρωσιν κανόνων, ὁλοκληρωθήσεται ἅπαν ἀπειροσὸν, ἡμίτονα καὶ συνημίτονα περιέχον, ὅταν ὑπάρχῃ γεωμετρικῆς ὁλοκληρώσεως ἐπιδεκτικόν· ἀλλὰ καὶ ὅταν ἅπτομένας περιέχῃ, ἀναχθήσεται εἰς τὰ ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων περιεκτικὰ, παρατηρῆσι μόνον, ὅτι $\text{απ}.\psi = \frac{\text{ἡμ}.\psi}{\text{συνημ}.\psi}$ (Γεωμ. 502).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τῆς τρόπε τῆς διὰ προσεγγίσεως ὁλοκληρῆν, καί τινων αὐτῆς χρήσεων.

241. Τὰς μονωνύμες τῶν ἀπειροσῶν ποσοτήτων δὲ λόγε ἀξιῶμεν ἐνταῦθα, ὡς μαλ' εὐπετῶς ἀεὶ, ὡς εἴδομεν, ὁλοκληρωμένας· μόνας δέτοι τὰς πολυωνύμες κατὰ τὰ ἐφεξῆς ἡμῖν ἀπαντήσοντα ὑποδείγματα.

Η δὲ τέχνη τῦ διὰ προσεγγίσεως ὁλοκληρῦν ἐν τῷ μεταβάλλειν κεῖται τὴν προτιθεμένην ποσότητα εἰς σειρὰν μονωνύμων, ὧν ἡ δύναμις προϊῦσα ἀπομειῦται· ἐκάστυ γὰρ ὅρυ τηνικαῦτα εὐχερῶς ὁλοκληρυμένυ, ἀπόχρη λαβεῖν αὐτῶν ἱκανύς τινας, ὅσυς ἐμφαίνειν παρὰ μικρὸν ἅπασαν τὴν τῦ ὁλοκλήρυ δύναμιν.

242. Ὅ"ν δ' ἀπεδώκαμεν κανόνα (Συμ. Λ. 152) τῦ πᾶσαν ποσότητα εἰς βαθμὸν τὸν προκείμενον αἴρειν, τῷ αὐτῷ κἀνταῦθα χρησόμεθα εἰς τὴν διὰ προσεγγίσεως ὁλοκλήρωσιν.

243. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Εὐθύναι τὸ κυκλικὸν τόξον ΑΜ διὰ τῦ αὐτῦ παρημιτόνυ ΑΠ (χ. 73).

ΛΥΣΙΣ. Ε"στω τόξον ἐλάχιστον τὸ Μμ· ἀχθείσης ἔν τῆς Μρ παραλλήλυ τῇ ΑΠ, κ᾽ ἐπιζευχθείσης τῆς ἀκτῖνος ΚΜ, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΠΜ, Μρμ, ἔσαι ΠΜ : ΚΜ : : Μρ : Μμ· ἀλλὰ γὰρ κληθείσης, τῆς μὲν ΑΠ = χ, τῆς δὲ διαμέτρυ ΑΒ = α, ἡ" = 1 (διὰ τὸ ἁπλέστερον), ποριωθήσεται Μρ = δχ, κ᾽ ΚΜ = ½, κ᾽ ΠΜ = √(χ − χχ)· ἄρα √(χ − χχ) : ½ : : δχ : Μμ = $\frac{\frac{1}{2}\delta\chi}{\sqrt{(\chi-\chi\chi)}}$, κ᾽ ἑπομένως ΑΜ = Ο $\frac{\frac{1}{2}\delta\chi}{\sqrt{(\chi-\chi\chi)}}$· αὗτη δὲ ἡ ποσότης ὁλοκλήρωσιν ἧς ἐπιδέχεται διὰ τῶν προαποδεδομένων κανόνων· διὸ δὴ μεταβλητέον αὐτὴν εἰς Ο $\frac{\frac{1}{2}\delta\chi}{\chi^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1-\alpha)}}$, ἔπειτα εἰς Ο ½ $\chi^{-\frac{1}{2}}$ δχ $(1-\chi)^{-\frac{1}{2}}$. τὸ δὲ $(1-\chi)^{-\frac{1}{2}}$ ἀνακτέον (Συμβ. Λογ. 149) εἰς σειράν· ὅθεν δι᾽ ἀναγωγῆς εὑρεθήσεται $(1-\chi)^{-\frac{1}{2}}$ = 1 + ½ χ + ⅜ χ^2 + $\frac{5}{16}$ χ^3 + κτ.· ἄρα Ο ½ $\chi^{-\frac{1}{2}}$ δχ $(1-\chi)^{-\frac{1}{2}}$ = Ο ½ $\chi^{-\frac{1}{2}}$ δχ (1 + ½ χ + ⅜ χ^2 + $\frac{5}{16}$

$$\chi^3 + \text{κτ.}) = 0\ (\tfrac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\delta\chi + \tfrac{1}{4}\chi^{\frac{1}{2}}\delta\chi + \tfrac{3}{16}\chi^{\frac{3}{2}}\delta\chi$$

$$+ \tfrac{5}{32}\chi^{\frac{5}{2}}\delta\chi + \text{κτ.}) = \frac{\frac{1}{2}\chi^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}\chi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{3}{16}\chi^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} +$$

$$\frac{\frac{5}{32}\chi^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \text{κτ.} = \chi^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{6}\chi^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{40}\chi^{\frac{5}{2}} + \tfrac{5}{112}\chi^{\frac{7}{2}} +$$

κτ., ποσότης, ἧ ἐδέν ἐςι προσθεῖναι ποσὸν ἄτρεπτον, εἴγε, ὅταν ἡ $\chi = 0$, καὶ αὕτη φέρεται εἰς 0, ὥσπερ καὶ ἔχειν ἐπάναγκες, ὅτι τὸ ἐμφαινόμενον ὑπ' αὐτῆς τόξον AM τηνικαῦτα ὑπάρχει μηδέν.

Δυνατὸν δὲ, διὰ τὸν κοινὸν πολλαπλασιασὴν $\chi^{\frac{1}{2}}$, μεταχηματίσαι τὴν τοῦ AM τόξου ἔκθεσιν εἰς τήν δε $\chi^{\frac{1}{2}}$ $(1 + \frac{1}{6}\chi + \frac{3}{40}\chi^2 + \frac{5}{112}\chi^3 + \text{κτ.})$· τὸ δὲ παρημίτονον χ, ἀεὶ ἔλαττον ὂν τῆς διαμέτρου 1 (πλὴν εἰ ζητοῖτο ἡ τῆς ἡμιπεριφερείας εὐθυνσις), ἀεί ἐςι κλάσμα, καὶ ἑπομένως αἱ δυνάμεις τῶν τῆς σειρᾶς ὅρων ἀπομειωθήσονται τοσούτῳ μᾶλλον, ὅσῳ τὸ παρημίτονον τοῦ ζητουμένου τόξου ὑπάρχει ἔλαττον· Ζητουμένου ἂν, φέρε εἰπεῖν, τὸ μῆκος τόξου, οὗ τὸ παρημίτονον ἑκατοσημόριον ἂν εἴη τῆς διαμέτρου, ἔσαι $\chi = \frac{1}{100} = 0{,}01$, καὶ ἑπομένως $\chi^{\frac{1}{2}} = 0{,}1$· εὑρεθήσεται ἄρα τοῦ τόξου τοῦ δε δύναμις ἡ $0{,}1\ [1 + \frac{0{,}01}{6} + \frac{3(0{,}01)^2}{40} + \frac{5}{112}\cdot(0{,}01)^3]$· καὶ ἐπείπερ ὁ ἐφεξῆς ὅρος ταύτης τῆς σειρᾶς ἑκατοντάκις ἐλάττων ἐςὶ τοῦ ἐχάτου τῶν ἐκτεθέντων (ἕκασος γὰρ ἑκατοσημόριόν ἐςι τοῦ ἡγησαμένου, ἐξετάσασιν, ἥτις ἐςὶν ἡ δύναμις τοῦ ὅρου $\frac{5}{112}(9{,}01)^3$), ἐξέσαι λαβεῖν αὐτοῦ τὸ ἑκατοσημόριον, καὶ γνῶναι τὴν ἀκρίβειαν τῆς τοῦ τόξου δυ-

νάμεως, ἐκδηλωμένης διὰ τῶν τεσσάρων ἀρητικῶν ὅρων· ἀλλὰ $\frac{5}{112}(0,01)^3 = \frac{5}{112}(0,000001) = \frac{0,000005}{112}$ $= 0,00000446$, ὅπερ ἑκατοσημόριόν ἐςι τὸ $0,00000$ 0000446· δυνατὸν ἄρα ἀδεῶς ἐκτιμῆσαι ἕκασον ὅρον τῆς καθ' ἡμᾶς ταύτης σειρᾶς ἕως δεκαδικῶν 10, μηδόλως διςάσαντας, μὴ ἡ ἐντεῦθεν προϊοῦσα τῇ τόξῳ δύναμις ἐλλειπὴς τῇ ἀληθεῖ εἴη μονάδι κατὰ τὸν ἔνατον χῶρον· ὑπὲρ ὃν ἔξομεν, $\frac{5}{112}(0,01)^3 = 0,0000000446$, $\frac{3}{40}(0,01)^2 = 0,0000075000$, $\frac{0,01}{6} = 0,0016666666$· ἄρα τὸ κεφάλαιον τῆς σειρᾶς ἔσαι 0,1 (1,0016742112), ἢ τελευταῖον (ἀρκεσθεῖσιν ἐννέα δεκαδικοῖς) 0,100167 421· ἀδεῶς δ' ἂν εὑρεθείη ᾧ ὁ δέκατος ὅρος· τοιαύτη ἄρχ ἐςὶν ἡ δύναμις τῇ τόξῳ, ἧ τὸ παρημίτονον ἑκατοσημόριόν ἐςι τῆς ἀκτῖνος.

244. ΠΟΡΙΣΜΑ. Εἰ τοίνυν ἐγινώσκομεν, ὁσάκις ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν τῇδε τῇ τόξῳ ἐμπεριέχοιτο ταῖς 360°, πολλαπλασιάσαντες τόδε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸν, ὁσάκις ἐμπεριέχονται αἱ μοῖραι τῇ τόξῳ ταῖς 360°, ἐμφαίνοντα ἀριθμὸν, εὑρίσκομεν ἂν τὸ προσεχὲς τῇ κυκλικῇ περιφερείᾳ μῆκος· ἀγνοεῖται μέντοι ὁ λόγος ἕτος.

245. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπειδὴ (Γεωμ. 495) τὸ ἡμίτονον τῇ 30° ἥμισύ ἐςι τῆς ἀκτῖνος· γινωσκομένῳ δὲ τῷ ἡμιτόνῳ εὐχερῶς εὑρίσκεται τὸ παρημίτονον (Γεωμ. 494)· δυνατὸν ἄρα λαβεῖν ἐν τῷ λογισμῷ τὸ παρημίτονον τῇ 30°, ᾧ ἀντὶ χ ἀντικατασῆσαι ἐπὶ τῆς εἰρημένης σειρᾶς· πολλαπλασιάσαντας δὲ τὸ ἀποτελεσθὲν ἐπὶ 12, ὃς ἐμφαίνει ὁσάκις τὸ 30° ἔνεσι ταῖς 360°, εὑρεῖν τὸ τῇ κυκλι-

κῇ περιφερείᾳ προσεχὲς μῆκος· ἀλλ' ἐπείπερ ἡ σειρὰ βραχύτι συγκλίνει, ὡς δεῖσθαι πολλῶν ὅρων εἰς εὕρεσιν τοῦ ἔγγιον τῇ περιφερείᾳ μήκους, χρησόμεθα πρὸς τοῦτο μεθόδῳ ἑτέρᾳ διὰ τοῦ ἐφεξῆς προβλήματος.

246. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Κύκλου τόξου δοθὲν ἑτέρῳ λόγῳ εὐθύναι (χ. 80).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθωσαν, ἥτε ἁπτομένη AN, καὶ ἡ τέμνουσα KMN, καὶ αὐτῇ προσεχεστάτη τέμνουσα ἡ Kμν, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ K, διαστήματι δὲ τῷ KN, γεγράφθω τόξον ἐλάχιστον τὸ Nρ, ὅπερ ἂν ἐκληφθείη ὡς κάθετος τῇ Kν· καὶ τὸ τριγωνίδιον Nρν ὅμοιον ἔσται τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ KAν· παρὰ γὰρ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, κοινὴν ἔχουσι τὴν πρὸς τῷ ν· ἔσται ἄρα ὅμοιον καὶ τῷ τριγώνῳ KAN, τῷ ἐλάχιστα διεννοχότι τοῦ KAν· ἄρα KN : KA :: Nν : Nρ $= \frac{KA \times N\nu}{KN}$· ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τομέων KNρ, KMμ,

ἔστι KN : KM, ἢ KA :: Nρ $= \frac{KA \times N\nu}{KN}$: Mμ $=$

$\frac{KA^2 \times N\nu}{KN^2}$· κληθέντος ἓν τοῦ AN $= \chi$, καὶ τῆς ἀκτῖνος KA $= \alpha$, ἔσται Nν $= \frac{\delta\chi}{}$, καὶ KN $= \sqrt{(\alpha\alpha + \chi\chi)}$· ἄρα ἡ τοῦ Mμ δύναμις γενήσεται $\frac{\alpha\alpha\delta\chi}{\alpha\alpha + \chi\chi}$· ἄρα OMμ $=$

AM $=$ O. $\frac{\alpha\alpha\delta\chi}{\alpha\alpha + \chi\chi}$· αὕτη ἓν ἡ ποσότης ἀκριβῶς ὐχ ὁλοκληροῦται· ἵνα δὲ ὡς ἔγγιστα τοῦτο γένηται, μεταχηματιστέον αὐτὴν εἰς τὴν O. $\alpha\alpha\delta\chi\,(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-1}$· καὶ δὴ εὑρεθείσης (Συμβ. Λογ. 149, 548) τῆς $(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-1} =$

$\alpha^{-2}\left(1-\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\chi^4}{\alpha^4}-\frac{\chi^6}{\alpha^6}+\frac{\chi^8}{\alpha^8}-\text{κτ.}\right)$, πορισθήσεται $O.\alpha\alpha\delta\chi\,(\alpha\alpha+\chi\chi)^{-1}=O.\delta\chi\left(1-\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\chi^4}{\alpha^4}-\frac{\chi^6}{\alpha^6}+\frac{\chi^8}{\alpha^8}-\text{κτ.}\right)=O.(\delta\chi-\frac{\chi^2\delta\psi}{\alpha^2}+\frac{\chi^4\delta\chi}{\alpha^4}-\frac{\chi^6\delta\chi}{\alpha^6}+\frac{\chi^8\delta\chi}{\alpha^8}\cdot-\text{κτ.})=\chi-\frac{\chi^3}{3\alpha^2}+\frac{\chi^5}{5\alpha^4}-\frac{\chi^7}{7\alpha^6}+\frac{\chi^9}{9\alpha^8}-\text{κτ.})=\chi\left(1-\frac{\chi^2}{3\alpha^2}+\frac{\chi^4}{5\alpha^4}-\frac{\chi^6}{7\alpha^6}-\frac{\chi^8}{9\alpha^8}-\text{κτ.}\right)$. Λοιπὸν ἓν ἐσιν εἰδέναι, εἰ τόξον ἐγνωσμένον, ὁσάκις ἐμπεριέχεται τῇ περιφερείᾳ, ἔχει γνωσὴν ἁπτομένην· ἀλλὰ τὸ 45° τόξον, ὀκτάκις ἐμπεριεχόμενον τῇ περιφερείᾳ, ἁπτομένην ἔχει τῇ ἀκτῖνι ἴσην (Γεωμ. 498)· ὑποτεθέντος ἄρα τοῦ $\chi=\alpha$, τὸ μῆκος τοῦ 45° τόξου ἐμφανεῖ ἡ σειρὰ $\alpha.\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{κτ.}\right)$· ἀλλ' ἐπείπερ οἱ ὅροι ταύτης τῆς σειρᾶς πάνυ βραδέως ἀπομειοῦνται, σκεπτέον, εἰ ἄρα δυναίμεθα τὸ 45° τόξον ἀναλύσαι εἰς δύω ἕτερα, ὧν εἶεν αἱ ἁπτόμεναι γνωσαί· ὐδὲν δὲ ὅλως συμφέρει εἰδέναι τὸν τῶν μοιρῶν ἑκατέρου τούτων ἀριθμὸν, εἰ μόνον ἄμφω 45° πληροῖεν· διὰ γὰρ τῶν αὐτῶν ἁπτομένων εὑρεθέντων τῶν κατ' αὐτὰ μήκεων, συνάψαντες αὐτὰ, ἕξομεν τὸ μῆκος τοῦ 45° τόξου· ἐπεὶ δὲ ἑκάτερον ἔλαττον ἔσαι τοῦ 45°, ἑκατέρα τῶν αὐτῶν ἁπτομένων ἐλάττων ἔσαι τῆς ἀκτῖνος, ᾧ ἡ σειρὰ συγκλινεῖ τάχιον, ᾧ ὁ λογισμὸς τελεωθήσεται ῥᾷον.

Ἀλλὰ τὰ εἰρημένα (Γεωμ. 502) παρέχεται ἡμῖν τὴν μέθοδον τοῦ εὑρεῖν δύω τοιάδε τόξα· ᾧ γὰρ ὁποιωνοῦν ὄντων δύω τόξων τῶν α, β, ἔσαι απ. $(\alpha+\beta) =$

$$\frac{\text{ημ. } (\alpha+\beta)}{\text{συνημ. } (\alpha+\beta)} = \frac{\text{ημ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta + \text{ημ. } \beta \times \text{συνημ. } \alpha}{\text{συνημ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta - \text{ημ. } \beta \times \text{ημ. } \alpha}$$

(Γεωμ. 507, 508)· ἄρα διαιρεθέντος τούτου τοῦ τύπου ἄνω ᾧ κάτω διὰ συνημ. $\alpha \times$ συνημ. β εὑρεθήσεται απ. $(\alpha+\beta) =$

$$\frac{\frac{\text{ημ. } \alpha}{\text{συνημ. } \alpha} + \frac{\text{ημ. } \beta}{\text{συνημ. } \beta}}{1 - \frac{\text{ημ. } \alpha \times \text{ημ. } \beta}{\text{συνημ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta}}, \text{ τοῦτ' ἔστιν απ. } (\alpha+\beta) =$$

$$\frac{\text{απ. } \alpha + \text{απ. } \beta}{1 - \text{απ. } \alpha + \text{απ. } \beta}.$$ ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ $\alpha+\beta = 45^\circ$, ὅτε ᾧ απ. $(\alpha+\beta) = 1$, ἔσαι $\frac{\text{απ. } \alpha + \text{απ. } \beta}{1 - \text{απ. } \alpha + \text{απ. } \beta} = 1$, ὅθεν διὰ τῶν κοινῶν κανόνων ἀποφέρεται απ. $\beta = \frac{1 - \text{απ. } \alpha}{1 + \text{απ. } \alpha}$.

εἰλήφθω τοίνυν απ. $\alpha = \frac{1}{2}$, ᾧ δὴ ἔξομεν απ. $\beta = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$· λογισέον ἄρα διὰ τῆς εἰρημένης σειρᾶς τὸ μῆκος τόξου, οὗ ἡ ἀπτομένη $\chi = \frac{\alpha}{2}$, εἴτ' οὖν τῆς ἀκτῖνος ἡμίσεια· μεθ' ὃ, τὸ μῆκος τόξου, οὗ ἡ ἀπτομένη χ ἔστιν $\frac{\alpha}{3}$· ταῦτα δὲ συνάψαντες ἔξομεν τὸ μῆκος τοῦ 45° τόξου· ἀντὶ τοίνυν χ ἀντικαθισαμένων τοῦ $\frac{\alpha}{2}$, ᾧ τοῦ $\frac{\alpha}{2}$, πορισθήσονται

αἱ σειραὶ $\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^4}-\frac{1}{7\cdot 2^6}+\frac{1}{9\cdot 2^8}-\frac{1}{11\cdot 2^{10}}+\frac{1}{13\cdot 2^{12}}\text{ κτ.}\right)$ καὶ $\frac{\alpha}{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3^2}+\frac{1}{5\cdot 3^4}-\frac{1}{7\cdot 3^6}+\frac{1}{9\cdot 3^8}-\frac{1}{11\cdot 3^{10}}+\frac{1}{13\cdot 3^{12}}\text{ κτ.}\right)$

Βουλομένοις δ' εὑρεῖν τὰς δυνάμεις ἑκατέρου τῶν δεῖ τῶν τόξων, ἀκριβῶς παρισαμένας μέχρι τοῦ ἐννάτου δεκαδικοῦ, λογιστέον, 15 μὲν ἀρκτικοὺς ὅρους τῶν πρώτης, 10 δὲ τῆς δευτέρας σειρᾶς· εὐχερῶς δὲ ὁ λογισμὸς διαπράττεται, παρατετήρηκόσιν, ὡς ἐν τῇ πρώτῃ λογισθείησαν ἂν οἱ ἀλληλεχεῖς ὅροι, συναθροίσης σειρᾶς, ἧς ἕκαστος ὅρος ἴσος εἴη τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἡγουμένου καὶ τοῦ $\frac{1}{2^2}$, τοῦτ' ἔστιν ἕκαστος ὅρος εἴη ἴσος $\frac{1}{4}$ τοῦ ἡγησαμένου, καὶ ταύτης εἶτα πολλαπλασιασθείσης ἀνὰ ἕκαστον ὅρον ἐπὶ τὴν σειρὰν 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$ κτ.· τελευταίων δὲ συναφθέντων τῶν ἀρτίων ὅρων, καὶ τῶν περιττῶν, καὶ τοῦ τούτων ἀθροίσματος ἀπὸ τοῦ ἐκείνων ἀφαιρεθέντος, τοῦ δὲ καταλοίπου πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ $\frac{\alpha}{2}$· ὁ δὲ τῆς δευτέρας σειρᾶς λογισμὸς ὅτω γενήσεται· συνεσάτω σειρά, ἧς ἕκαστος ὅρος ἴσος εἴη τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἡγουμένου καὶ τοῦ $\frac{1}{3^3}=\frac{1}{9}$, τοῦτ' ἔστιν ἕκαστος ὅρος εἴη $\frac{1}{9}$ τοῦ ἡγησαμένου· καὶ πεπολλαπλασιάσθω ἀνὰ ἕκαστον ὅρον ἐπὶ τὴν σειρὰν 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$ κτ, καὶ τὰ ἄλλα πεπράχθω ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης σειρᾶς· μόνον δὲ τὸ ἔσχατον ἀποτέλεσμα πεπολλαπλασιάσθω ἐπὶ

ἐπὶ $\frac{\alpha}{2}$, ἀλλ' ἐπὶ $\frac{\alpha}{3}$· ταύτης δὲ τῆς πράξεως ἐπιμελῶς διαπραχθείσης, ᾗ τῆς προσεγγίσεως μέχρι τῶν 10 δεκαδικῶν προαχθείσης, πορισθήσεται, ὑπὲρ μὲν τῆς πρώτης σειρᾶς $\frac{\alpha}{2}$ (0,9272952180), ἤτοι α (0,4636476090), ὑπὲρ δὲ τῆς δευτέρας, $\frac{\alpha}{3}$ (0,9652516632), ἤτοι α (0,3217505544)· ἄρα τὸ 45° τόξον, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύω εὑρεθέντων, ἔσαι α (0,7853981634)· τετραπλασιαθὲν ἄρα ἀποδώσει τὴν ἡμιπεριφέρειαν = α (3,1415926536)· ἡ ἄρα ἀκτὶς πρὸς τὴν ἡμιπεριφέρειαν (ἢ ἡ διάμετρος πρὸς ὅλην τὴν περιφέρειαν) :: α : α (3,1415926536) :: 1 : 3,1415926536· λόγος ἀκριβέστερος τῶ τεθέντος (Γεωμ. 370, 371, 377), καὶ εὐχερῶς πάνυ ἀκριβέστερον ἔτι ἀποδοθῆναι δυνάμενος.

247. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Ἀριθμῶ δοθέντος εὑρεῖν αὐτῶ τὸν ὑπερβολικὸν λογάριθμον.

ΛΥΣΙΣ. Διηρήσθω ὁ ἀριθμὸς εἰς δύω μέρη α, χ, α ὄντος τῶ μείζονος· ἐκῶν κατὰ τὰ ἀποδεδομένα (47)

ἔσι δ. λογ. $(\alpha+\chi) = \frac{\delta\chi}{\alpha+\chi}$, ποσότης, ἥτις ὁλοκληρωθῆναι γεωμετρικῶς ἐκ ἔχει· ἀναπτέον ἄρα ταύτην εἰς σειρὰν, μεταχηματίσαντας εἰς $\delta\chi(\alpha+\chi)^{-1}$· ἀλλὰ (Συμβ. Λογ. 149, 548) $(\alpha+\chi)^{-1} = \alpha^{-1}\left(1 - \frac{\chi}{\alpha} + \frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\chi^3}{\alpha^3}\ \text{κτ}\right) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\chi}{\alpha^2} + \frac{\chi^2}{\alpha^3} - \frac{\chi^3}{\alpha^4}\ \text{κτ}$· ἄρα, δλ

$(\alpha+\chi) = \delta\chi(\alpha+\chi)^{-1} = (\frac{\delta\chi}{\alpha} - \frac{\chi\delta\chi}{\alpha^2} + \frac{\chi^2\delta\chi}{\alpha 3} - \frac{\chi^3\delta\chi}{\alpha^4}$ κτ)· ὁλοκληρωμένης ἄρα ταύτης τῆς ποσότητος, εὑρίσκεται $\lambda(\alpha+\chi) = (\frac{\chi}{\alpha} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3} - \frac{\chi^4}{4\alpha^4} +$ κτ) $+ \Gamma$· ἵνα δὲ διορισθῇ ἡ ἀμετάτρεπτος Γ, σημειωτέον, ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπικρατεῖ ὡ ὅταν ἡ $\chi = 0$· ἀνάγεται μέντοι τηνικαῦτα εἰς $\lambda\alpha = \Gamma$· ἄρα $\Gamma = \lambda\alpha$· ἄρα

$$\lambda(\alpha+\chi) = \lambda\alpha + (\frac{\chi}{\alpha} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3} - \frac{\chi^4}{4\alpha^4},\ \text{κτ})\cdot$$

ἐνὸς ἄρα ἀριθμοῦ τοῦ λογαρίθμου γνωσθέντος, δυνατὸν διὰ ταύτης τῆς σειρᾶς τὸν παντὸς ἄλλου ἀριθμοῦ εὑρεῖν λογάριθμον· ἔστω φέρε $\alpha = 10$, ὡ $\alpha + \chi = 11$· ἐκοῦν ἔσαι $\chi = 1$, ὡ $\frac{\chi}{\alpha} = \frac{1}{10}$, ὅθεν εὑρεθήσεται $\lambda.11 =$

$$\lambda.10 + (0,1) - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3},\ \text{κτ}\cdot$$

ἐν δὲ τούτων γινώσκεται, ὅ,τι ἐστὶ προσθετέον τῷ τοῦ 10 λογαρίθμῳ εἰς εὕρεσιν τοῦ κατὰ τὸν 11.

248. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπεὶ ἡ ἄρτι ἀποδοθεῖσα γενικὴ σειρὰ, ἐκ ἄλις συγκλίνουσα εὑρίσκεται, προκείσθω μέθοδος ἑτέρα διὰ τοῦ ἑφεξῆς προβλήματος, ἐξ' οὗ εὐπετῶς θηρεύεται ὁ ζητούμενος λογάριθμος.

249. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Εὑρεῖν τὸν λογάριθμον κλάσματος, οὗ ὁ ἀριθμητὴς μείζων ἐστὶ τοῦ παρονομαστοῦ.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω, α μὲν τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμητοῦ ὡ τοῦ παρονομαστοῦ, χ δὲ ἡ αὐτῶν διαφορά· ἔσαι οὖν, ὁ μὲν ἀριθμητὴς (Συμβ. Λογ. 442) $= \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\chi$, ὁ δὲ παρ-

ονομασὴς $= \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\chi$, ϗ ἑπομένως τὸ προτεθὲν κλάσμα ἔσαι $\frac{\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\chi}{\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\chi} = \frac{\alpha+\chi}{\alpha-\chi}$ (ἐκβολῇ τοῦ κοινοῦ ποιητοῦ $\frac{1}{2}$), ϗ ἑπομένως $\lambda.\frac{\alpha+\chi}{\alpha-\chi}$, $\lambda(\alpha+\chi) - \lambda(\alpha-\chi)$ ἐμφανεῖ τὸν αὐτοῦ λογάριθμον· λαβόντες ἓν αὐτοῖς τὰ ἀπειροστὰ, ϗ μόνην μὲν τὴν χ ὡς μεταβλητὴν ἐκδεξάμενοι, ὡς δὲ ἀμετάβλητον τὴν α (*) τηρήσαντες, ἔξομεν (47)

$$\frac{\delta\chi}{\alpha+\chi} - \frac{\delta\chi}{\alpha-\chi} = \frac{2\alpha\delta\chi}{\alpha\alpha-\chi\chi} = 2\alpha\delta\chi\,(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-1}\cdot$$

ἐκεῖν (Συμβ. Λογ. 149, 548) $(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-1} = \alpha^{-2}$

$$(1 + \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\chi^4}{\alpha^4} + \frac{\chi^6}{\alpha^6} + \frac{\chi^8}{\alpha^8} + \kappa\tau)\cdot \text{ ἄρα } 2\alpha\delta\chi\,(\alpha\alpha-$$

$$\chi\chi)^{-1} = 2\alpha^{-1}\delta\chi\,(1 + \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\chi^4}{\alpha^4} + \frac{\chi^6}{\alpha^6} + \frac{\chi^8}{\alpha^8} + \kappa\tau)$$

(*) Εἰ ϗ τὸ κλάσμα τό δε ἐμφαίνειν ὀφείλει ἅπαν πρατιθέμενον κλάσμα, ἐδὲν ἀλλ' ἓν τὸ κωλύον μὴ ἐχὶ θεωρεῖν τὸ α ἄθροισμα τοῦ ἀριθμητοῦ ϗ τοῦ παρονομαστοῦ ὡς ἄτρεπτον· ἐδὲν γάρ ἐστι κλάσμα, ὃ μὴ ἄντις ἕτω διαθείη, ὡς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμητοῦ ϗ τοῦ παρονομαστοῦ ἴσον εἶναι, ᾧ ἄν βούλοιτο ἀριθμῷ· κείσθω γὰρ κλάσμα τὸ $\frac{3}{5}$, ὃ διαθεῖναι χρὴ ἕτως, ὡς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμητοῦ ϗ τοῦ παρονομαστοῦ ἰσοῦσθαι τῷ 12 ἀριθμῷ· πεπολλαπλασιάσθω ἑκάτερος τῶν ὅρων ἐπὶ ν· ὅθεν ἔσαι $\frac{3^\nu}{5^\nu}$, ϗ ὑποτεθείσθω $3^\nu + 5^\nu = 12$, ἢ $8^\nu = 12$· ἄρα $\nu = \frac{1}{8}^2 = \frac{3}{2}$· ἄρα $\frac{3 \times \frac{3}{2}}{5 \times \frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}}$, ὅ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμητοῦ ϗ τοῦ παρονομαστοῦ ἔστιν ὡς ἀληθῶς $= 12$.

$$= 2\left(\frac{\delta\chi}{\alpha} + \frac{\chi^2\delta\chi}{\alpha^3} + \frac{\chi^4\delta\chi}{\alpha^5} + \frac{\chi^6\delta\chi}{\alpha^7} + \frac{\chi^8\delta\chi}{\alpha^9} + \varkappa\tau\right)\cdot$$

ἄρα $\mathrm{O}\cdot\frac{2\alpha\delta\chi}{\alpha\alpha-\chi\chi}$, εἶτ' ἓν $\lambda\frac{\alpha+\chi}{\alpha-2} = 2\left(\frac{\chi}{\alpha} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3}\right.$

$\left. + \frac{\chi^5}{5\alpha^5} + \frac{\chi^7}{7\alpha^7} + \frac{\chi^9}{9\alpha^9} + \varkappa\tau\right) + \Gamma\cdot$ τὸ δὲ ἀμετάτρεπτον Γ ὁλοκληρωθήσεται, εἰ μάθοιμεν ὅ,τι γένοιτο ἡ ἐξίσωσις, ἐπειδὰν ᾖ $\chi = 0$· ἀλλὰ τηνικαῦτα ἀνάγεται εἰς

$\lambda\frac{\alpha}{\alpha} = \Gamma\cdot$ ἄρα $\Gamma = \lambda\frac{\alpha}{\alpha} = \lambda 1 = 0$· ὅλη ἄρα ἡ ἐξίσωσις ἁπλῶς ἔσαι $\lambda\frac{\alpha+\chi}{\alpha-\chi} = 2\left(\frac{\chi}{\alpha} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3} + \frac{\chi^5}{5\alpha^5}\right.$

$\left. + \frac{\chi^7}{7\alpha^7} + \varkappa\tau\right)$, ἔνθα καταφαίνεται, ὅτι ἕκαστος ὅρος συνίσταται ἐκ τοῦ ἡγουμένου, πολλαπλασιαθέντος ἐπὶ τὸ ἀπὸ $\frac{\chi}{\alpha}$, εἶτ' ἓν ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου, τετράγωνον, εἶτα δὲ λαμβάνεται ὁ πρῶτος, τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ δευτέρου, τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ τρίτου, κτ, καὶ ὅλον τὸ ἄθροισμα διπλασιάζεται. Ταῦτα δὲ ἐφαρμοσέον ἐφεξῆς μερικωτέροις ὑποδείγμασι.

250. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'. Εὑρεῖν τὸν τοῦ 2 ὑπερβολικὸν λογάριθμον.

ΛΥΣΙΣ. Μεταχηματιθήτω ὁ 2 εἰς $\frac{2}{1}$· ὑκῶν ἔξομεν $\alpha = 3$, καὶ $\chi = 1$, καὶ $\frac{\chi}{\alpha} = \frac{1}{3}$, καὶ $\frac{\chi^2}{\alpha^2} = \frac{1}{9}$· ἕναστος ἄρα ὅρος εὐπετῶς συγκροτηθήσεται· ζητεῖται γὰρ εἰς τοῦτο ἀλλο ὐδὲν, ἢ λιφθῆναι τὸ $\frac{1}{9}$ τοῦ ἡγουμένου ὅρου, ἵνα γεννηθῇ ἡ σειρὰ $\frac{\chi}{\alpha}, \frac{\chi^3}{\alpha 3}, \frac{\chi^5}{\alpha 5}$ κτ.· ἔξομεν ἄρα

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\chi}{\alpha} = 0,333333333\\ \frac{\chi^3}{\alpha^3} = 0,037037037\\ \frac{\chi^5}{\alpha^5} = 0,004115226\\ \frac{\chi^7}{\alpha^7} = 0,000457247\\ \frac{\chi^9}{\alpha^9} = 0,000050805\\ \frac{\chi^{11}}{\alpha^{11}} = 0,000005645\\ \frac{\chi^{13}}{\alpha^{13}} = 0,000000627\\ \frac{\chi^{15}}{\alpha^{15}} = 0,000000069\end{array}\right\} \text{ἄρα} \left\{\begin{array}{l}\frac{\chi}{\alpha} = 0,333333333\\ \frac{\chi^3}{3\alpha^3} = 0,012345679\\ \frac{\chi^5}{5\alpha^5} = 0,000823045\\ \frac{\chi^7}{7\alpha^7} = 0,000065321\\ \frac{\chi^9}{9\alpha^9} = 0,000005645\\ \frac{\chi^{11}}{11\alpha^{11}} = 0,000000513\\ \frac{\chi^{13}}{13\alpha^{13}} = 0,000000048\\ \frac{\chi^{15}}{15\alpha^{15}} = \alpha,000000004\end{array}\right.$$

τὸ ἄρα ἄθροισμα ἔςι 0,346573508, ȣ̃ τὸ διπλȣ̃ν, ὅπερ ἐςὶν ὁ ζητȣ́μενος τȣ̃ 2 λογάριθμος, ὑπάρχει 0,693147176, ὃς ἐν μόνοις 8 δεκαδικοῖς ἔςι 0,69314718.

251. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπεὶ δὲ 4 ὁ ἀπὸ 2 ἐςὶ τετράγωνος, ϗ 8 ὁ ἀπ' αὐτȣ̃ κύβος, τὸ μὲν ἄρα διπλȣ̃ν τȣ̃ εὑρεθέντος ἔςαι ὁ τȣ̃ 4, τὸ δὲ τριπλȣ̃ν ὁ τȣ̃ 8, λογάριθμος· εἰς δὲ εὕρεσιν τȣ̃ κατὰ τὸν 3 λογαρίθμȣ, ζητηθήτω ὁ λογάριθμος τȣ̃ κλάσματος $\frac{4}{3}$, ὅς τις ἀφαιρεθεὶς τȣ̃ κατὰ τὸν 4 ἀποδώσει τὸν τȣ̃ 3, ϗ γὰρ 3 ἔςι 4 διῃρημένος διὰ $\frac{4}{3}$· ἄρα $\lambda . 3 = \lambda 4 - \lambda \frac{4}{3}$· ἀλλ' εὐπετέςερον εὑρεθήσεται, εἰ ζητηθείη ὁ τȣ̃ $\frac{8}{9}$ κλάσματος λογάριθμος, ϗ ἀφαιρεθείη τȣ̃ κατὰ τὸν 8 λογαρίθμȣ ἐγνω-

σμένυ ἤδη· τὸ ἓν κατάλοιπον ἔσαι ὁ τῦ 9 λογάριθμος, ἕ τὸ ἥμισυ ἔσαι ὁ τῦ 3· προσεθέντος δὲ τῦ κατὰ τὸν 3 τῷ τῦ 2, πορισθήσεται ὁ τῦ 6 λογάριθμος· ἵνα δὲ εὑρεθείη ὁ τῦ 5, ζητηθήτω πρῶτον ὁ τῦ 10, δηρωμένοις τὸν τῦ $\frac{1}{8}^{\circ}$, ὃς συναφθεὶς τῷ τῦ 8, ἀποδώσει τὸν τῦ 10· τύ- τυ δὲ ἀφαιρεθεὶς ὁ τῦ 2, ἀποδώσει τὸν τῦ 5· κατάδηλον ἄρα, ὅ,τι χρὴ ποιεῖν εἰς εὕρεσιν παντὸς ἄλλυ λογαριθμυ.

252. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Σημειωτέον δὲ, ὡς ὁ λογισμὸς ἀεὶ μᾶλλον ἢ μᾶλλον ἐπιτέμνεται, ὅσῳ μείζων γίνεται ὁ ἀριθμός· ὥστε εὑρεθέντων ἅπαξ τῶν μέχρι 10 λογαριθμων, οἱ μέχρις 100 πορισθήσονται, μηδὲ τρισὶν ὅροις τῆς σειρᾶς χρησαμένοις, ἡνίκ' ἂν σέργωμεν 8 δεκαδικοῖς· παρελθοῦσι δὲ τὸν 100 μέχρι τῶν 1000, οἱ δύω ἀρκτικοὶ ἀρκέσυσιν· ἐντεῦθεν δὲ μόνος ὁ πρῶτος ἐξικανοῖ.

253. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς'. Τὰς ὑπερβολικὰς λογαριθμυς εἰς τὰς ἐν τοῖς κανονίοις τρέψαι.

ΛΥΣΙΣ. Εὑρεθήτω πρῶτον ὁ τῦ 10 λογάριθμος· ἐὰν τοίνυν διὰ τῦ λογισμῦ ζητηθῇ ὁ τῦ $\frac{1}{8}^{\circ}$, διὰ τῦ προεκτεθέντος τύπυ, εὑρεθήσεται $\lambda\frac{1}{8}^{\circ} = 0,223\,14355$· τύτῳ δὲ συναφθέντος τῦ κατὰ τὸν 8 (210), πορισθήσεται $\lambda 10 = 2,302\,58509$· τύτυ τεθέντος, ἀναμνησέον, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\delta\chi = \frac{\delta\upsilon}{\upsilon}$ (47), ἐφ' ἕ ἐπισηρίζεται ὁ πρακτικὸς τῶν λογαριθμων λογισμὸς, μόνῳ τῷ συσήματι τῶν λογαριθμων, ὧν τὸ μέτρον = 1, ἐπανήκει· ἡ δὲ πάντων τῶν δυνατῶν λογαριθμικῶν συσημάτων ἐξίσωσις ἔσι $\delta\chi = \frac{\mu\alpha\delta\upsilon}{\upsilon}$· ἡ δέ γε πάντων τῶν λογαριθμικῶν συσημάτων, ἐν οἷς ὁ α πρῶτος ὅρος τῆς θεμελιώδυς γεω-

μετρικῆς προόδου ὑποτίθεται = 1, ἔσι $\delta\chi = \frac{\mu\delta\upsilon}{\upsilon}$ · ἡ τῆς μὲν, εἴτ' ὧν τῆς $\delta\chi = \frac{\delta\upsilon}{\upsilon}$, ὁλόκληρόν ἐσι τὸ $\chi = \lambda\upsilon$, τῆς δὲ, εἴτ' ὧν τῆς $\delta\chi = \frac{\mu\delta\upsilon}{\upsilon}$, τὸ $\chi = \mu\lambda\upsilon$· ὅθεν δῆλον, ὅτι, ἐπεὶ χ παρίσησι τὸν λογάριθμον, ἵν' ἀχθῶσιν οἱ ὑπερβολικοὶ λογάριθμοι εἰς τὰς συσήματος ἄλλου, οὗ τὸ μέτρον ἔσι μ, πολλαπλασιασέον ἐσὶ τούτους ἐπὶ τὸ μέτρον μ· ἀλλὰ λογάριθμος τοῦ 10 ἐν τοῖς κοινοῖς κανονίοις ἔσι 1· ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ 10 ἐν τοῖς ὑπερβολικοῖς ἔσιν, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, 2,30258509· ἄρα μ × 2,30258509 = 1· ἄρα τὸ μέτρον μ τῶν κοινῶν κανονίων ἔσιν

$$= \frac{1}{2,30258509} = (\text{γενομένης τῆς διαιρέσεως})$$

0,43429448· „ἵν' ἄρα ἀναχθεῖεν οἱ ἤδη ἀποδεδομένοι „ὑπερβολικοὶ λογάριθμοι εἰς τὰς ἐν τοῖς κανονίοις, πολ„λαπλασιασέοι εἰσὶν ἐπὶ 0,43429448· τἀναντίον δὲ, „ἵν' οἱ ἐν τοῖς κανονίοις ἀναχθῶσιν εἰς τὰς ὑπερβολικὰς, „διαιρετέοι εἰσὶ διὰ 0,43429448, ἢ (ὃ εὐχερέσερόν τε „ἐσὶ, καὶ εἰς τὸ αὐτὸ ἄγει τέλος) πολλαπλασιασέοι ὑπάρ„χουσιν ἐπὶ 2,30258509"· ἕτως, εἰ πολλαπλασιαθείη ὁ ἄρτι εὑρημένος τοῦ 2 λογάριθμος 0,69314718 ἐπὶ 0,43429448, προκύψει λογάριθμος τοῦ 2 ὁ 0,3010300, οἷος τῷ ὄντι ἁπανταχοῦ ἐν τοῖς κανονίοις.

254. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'. Λογαρίθμου ὑπερβολικοῦ δοθέντος, εὑρεῖν αὐτοῦ τὸν ἀριθμόν.

ΛΥΣΙΣ. Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι, τοῦ $\alpha + \chi$ ἀριθμοῦ ὁντινοῦν ἐμφαίνοντος, εὑρίσκεται $\lambda(\alpha + \chi) = \lambda\alpha +$

$(\frac{\chi}{\alpha} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3} - \frac{\chi^4}{4\alpha^4} + \kappa\tau.)$· ἄρα $\lambda(\alpha+\chi)$ — $\lambda\alpha$, εἶτ' ἂν $\lambda\frac{\alpha+\chi}{\alpha} = \frac{\chi}{\alpha} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} + \frac{\chi^3}{3\alpha^3} - \frac{\chi^4}{4\alpha^4}$ κτ.· τοῦ α ἐμφαίνοντος ἀριθμὸν πρὸς τὸ δοκοῦν εἰλημμένον, τοιοῦτον μέντοι, ὥςε τὸν αὐτοῦ λογάριθμον βραχύτι διαφέρειν τοῦ δοθέντος, τοῦ ἐξ ὑποθέσεως ἐπανήκοντος τῷ ἀριθμῷ $\alpha+\chi$· γενέσθω διὰ τὸ ἁπλούςερον, $\lambda\frac{\alpha+\chi}{\alpha} = \psi$· ὁκοῦν ἔςαι $\psi = \frac{\chi}{\alpha} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} + \frac{\chi^2}{2\alpha^3} - \frac{\chi^4}{4\alpha^4}$ κτ.· ζητεῖται ἓν ἡ τοῦ $\frac{\chi}{\alpha}$ δύναμις, παριςαμένη διὰ ψ· παρεςάσθω τοίνυν ἐξ ὑποθέσεως ἡ δύναμις αὕτη διὰ

$$\frac{\chi}{\alpha} = A\psi + B\psi^2 + \Gamma\psi^3 + \Delta\psi^4 + \kappa\tau.,$$

A, B, Γ, κτ. συνεργῶν ὄντων ἀτρέπτων, ὧν ζητεῖται ὁ διορισμός· πορισθήσεται ἄρα

$$\psi = A\psi + B\psi^2 + \Gamma\psi^3 + \Delta\psi^4 + \kappa\tau.$$

$$- \frac{A^2}{2}\psi^2 - \frac{2AB}{2}\psi^3 - \frac{BB}{2}\psi^4$$

$$+ \frac{A^3}{3}\psi^3 - \frac{2A\Gamma}{2}\psi^4$$

$$+ \frac{3A^2B}{3}\psi^4$$

$$- \frac{A^4}{4}\psi^4$$

Ἀλλ' ἵν' αὕτη ἡ ἐξίσωσις ἐπικρατοίη, ὁποίαποτ' ἂν ἦ ἡ ψ, ἐπάναγκες εἶναι α'. A = 1· β'. τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν

ὅρων, τῶν πολλαπλασιαζόντων ἕκαστον τῷ ψ βαθμὸν, ἐν ταῖς ἄλλαις ςήλαις ὑπάρχειν μηδέν· ἄρα $B - \frac{A^2}{2} = 0$,

ϗ $\Gamma - AB + \frac{A^3}{3} = 0$, ϗ $\Delta - \frac{BB}{2} - A\Gamma + A^2B - \frac{A^4}{4} = 0$· ἐντεῦθεν ἄρα $B = \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2}$, ϗ $\Gamma = \frac{1}{6} = \frac{1}{1.2.3}$, ϗ $\Delta = \frac{1}{24} = \frac{1}{1.2.3.4}$· ϗ ἐὰν ὑποτεθῇ μείζων ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς, ὡς ἐνυπάρχειν τῇ σειρᾷ καὶ $E\psi^5$, $Z\psi^6$ κτ., εὑρεθήσεται ὡσαύτως ϗ $E = \frac{1}{1.2.3.4.5}$,

ϗ $Z \frac{1}{1.2.3.4.5.6}$ κτ.· ἔςιν ἄρα $\frac{\chi}{\alpha} = \psi + \frac{\psi^2}{1.2} + \frac{\psi^3}{1.2.3} + \frac{\psi^4}{1.2.3.4} + \frac{\psi^5}{1.2.3.4.5}$ + κτ.· ἄρα $1 + \frac{\chi}{\alpha}$, ἢ $\frac{\alpha+\chi}{\alpha} = 1 + \frac{\psi}{1} + \frac{\psi^2}{1.2} + \frac{\psi^3}{1.2.3} + \frac{\psi^4}{1.2.3.4} + \frac{\psi^5}{1.2.3.4.5}$ + κτ..

Ἵνα δὲ τούτῳ τῷ τύπῳ χρησώμεθα, ἀφηρήσθω τοῦ δοθέντος λογαρίθμου (οὗ ἔςιν ὁ τοῦ $\alpha + \chi$) ὁ προσεχέςερος γνωςὸς λογάριθμος, ἔστινος ὁ ἀριθμὸς εἰλήφθω ἀντὶ α· πορισθήσεται ἄρα τηνικαῦτα $\lambda \frac{\alpha+\chi}{\alpha}$, ἢ ψ, οὗ ἀντικαταςαθήτω ἐν τῷ προεκτεθέντι τύπῳ· τὸ δὲ ἀποτέλεσμα ἔςαι ἡ δύναμις τοῦ $\frac{\alpha+\chi}{\alpha}$· ἐντεῦθεν εὐχερῶς εὑρεθήσεται ὁ $\alpha + \chi$, ἐπεὶ γνωσθήσεται ὁ α.

Βυλομένοις δὲ εἰδέναι, ὅς τις ἐσὶν ὁ ἀριθμὸς, ᾧ ὁ λογάριθμος ἔσι 1 ἐν τῷ προκειμένῳ λογαριθμικῷ συσήματι, ὑποθετέον $\lambda \frac{\alpha + \chi}{\alpha}$, ἢ ψ = 1· ᾧ δὴ εὑρεθήσεται $\frac{\alpha+\chi}{\alpha}$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5}$$

+ κτ., ὃς εὑρεθήσεται = 2,7182818, ἀρκεσθεῖσι δεκαδικοῖς 7.

Ἐπειδὴ ἐνταῦθα λογάριθμοι ζητοῦνται, ὧν τὸ μέτρον ἔσι 1, εἴπερ ὁ δοθεὶς ὁμοφυὴς εἴη τοῖς ἐπὶ τῶν κοινῶν κανονίων, ἀνακτέον ἤτοι αὐτὸς, ἢ μόνην τὴν αὐτῶν διαφορὰν, εἰς τὰς ἐνεργείᾳ λογαρίθμους, ὥσπερ προδέδεικται (253).

Δυνατὸν δὲ καὶ δι' ἄλλου τύπου ἐκτεθῆναι ἀριθμὸν διὰ τοῦ κατ' αὐτὸν λογαρίθμου· ἔσω μὲν γὰρ χ ὁ ἀριθμὸς, ἔσω δὲ λχ = ψ· ἐὰν ᾖ τὸ δεύτερον μέλος ταύτης τῆς ἐξισώσεως πολλαπλασιαθῇ ἐπὶ λ.ε, τοῦ ε ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος, ᾧ λογάριθμος ἔσι 1, πορισθήσεται λχ = ψλε· ὅθεν ἑδεμία τροπὴ τῇ ἐξισώσει ἐπιγίνεται, εἴγε λε = 1· ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις λχ = ψλε μεταβάλλει, διὰ τὴν φύσιν τῶν λογαρίθμων, εἰς $\lambda\chi = \lambda\varepsilon^{\psi}$, ὅθεν $\chi = \varepsilon^{\psi}$, ὅτι, τῶν λογαρίθμων ἴσων ὄντων, ἴσοι ὑπάρχουσι καὶ οἱ αὐτοῖς ἐπανήκοντες ἀριθμοί· ἐπεὶ δὲ, ἐὰν ᾖ λχ = ψ, ἔσαι

(254) $\chi = 1 + \psi + \frac{\psi^2}{1.2} + \text{κτ.}$· ἄρα, ὄντος ἅμα χ

$= \varepsilon^{\psi}$, πορισθήσεται $\varepsilon^{\psi} = 1 + \psi + \frac{\psi^2}{1.2} + \frac{\psi^3}{1.2.3}$

$\frac{\psi^4}{1.2.3.4} + \text{κτ.}$

255. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Η' μέθοδος, ἣ περ ἤδη ἐχρησάμεθα πρὸς εὕρεσιν τῆς τοῦ χ δυνάμεως διὰ τῆς ἐξισώσεως $\psi = \frac{\chi}{\alpha} - \text{κτ.}$ μέθοδος τῶν σειρῶν ἀντίθετος ὀνομάζεται· ἐν ταύτῃ δὲ, ὡς παντὶ δῆλον, ἡ, ἧς τὴν δύναμιν εὑρεῖν βουλόμεθα, μεταβλητὴ ποσότης ἐκτίθεται διὰ σειρᾶς, ἐν ᾗ μεταβλητὴ ἑτέρα δείκτας ἔχει προϊόντας κατ' ἀριθμητικὴν πρόοδον· ἑκάστῳ δὲ αὐτῆς ὅρῳ συνεργὸς προτέτακται ἄτρεπτος ϗ διωρισμένος.

Ε'ὰν δὲ ὦσι πολλοὶ ὅροι διὰ χ ϗ ψ ἐν τῇ αὐτῇ ἐξισώσει, χ δὲ ϗ ψ μὴ πολλαπλασιάζωνται ἐπ' ἀλλήλους, ἡ τῶν δεικτῶν σειρὰ διορισθήσεται, τιθεμένου τοῦ δείκτου τοῦ τῆς σειρᾶς πρώτου ὅρου ἴσου τῷ ἐλαχίστῳ δείκτῃ τῆς αὐτῆς ἐν τῇ ἐξισώσει μεταβλητῆς ποσότητος, ϗ λαμβανομένου εἰς κοινὴν διαφορὰν τῶν τῆς σειρᾶς δεικτῶν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν τῆς αὐτῆς ἐν τῇ ἐξισώσει τρεπτῆς ποσότητος δεικτῶν· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ἡ $\psi^{\frac{2}{3}} + 3\psi = 2\chi - \frac{2}{5}\chi^2 + \frac{3}{7}\chi^3 + \text{κτ}$, γενήσεται $\chi = \text{A}\psi^{\frac{2}{3}} + \text{B}\psi + \Gamma\psi^{\frac{4}{3}} + \Delta\psi^{\frac{5}{3}} + \text{E}\psi^2 + \text{κτλ.}$· ὁ μὲν γὰρ ἐλάττων δείκτης τοῦ ψ ἔσι $\frac{2}{3}$, ὁ δὲ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δεικτῶν $\frac{2}{3}$ ϗ 1 τῆς ψ ἔσι $\frac{2}{3}$.

Ε'ὰν δὲ χ ϗ ψ πολλαπλασιάζωνται ἐπ' ἀλλήλους, τηνικαῦτα μεθόδῳ ἑτέρᾳ χρησέον, ἣ ἡμῖν μὲν ἀλλοτρία τῆς ἐν χερσὶ προθέσεως ὑπάρχει, ὁ δὲ ταύτην ἰδεῖν βουλόμενος, μετιέτω τά τε τοῦ Νεύτωνος συγγράμματα, ϗ τὴν τοῦ Κραμέρου ἀνάλυσιν τῶν καμπύλων γραμμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Χρῆσις τῶν προεκτεθεισῶν προσεγγίσεων εἰς ὁλοκλήρωσιν διαφόρων προσοτήτων.

256. Προκειμένων δὲ κανονίων, περιεχόντων τὰ παντοῖα τῆ κύκλω μέρη, ϗ δὴ ϗ τὲς λογαριθμυς, εἰ προτεθείη εἰς ὁλοκλήρωσιν ἀπειροσὸν, ἀναγόμενον εἴτε εἰς τὸν κύκλον, εἴτε εἰς τὲς λογαρίθμυς, ἄχρηςον ἔσαι τῆ λοιπῆ εἰς σειρὰς ἀναλύειν ταῦτα τὰ ἀπειροσά· χρήσιμον δὲ γνῶναι μόνον τὰς θαμινώτερον ἀπαντώσας σειρὰς τῶν δε τῶν ἀπειροσῶν, ϗ διορίσαι τὰ κυκλικὰ τόξα, ἢ τὲς λογαρίθμυς, ἃ αὐτῶν εἰσι τὸ ὁλόκληρον, κατὰ τὰ ἐφεξῆς ὑποδείγματα.

257. Εἴδομεν (243)· ὅτι τὸ $\frac{\frac{1}{2}\alpha\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}$ ἐμφαίνεισοιχεῖον τόξω κυκλικῆ τῆ AM (χ. 73), ἧ α μέν ἐσιν ἡ διάμετρος, χ δὲ ἡ ἀποτετμημένη· ὥσε τὸ ταύτης τῆς ποσότητος ὁλόκληρον, εἴτ' ἓν τὸ O $\frac{\frac{1}{2}\alpha\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}$ παρισᾶν τὸ τόξον AM· ζητηθήτω τοίνυν ἡ δύναμις τέτω τῆ ὁλοκλήρω ἐπὶ δυνάμει διωρισμένη τῆς χ· τηνικαῦτα ἓν τῆς KA $= \frac{1}{2}\alpha$ ἀφηρήθω ἡ γνωσὴ τῆ χ δύναμις, εἴτ' ἓν AΠ· ϗ δὴ πορισθήσεται KΠ· τριγώνω τοίνυν ὀρθογωνίω τῆ KΠM γνωσά εἰσιν, ἥτε ὀρθὴ γωνία, ϗ ἡ αὐτὴν ὑποτείνουσα KM $= \frac{1}{2}\alpha$, ϗ ἡ πλευρὰ KΠ· γνωσθήσεται ἄρα ϗ ἡ ὑπὸ AKM· ταύτης δὲ γνωσθείσης, εἴτ' ἓν

τῆ ἀριθμῆ τῶν μοιρῶν τῆ τόξυ ΑΜ, ϗ τῆς αὐτῆ ἀκτῖνος ΚΜ, εὐμαρῶς εὑρεθήσεται τὸ τῆ τόξυ μῆκος (*).

258. Ε'ἀν ἦ $\frac{\eta\delta\chi}{\sqrt{(\vartheta\varkappa\chi-\pi\chi\chi)}}$, τῶν η, ϑ, π, κ ποσὰ ἐγνωσμένα δηλέντων, τὸ ἀπειροστὸν τόδε ὅμοιον τῷ προτέρῳ γενήσεται, διαιρεθὲν τόν τε ἀριθμητὴν ϗ τὸν παρονομασὴν διὰ $\sqrt{\pi}$· ὅθεν προελεύσεται $\frac{\frac{\eta}{\sqrt{\pi}}\delta\chi}{\sqrt{(\frac{\vartheta\varkappa}{\pi}\chi-\chi\chi)}}$ $= \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\delta\chi}{\sqrt{(\frac{\vartheta\varkappa}{\pi}\chi-\chi\chi)}}$· ἀλλ' ἐὰν ἦ πολλαπλασιασὴς τῆ δχ τὸ ἥμισυ τῆς ποσότητος $\frac{\vartheta\varkappa}{\pi}$, τῆς πολλαπλασιαζέσης τὸ ὑπόῤῥιζον χ, τηνικαῦτα τὸ ἀπειροστὸν ὅμοιον ἀποκατασαθήσεται τῷ ἐπὶ τῆ προτέρυ παραγράφυ· ἀπονεμηθήτω ἄρα αὐτῇ αὕτη ἡ κατάσασις, πολλαπλασιάσασιν ἅμα ϗ δελῆσιν αὐτὴν διὰ $\frac{1}{2}\cdot\frac{\vartheta\varkappa}{\pi}=\frac{\vartheta\varkappa}{2\pi}$· τοιγαρῆν πορισθήσεται $\frac{\frac{\eta}{\sqrt{\pi}}}{\frac{\vartheta\varkappa}{2\pi}} \times \frac{\frac{\vartheta\varkappa}{2\pi}\delta\chi}{\sqrt{(\frac{\vartheta\varkappa}{\pi}\chi-\chi\chi)}} = \frac{2\pi\eta}{\vartheta\varkappa\sqrt{\pi}}$

(*) Τῆς γὰρ ἀκτῖνος εὑρεθείσης, διὰ τῶν προαποδοθέντων λόγων (Γεωμ. 370, 371, ϗ ἐνταῦθα, 256) εὑρίσκεται ἡ περιφέρεια· ταύτης δὲ γνωσθείσης, τὸ τῆ τόξυ μῆκος πορισθήσεται ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης, 368 : μοίρας τῆ τόξυ : : τὸ μῆκος ὅλης τῆς περιφερείας : τὸ μῆκος τῆ τόξυ.

$$\times \frac{\frac{\vartheta\kappa}{2\pi}\delta\chi}{\sqrt{(\frac{\vartheta\kappa}{\pi}\times - \chi\chi)}}$$

. ἔτως ἦν δῆλον, ὅτι τὸ ὁλόκληρον τοῦδε τοῦ ἀπειροστοῦ τόξον ἐστὶ κύκλου, οὗ ἡ μὲν διάμετρος ἔστι $\frac{\vartheta\kappa}{\pi}$, ἡ δὲ ἀποτετμημένη χ, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ $\frac{2\pi\eta}{\vartheta\kappa\sqrt{\pi}}$. εὐπετῶς ἄρα προσδιορίζεται διὰ τῶν προειρημένων.

259. Ε'ὰν δὲ αἱ ἀποτετμημέναι πρὸς τῷ κέντρῳ Κ ἀποτμηθῶσι, κληθείσης τῆς ΚΑ ἀκτῖνος β, καὶ τῆς ΚΠ ἀποτετμημένης χ, πορισθήσεται τὸ $\frac{-\beta\delta\chi}{\sqrt{(\beta\beta-\chi\chi)}}$ ὡς στοιχεῖον τοῦ τόξου ΑΜ, εὑρισκόμενον ἔκ τε τῆς παραθέσεως τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΠΜ, Μρμ, καὶ ἐκ ΠΜ $= \sqrt{(\beta\beta-\chi\chi)}$, καὶ δὴ καὶ ὅτι, ἐπεὶ τὸ ΑΜ τόξον ἀπομειοῦται, ὅσον αὔξει ΚΠ $= \chi$, τὸ ἀπειροστὸν ἔσαι λειπτικόν· προκειμένου τοίνυν ἀπειροστοῦ, οἷον τὸ $\frac{\kappa\delta\chi}{\sqrt{(\vartheta\eta-\pi\chi\chi)}}$, μεταβλητέον αὐτὸ, ὥσπερ ἀνωτέρω, εἰς τὸ $\frac{\kappa}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\delta\chi}{\sqrt{(\frac{\vartheta\eta}{\pi}-\chi\chi)}}$. ἀλλὰ τοῦ $\frac{\vartheta\eta}{\pi}$ παριστῶντος ἐνταῦθα τὸ $\beta\beta$, ἡ ποσότης $-\beta$, ἣν ὑπάρχειν δεῖ ἐν τῷ ἀριθμητῇ, ἔσαι $-\sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}$. πολλαπλασια-

σέον ἄρα ϗ διαιρετέον ἅμα διὰ $-\sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}$· ϗ δὴ ἔσαι

$$\frac{\frac{\kappa}{\sqrt{\pi}}}{-\sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}} \times \frac{-\sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}\,\delta\chi}{\sqrt{(\frac{\vartheta\eta}{\pi} - \chi\chi)}}$$

· ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ

$\mathbf{KA} = \sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}$, καὶ $\mathbf{K\Pi} = \chi$, πορισθήσεται

$$\frac{\frac{\kappa}{\sqrt{\pi}}}{-\sqrt{(\frac{\vartheta\eta}{\pi}}} \times \mathbf{AM}$$ ὡς ὁλόκληρον, ἢ γενικώτερον

$$\frac{\frac{\kappa}{\sqrt{\pi}}}{-\sqrt{\frac{\vartheta\eta}{\pi}}} \times \mathbf{AM} + \Gamma = \frac{-\kappa}{\sqrt{\vartheta\eta}} \times \mathbf{AM} + \Gamma\cdot$$

ἡ δὲ ἀμετάτρεπτος Κ διορίζεται ἐκ τῶν θέσεων τῆ μειωτέρω ζητήματος, ὅπερ ἀνῆκται εἰς τὸ περὶ, ἧ ὁ λόγος, ἀπειροσόν· τὸ δὲ τόξον **AM** διορίζεται, ὥσπερ ἤδη εἴδομεν (257), τυτέσι διὰ τῆ τριγώνω **KΠM** κτ.

260. Εἴδομεν (243), ὅτι τὸ $\frac{\alpha\alpha\,d\chi}{\alpha\alpha + \chi\chi}$ ἐμφαίνοι τόξον κύκλω, ἧ α μέν ἐσιν ἀκτὶς, χ δὲ ἀπτομένη· δυνατὸν δὲ διορίσαι τυτὶ τὸ τόξον διὰ διωρισμένης τῆ χ δυνάμεως, εὑρισκομένης τῆς ὑπὸ **AKN** (χ. 80) γωνίας τῆ ὀρθογωνίω τριγώνω **AKN**, εἶτα τῆ τόξω **AM** διὰ τῆ ἀριθμῆ τῶν μοιρῶν τῆς ὑπὸ **AKN** γωνίας, ϗ τῆς α ἀκτῖνος.

Ε'ὰν ἓν προκέηται $\frac{\varkappa\delta\chi}{\vartheta\beta^2 + \eta\chi\chi}$, διαιρεθήσεται τόν τε ἀριθμητὴν ϗ τὸν παρονομαςὴν διὰ η· ὅθεν προκύψει $\frac{\varkappa}{\eta} \times \frac{\delta\chi}{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta} + \chi\chi}$· εἶτα πολλαπλασιαζομένου τοῦ τε ἀριθμητοῦ ϗ τοῦ παρονομαςοῦ ἐπὶ $\frac{\vartheta\beta^2}{\eta}$, πορισθήσεται $\frac{\frac{\varkappa}{\eta}}{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta}} \times \frac{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta}\delta\chi}{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta} + \chi\chi}$, εἴτ' ἓν $\frac{\eta}{\vartheta\beta^2} \times \frac{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta}\delta\chi}{\frac{\vartheta\beta^2}{\eta} + \chi\chi}$· εὑρεθήσεται ἄρα τὸ ὁλόκληρον, θηρευομένου τοῦ μήκους τόξου, οὗ ἀπτομένη μέν ἐςιν ἡ χ, ἀκτὶς δὲ ἡ $\sqrt{(\frac{\vartheta\beta^2}{\eta})}$, ϗ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ $\frac{\eta^2}{\vartheta\beta}$.

261. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ταῦτα μὲν τὰ τρία ἀπειροςὰ ὁλοκληροῦνται διὰ τῶν κυκλικῶν τόξων· ἃ δὲ διὰ τῆς κυκλικῆς ἐπιφανείας, ὀψόμεθα ἐχομένως.

Στοιχεῖον τοῦ ἡμιτμήματος ΑΠΜ ἔςι τὸ $\delta\chi\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$ κληθείσης χ τῆς ΑΠ (χ. 73.)· ἔςι γὰρ $\upsilon = \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$, ϗ ἐκ τοῦ ἀκολούθου $\upsilon\delta\chi$, εἴτ' ἓν ΠπμΜ $= \delta\chi\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$· ἅπαν ἄρα ἀπειροςὸν, τοιόν δε φέρον σχῆμα, ἢ εἰς τοιοῦτον διὰ προπαρασκευῶν ὁμοίων ταῖς

προδεδειγμέναις μεταχηματιζόμενον, ὁλοκληρωθήσεται διὰ τῦ ἡμιτμήματος κύκλυ, ὗ ἡ μὲν ἀποτετμημένη ἔσι χ, ἡ δὲ διάμετρος α· τὸ δὲ τμῆμα εὐχερῶς διορίζεται διὰ τῶν προλελεγμένων ἐνταῦθα.

262. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τετραγωνίσαι τὸ ἐλλειπτικὸν ἡμίτμημα ΑΠΜ (χ. 81).

ΛΥΣΙΣ. Ἔ"σιν $υ = \frac{β}{α} \sqrt{(αχ - χχ)}$, $υδχ = δ$

$(ΑΠΜ) = \frac{βδχ}{α} \cdot \sqrt{(αχ - χχ)}$· ἀλλὰ $δχ \sqrt{(αχ - χχ)}$ ἐμφαίνει στοιχεῖον ἡμιτμήματος τῦ ΑΠΜ¹ κύκλυ, ἕ διάμετρος ἡ ΑΒ· ἄρα $δ(ΑΠΜ) = \frac{β}{α} δ(ΑΠΜ')$, ὧν τὰ ὁλόκληρα $ΑΠΜ = \frac{β}{α} ΑΠΜ$· ὅθεν ΑΠΜ : ΑΠΜ¹ :: β : α, τῦτ' ἔσιν „ἡ ἐπιφάνεια τῦ ἐλλειπτικῦ „ἡμιτμήματος πρὸς τὴν τῦ συστοιχέντος κυκλικῦ λόγον „ἔχει, ὃν ὁ ἐλάττων πρὸς τὸν μείζονα ἄξονα" ἐντεῦθεν ἄρα „ὅλη ἡ ἔλλειψις πρὸς κύκλον γεγραμμένον ἐπὶ τῦ „μεγάλυ ἄξονος λόγον ἔχει, ὃν ὁ ἐλάττων ἄξων πρὸς „τὸν μείζονα" ὃ δὴ ἐν (Υ'ψ. Γ. 101) δέδεικται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐ'ὰν δὲ πρὸς τῷ κέντρῳ Κ (χ. 73.) τέμνωνται αἱ ἀποτετμημέναι, κληθείσης β τῆς ΚΑ, ἕ χ τῆς ΚΠ, ἔσαι — δχ· $\sqrt{(ββ - χχ)}$ στοιχεῖον τῦ ἡμιτμήματος ΑΠΜ· τυγχάνυτα γὰρ $υ = \sqrt{(ββ - χχ)}$, τὸ δὲ τμῆμα ΑΠΜ ἀπομειῦται αὐξήσης τῆς χ· διὸ λειπτικὸν ἀποβαίνει τὸ τῦ ΑΠΜ ἀπειροσόν· τὸ δ' ἐφεξῆς πρόβλημα ἀπειροσὸν ἔξει, εἰς τοιόν δε ἐπαγαγόμενον σχῆμα.

263. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. *Τετραγωνίσαι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ἐπιμήκους ἐλλειπτικῆς κωνοΐδος.*

ΛΥΣΙΣ. *Γενικὸς τύπος τῶν τοιούτων ἐπιφανειῶν ἐστιν*

$$\dot{o}\ \frac{\pi v}{\eta}\sqrt{(\delta x^2+\delta v^2)}\ (225)\cdot$$

ἔστι δὲ τῆς ἐλλειψεως ἐξίσωσις $vv+\frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(\frac{1}{4}\alpha\alpha-xx)$· *ἄρα* $v+\frac{\beta}{\alpha}\times\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha-xx)}$, *καὶ* $\delta v+-\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{x\delta x}{\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha-xx)}}$· *ἄρα* $\frac{\pi v}{\eta}\sqrt{(\delta x^2+\delta v^2)}$ *γίνεται* $\frac{\pi\beta}{\eta\alpha}\times\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha-xx)}\times\sqrt{(\delta x^2+\frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}\times\frac{x^2\,\delta x^2}{\frac{1}{4}\alpha\alpha-xx})}$, *ἢ (τοῦ πολλαπλασιασμοῦ σημειωθέντος, καὶ ἀναγωγῆς γενομένης, καὶ τοῦ* δx^2 *ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ ἀχθέντος)* $\frac{\pi\beta\delta x}{\eta\alpha}\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha-xx+\frac{\beta\beta xx}{\alpha\alpha})}=\frac{\pi\beta\delta x}{\eta\alpha}\cdot\sqrt{(\frac{\frac{1}{4}\alpha^4-\alpha\alpha xx'+\beta\beta xx}{\alpha\alpha})}$

ἀλλ' ἐὰν κληθῇ κ ἡ ἐκκεντρότης KE (*χ.* 82.), *ἔσται κκ* $+\frac{1}{4}\alpha\alpha-\frac{1}{4}\beta\beta$, *καὶ* $4\kappa\kappa+\alpha\alpha-\beta\beta$ (*)· *στοιχεῖον*

(*) *Τοῦ μὲν γὰρ μείζονος ἡμιάξονος κληθέντος* $\frac{1}{2}\alpha$, *τοῦ δ' ἐλάττονος* $\frac{1}{2}\beta$, *ἐπείπερ ἡ τὸ τοῦ ἐλάττονος ἄξονος πέρας καὶ τὴν ἑστίαν ἐπιζευγνῦσα εὐθεῖα ἔστιν ἴση τῷ μείζονι ἡμιάξονι (Γ΄ψ. Γ. 87.)· ἐντεῦθεν συσταθήσεται τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἡ μὲν εἰρημένη εὐθεῖα ἡ ἴση τῷ μείζονι*

ἄρα τῆς ἐπιφανείας γίνεται τὸ $\frac{\pi\beta\delta\chi}{\eta\alpha}$

$$\surd\left(\frac{\frac{1}{4}\alpha^4 - 4\kappa\kappa\chi\chi}{\alpha\alpha}\right) = \frac{\pi\beta\delta\chi}{\eta\alpha\alpha}\surd\left(\tfrac{1}{4}\alpha^4 - 4\kappa\kappa\chi\chi\right).$$

διαιρέσει μὲν ὃν τὸ ὑποῤῥίζυ διὰ 4 κκ, πολλαπλασιασμῷ δὲ τοῦ ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ ἐπὶ τὴν ῥίζαν 2κ, πορίζεται $\frac{2\pi\beta\kappa\delta\chi}{\eta\alpha\alpha} \times \surd\left(\frac{\frac{1}{16}\alpha^4}{\kappa\kappa} - \chi\chi\right)$ ποσότης, ἣ ἀφοσιωτέον τὸ σύμβολον —, ἵν' ἐμφήνῃ τὴν ἐπιφάνειαν ἀρχομένην ἐκ τοῦ σημείυ A· αὕτη γὰρ ἀπομειοῦται τοσοῦτον, ὅσον αὔξει ἡ χ· ἔξομεν ἄρα $-\frac{2\pi\delta\beta\kappa\delta\chi}{\kappa\alpha\alpha} \times \surd\left(\frac{\frac{1}{16}\alpha^4}{\kappa\kappa} - \chi\chi\right)$· ταύτης ἄρα τῆς ποσότητος παραβαλλομένης πρὸς τὴν — δχ $\surd(\beta\beta - \chi\chi)$, ἣν εἴδομεν τύπον ὄσαν ἡμιτμήματος κυκλικοῦ, οὗ ἡ ἀκτίς ἐστι β, συναχθήσεται ὅτι τὸ ὁλόκληρον τῆς — δχ $\surd\left(\frac{\frac{1}{16}\alpha^4}{\kappa\kappa} - \chi\chi\right)$ ἔστιν ἡμίτμημα κυκλικὸν ΟΠΜ[1], οὗ μὲν ἀκτὶς ἔστιν $\frac{\frac{1}{4}\alpha\alpha}{\kappa}$, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτεμνομένη χ, προσεπιτιθεμένης αὐτῷ καὶ ἀτρέπτυ τινὸς ποσότητος· ἐὰν ἄρα ἀκτῖνι τῇ $KO = \frac{\frac{1}{4}\alpha\alpha}{\kappa}$, τοῦτ' ἔστι τρίτῃ ἀναλόγῳ τῶν KE, KA γραφῇ κύκλος ὁ ONP,

---

ἡμιάξονι ὑποτενεῖ, περιέξυσι δὲ ἥτε ἐκκεντρότης, καὶ ὁ ἐλάττων ἡμιάξων· ἄρα (Γεωμ. 349..) $\frac{1}{4}\alpha\alpha = \kappa\kappa + \frac{1}{4}\beta\beta$, καὶ $\kappa\kappa = \frac{1}{4}\alpha\alpha - \frac{1}{4}\beta\beta$.

$$\text{περιθήσεται } O - \delta\chi\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{16}\alpha^4}{\kappa\kappa} - \chi\chi\right)} = O\Pi M^1 +$$

$$\Gamma\cdot \text{ ἄρα } O - \frac{2\pi\beta\kappa\delta\chi}{\eta\alpha\alpha}\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{16}\alpha^4}{\kappa\kappa} - \chi\chi\right)} = \frac{2\pi\beta\kappa}{\eta\alpha\alpha}\times$$

$$O\Pi M^1 + \frac{2\pi\beta\kappa}{\eta\alpha\alpha} + \Gamma.$$

Ἵνα δὲ διορισθῇ ἡ ἀμετάτρεπτος Γ, σημειωτέον, ὅτι ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια, ἐκ τοῦ σημείου Α ἀρχομένη, μηδέν ἐστι πρὸς αὐτῷ τῷ σημείῳ· ἀλλὰ πρὸς τῷ σημείῳ Α τὸ ἡμίτμημα $O\Pi M^1$ γίνεται OAN· ἄρα $o = \frac{2\pi\beta\kappa}{\eta\alpha\alpha}\times O$

$$AN + \frac{2\pi\beta\kappa}{\eta\alpha\alpha} + \Gamma\cdot \text{ ὅθεν } \Gamma = -OAN\cdot \text{ τὸ ἄρα}$$

πλῆρες ὁλόκληρον ἔστι $\frac{2\pi\beta\kappa}{\eta\alpha\alpha}\times O\Pi M^1 - \frac{2\pi\beta\kappa}{\kappa\alpha\alpha}$

$\times OAN$, εἴτ' ἂν $\frac{2\pi\beta\kappa}{\eta\alpha\alpha}(O\Pi M^1 - OAN)$, ἢ τε-

λευταῖον $\frac{2\pi\beta\kappa}{\eta\alpha\alpha}(A\Pi M^1{}'N)$· ἡ ἄρα ἡμίσεια ἐπιφάνεια

τῆς ἐλλειπτικῆς κωνοίδος ἔσαι $\frac{2\pi\beta\kappa}{\eta\alpha\alpha}(AKPN)$, ἢ (ἐπεὶ

$KO = \frac{\frac{1}{4}\alpha\alpha}{\kappa}$, καὶ ἑπομένως $\frac{2\kappa}{\alpha\alpha} = \frac{1}{2KO}$) ἔσαι =

$\frac{\pi}{\eta}\times\frac{\beta}{2KO}\times AKPN$, ἧς τὸ διπλοῦν ἐμφαίνει ὅλην τῆς ἐλλειπτικῆς κωνοίδος τὴν ἐπιφάνειαν.

264. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἁπλούστατα δὲ διορίζεται ἡ ἀκτὶς KO· κέντρῳ μὲν γὰρ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΑ, γε-

γράφθω τόξον τὸ ΑΛ τέμνον κατὰ τὸ Λ τὴν ἐπὶ τῆς ΚΑ ἀνισαμένην πρὸς τῷ Ε κάθετον ΕΛ, ᾗ προήχθω ἡ ΚΛ ἕς τ' ἂν συμβάλῃ κατὰ τὸ Ν τῇ πρὸς τῷ Α ἀνεγερθείσῃ καθέτῳ ΑΝ· ὅθεν προκύψει ἡ ΚΝ ἴση τῇ ΚΟ, ἢ τῇ $\frac{\frac{1}{4}\alpha\alpha}{\mu}$· ἐπ γὰρ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΕΛ, ΚΑΝ πρόεισι ΚΕ : ΚΛ : : ΚΛ : ΚΝ, εἴτ' ἔν κ : $\frac{1}{2}$ α : : $\frac{1}{2}$ α : ΚΝ = $\frac{\frac{1}{4}\alpha\alpha}{\kappa}$ = ΚΟ.

265. Αἱ δὲ ἐπὶ τὲς λογαρίθμες ἀμέσως ἀναγόμεναι ποσότητες εἰσὶν, ἐν αἷς τὸ προκείμενον ἀπειροσὰν, ἤτοι ἐσὶν, ἢ γίνεται κλάσμα, ἕ ὁ ἀριθμητὴς ἐσι τὸ ἀπειροσὸν τῇ παρονομασῇ· ἢ γῆν τὸ ἀπειροσὸν πολλαπλασιάζεται, ἢ διαιρεῖται δι' ἀριθμῇ ἀμεταβλήτε.

266. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ. Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἀκριβῶς ὑπάρχῃ ἀπειροσὸν τῇ παρονομασῇ, τὸ ὁλόκληρον ἔσιν ὁ λογάριθμος τῇ παρονομασῇ· ἕτως Ο $\frac{\delta\chi}{\chi}$ = λ.χ + Γ,

ᾗ Ο $\frac{\delta\chi}{\alpha+\chi}$ = λ (α + χ) + Γ, ᾗ Ο. $\frac{2\alpha\chi\delta\chi}{\alpha\alpha+\chi\chi}$ = λ (αα + χχ) + Γ.

267. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἀπειροσὸν ᾗ τῇ παρονομασῇ, πολλαπλασιαζόμενος, ἢ διαιρέμενος, δι' ἀριθμῇ ἀμετατρέπτε, τὸ μὲν προκείμενον ἀπειροσὸν ἀναλύεται εἰς δύω ποιητὰς, ὧν ὁ μὲν ἐσι κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸ ἀκριβὲς ἀπειροσὸν τῇ παρονομασῇ, ἄτερος δέ ἐσιν ἀριθμὸς ἀμετάτρεπτος· τὸ δὲ ὁλόκληρον ἔσαι ὁ λογάριθμος τῇ τρεπτῇ παρονομασῇ, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἀμετάτρεπτον ποιητήν. ϕῦτως εἰς ὁλοκλήρωσιν τῇ

$\frac{\alpha x^2 \delta x}{\alpha^3 + x^3}$, ἐπείπερ ἀπειροσὸν τοῦ $\alpha^3 + x^3$ ἔσιτὸ $3x^2 \delta x$, προδιαθετέον τὸ ἀπειροσὸν, ὡς εἶναι ἐν τῷ ἀριθμητῇ $3x^2 \delta x$· ἐπὶ δὲ τοῦτο γραπτέον $\frac{\alpha}{3} \times \frac{3x^2 \delta x}{\alpha^3 + x^3}$, ἧς τὸ ὁλόκληρον $\frac{\alpha}{3} \lambda (\alpha^3 + x^3) + \Gamma$ ὡσαύτως $O \frac{\delta x}{\varkappa - x} O \frac{1}{-1}$.

$$\frac{-1 \delta x}{\alpha - x} = -\lambda (\alpha - x) + \Gamma = o - \lambda (\alpha - x)$$

$$+ \Gamma = \lambda 1 - \lambda (\alpha - x) + \Gamma = \lambda \frac{1}{\alpha - x} + \Gamma.$$

ὁμοίως $O \frac{x \delta x}{\alpha\alpha + xx} = \frac{1}{2} x \frac{2x \delta x}{\alpha\alpha + xx} = \frac{1}{2} \lambda (\alpha\alpha + xx) + \Gamma = \lambda \sqrt{(\alpha\alpha + xx)} + \Gamma$. τέλος δὲ $O \frac{\alpha x^{\nu - 1} \delta x}{\varkappa + \beta x^\nu} = O \frac{\alpha}{\beta\nu} \times \frac{\nu \beta x^{\nu - 1} \delta x}{\varkappa + \beta x^\nu} = \frac{\alpha}{\beta\nu} \lambda (\varkappa + \beta x^\nu) + \frac{\alpha}{\beta^\nu}$

$\Gamma = \lambda (\varkappa + \beta x^\nu) + \Gamma$.

268. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ζητηθήτω ἡ δύναμις τοῦ $(\alpha + x)$ (τοῦ α ὄντος 5, τοῦ δὲ $x = 2$), τοῦτ' ἔσι ζητηθήτω ὁ τοῦ 7 ἀριθμοῦ λογάριθμος· εἰλήφθω τοίνυν ἐκ τῶν κοινῶν κανονίων ὁ τοῦ 7 λογάριθμος, ὅς ἐσι 0,8450980, ᾧ πεπολλαπλασιάσθω ἐπὶ (253) 2,302585 09, ἢ 2,3025851· ὅθεν πρόκύψει 1,9459100, ἢ 1,9459101 δύναμις τοῦ $\lambda (\alpha + x)$, οὗ τὸ ὁλόκληρον τοῦ $\frac{\delta x}{\alpha + x}$, ὅταν ἦ, α μὲν $= 5$, x δὲ $= 2$.

269. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐνίοτε δὲ ἀπαντῶσιν ἀπει-

ροξὰ, εὐθέως διὰ τῶν λογαρίθμων ὁλοκληρούμενα, καί τοι μὴ προδιατιθέμενα, καθάπερ τὰ προδιαληφθέντα· τοιῦ τόν ἐσι τὸ $\frac{\delta x}{\sqrt{(xx-1)}}$· ἔως' ὅτε δὲ τῦ σκοπῦ τυγχάνομεν, μεταχηματίζοντες αὐτὰ εἰς ἀπειροξὸν λογαριθμικὸν, ἀποπειρώμενοι, εἰ πολλαπλασιάζοντες αὐτὰ ἐπὶ συνέκθεσιν τῦ x, ποιῦμεν τὸ γινόμενον ἀπειροσὸν ταύτης τῆς συνεκθέσεως, ἢ αὐτὸ τὸ ἀπειροσὸν, πολλαπλασιαζόμενον, ἢ διαιρούμενον, δι' ἀριθμῦ ἀμετατρέπτυ· τηνικαῦτα γὰρ διὰ τῆς αὐτῆς συνεκθέσεως διαιρῦντες εὑρίσκομεν προφανῶς ἀπειροξὸν λογαριθμικόν· ταύτην ὗν τὴν θεωρίαν ἐφαρμόζοντες τῷ $\frac{\delta x}{\sqrt{(xx-1)}}$, πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ $x+\sqrt{(xx-1)}$, ὅθεν πρόεισι $\frac{x\delta x}{\sqrt{(xx-1)}}+\delta x$, ὅπερ ἐσὶν ἀληθῶς ἀπειροσὸν τῦ $x+\sqrt{(xx-1)}$·

ωσε $0\ \frac{\delta x}{\sqrt{(xx-1)}} = 0\ \frac{\delta x+\frac{x\delta x}{\sqrt{(xx-1)}}}{x+\sqrt{(xx-1)}} = \lambda\,[x+\sqrt{(xx-1)}]+\Gamma$, εὑρεθήσεται ὡσαύτως τὸ ὁλόκληρον τῦ $\frac{\delta x}{\sqrt{(1-xx)}}$, πολλαπλασιάσασι τόν τε ἀριθμητὴν, ᾗ τὸν παρονομασὴν ἐπὶ $\sqrt{(-1)}$, ὅθεν πρόεισι $\frac{\delta x\sqrt{(-1)}}{\sqrt{(xx-1)}}$, ᾧ τὸ ὁλόκληρον, ὥσπερ εἴδομεν, ἔσι $\sqrt{(-1)}\,\lambda\,[x+\sqrt{(xx-1)}]+\Gamma$.

270. Τὸ ὁλόκληρον τῦ $\frac{\delta x}{x}$ δύναται εἶναι πεπερασμένον, ἢ ἄπειρον, καθ' ὃ ἂν μέρος αὐτῦ βουλομένοις ἢ

εὑρεῖν· ἵνα δὲ τὸ πρᾶγμα ἀναπτύξωμεν, σημειωτέον, ὅτι εὑρεῖν τὸ ὁλόκληρον τῆ $\frac{\delta\chi}{\chi}$ ὐδέν ἐσιν ἄλλο, ἢ τετραγωνίσαι τὴν κωνικὴν ὑπερβολήν, ἀναφερομένην πρὸς τὰς αὐτῆς ἀσυμπτώτους· ἡ γὰρ ταύτης τῆς καμπύλης ἐξίσωσις ἔσι $\chi\upsilon = \alpha\alpha$, ἢ $\chi\upsilon = 1$, ὑποτιθεμένοις, διὰ τὸ ἁπλούσερον, $\alpha = 1$· ἀλλ' ἐκ ταύτης τῆς ἐξισώσεως ἀποφέρεται $\upsilon = \frac{1}{\chi}$· ἄρα τὸ σοιχεῖον υδχ τῆς ἐπιφανείας γίνεται $\frac{\delta\chi}{\chi}$· βυλομένοις ἄρα εὑρεῖν τὰ χωρία, τὰ ἀρχόμενα ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτυ AZ (χ. 83), τὸ ὁλόκληρον τῆ $\frac{\delta\chi}{\chi}$, εἴτ' ἓν $\lambda\chi + \Gamma$ χρεῶν εἶναι ἴσον μηδενὶ, ὅταν τὸ σημεῖον Π πίπτῃ ἐπὶ τῆ σημείυ A, εἴτ' ἓν ὅταν ἡ $\chi = o$· ἔσιν ἄρα τηνικαῦτα $\lambda o + \Gamma = o$, ϗ ἑπομένως $\Gamma = -\lambda o$· τὸ ἄρα ὁλόκληρον ἔσι $\lambda\chi - \lambda o = \frac{\chi}{\lambda o}$, τοῦτ' ἔσι τὰ χωρία ZAΠMΥ, τὰ ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτυ ἀρχόμενα, εἰσὶν ἄπειρα, τῶν Z, Υ περάτων ὑπάρχειν ὑποτεθέντων τῆς τε ἀσυμπτώτυ ϗ τῆ συσοιχοῦντος ὑπερβολικῆ κλωνός.

Ἀλλ' ἐὰν, τῆ σημείυ O κορυφὴ ὄντος τῆς ὑπερβολῆς (ὅτε ϗ ἡ συσοιχοῦσα ἀποτετμημένη AN ἔσιν $= 1$), βυλομένοις ἡμῖν εὑρεῖν τὰ ἀπὸ τῆ N ἀρχόμενα χωρία, τηνικαῦτα τὸ ὁλόκληρον $\lambda\chi + \Gamma$ χρεῶν γίνεσθαι μηδὲν, ὅταν τὸ Π πίπτῃ ἐπὶ τῆ N σημείυ, ἢ ὅταν ἡ $\chi = 1$· ἔσιν ἄρα $\lambda 1 + \Gamma = o$, ϗ ἑπομένως $\Gamma = -\lambda 1 = o$· τὰ ἄρα χωρία NOMΠ ἐκτίθενται διὰ $\lambda\chi$.

271. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐντεῦθεν δῆλον ἀ. ὅτι οἱ λογάριθμοι, οἱ ἐκ τῆ λογισμῶ ἀμέσως προκύπτοντες, ἐμφαίνουσι τὰ ὑπερβολικὰ χωρία, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῆς ἀσυμπτώτου καὶ τῆς καμπύλης, καὶ ἀρχόμενα ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην κορυφῆς Ο· διὰ τοῦτο δὲ καὶ ὑπερβολικοὶ ἦκουσαν (47) οἱ τοιοῦτοι λογάριθμοι· β΄. ἐὰν τὸ ὁλόκληρον τοῦ $\frac{\delta x}{x} = x^{-1}\delta x$, ληφθὲν κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα, ᾖ ἄπειρον, ἐμφαίνει τὰ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀσυμπτώτων ἀρχόμενα χωρία· ὀψόμεθα δὲ ἐν τοῖς ἑφεξῆς ὑποδείγματα ὁλοκληρώσεως, διὰ τῶν λογαρίθμων ἐπιτηδευομένης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν ἡ ἀπείρου δυωνύμου προκειμένου ὁλοκλήρωσις ἀνάγεται, ὅταν ἐξῆ, εἰς ὁλοκλήρωσιν ἀπείρου δυωνύμου ἐγνωσμένου.

272. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τὴν ὁλοκλήρωσιν ἀπείρου δυωνύμου εἰς τὴν δυωνύμου ἀπείρου γνωστοῦ ὁλοκλήρωσιν τρέψαι.

ΛΥΣΙΣ. Ἐξετάσαντες τὸ προτεθὲν ἀπειροστὸν (207, 209) εἰ εἴη ὁλοκληρώσιμον, καὶ τοῦτο μὴ εὑρόντες, τὰς τῆς προσεγγίσεως μεθόδους, περὶ ὧν διείληπται (241, κ.τ.λ.), ἀφέντες, ἐρευνήσωμεν, εἰ τὸ προτεθὲν ἀπειροστὸν ἀναχθῆναι ἔχοι εἰς ἀπειροστὸν δυώνυμον ἁπλούστερον, ὑφ' ἧπερ ἤδη ἔγνωσαι ἡ διὰ προσεγγίσεως ὁλοκλήρωσις· τῆς δὲ τοιαύτης ἀναγωγῆς χαρακτῆρες οἱ ἑφεξῆς.

Ε″σω $\alpha\chi^{\mu}\delta\chi\,(\beta+\gamma\chi^{\nu})^{\pi}$ τὸ προκείμενον ἀπειροσὸν, καὶ $\varepsilon\chi^{\rho}\delta\chi\,(\beta+\gamma\chi^{\nu})^{\pi}$ τὸ, ἐφ' ὃ ἀναγαγεῖν δεῖ τὸ προκείμενον· τοῦτ' ἔσιν ἀλλήλων μηδενὶ διαφερέτωσαν, ὅτι μὴ τοῖς συνεργοῖς α, ε, καὶ τοῖς τοῦ ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως χ δείκταις, καὶ ρ ἔσω ἔλαττον μὲν τοῦ μ, ταυτοσύμβολον μέντοι· ἡ δὲν ζητυμένη ἀναγωγὴ δυνατῶς ἔχει, εἴπερ $\frac{\mu-\rho}{\nu}$ ἀριθμὸς εἴη ὁλοχερὴς καὶ ὑπαρκτικός· ἵνα δὲ τοῦτο γένοιτο, ὑποτεθείσθω Ο $\alpha\chi^{\mu}\delta\chi\,(\beta+\gamma\chi^{\nu})^{\pi}+(\beta+\gamma\chi^{\nu})^{\pi+1}(\mathrm{A}\chi^{\mu-\nu+1}+\mathrm{B}\chi^{\mu-2\nu+1}+\Gamma\chi^{\mu-3\nu+1}+$ κ. τ. λ.) $+\Xi$ Ο $\varepsilon\chi^{\rho}\delta\chi\,(\beta+\gamma\chi^{\nu})^{\pi}$, προσλαμβάνεσι τόσους ὅρους σὺν ἑνὶ ἐν τῇ σειρᾷ $\mathrm{A}\chi^{\mu-\nu+1}+$ κτ. ὅσαι ἐνυπάρχεσι μοναδες τῷ $\frac{\mu-\rho}{\nu}$· ἵνα δὲ διορισθεῖεν οἱ συνεργοὶ Α, Β, Γ κτ. εἰλήφθω τὰ ἀπειροσὰ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, καὶ διηρήσθω διὰ $(\beta+\gamma\chi\nu)^{\pi}$, καὶ μετατεθείσθων ἐπὶ θάτερον μέλος πάντες οἱ ὅροι, καὶ ἐξισούσθων τῷ μηδενί· ἐκεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν τὸν αὐτὸν βαθμὸν τῆς χ πολλαπλασιαζόντων ὅρων τοσαύτας ἕξει ἐξισώσεις, ὅσαι εἰσὶν αἱ ἄγνωσοι Α, Β, Γ κτ.· ἐντεῦθεν δὲ αἱ ἄγνωσοι γνωσαὶ γενήσονται· προκείσθω γὰρ εἰς ὁλοκλήρωσιν το $\frac{\chi^{\sigma}\delta\chi}{\alpha^{5}}(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$· ἐκ τοίνυν τῶν εἰρημένων (207, 209) τὸ ἀπειροσὸν τόδε ὁλοκληρώσεως ἐσὶν ἀνεπίδεκτον· ἀλλὰ τοῦ σχήματος τῆς ἐν τῇ παρενθέσει ποσότητος ταυτιζομένου τῷ τῆς ἐμπεριεχομένης τῷ τόξου κυκλικοῦ τύπῳ, ζητηθήτω, εἴπερ ἡ προτεθεῖσα ποσότης ἐξέχοιτο τῆς $\alpha\delta\chi\,(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$, ἥτις ἐσὶ τύπος τόξου κύκλου, οὗ ἡ ἀκτὶς ἐσιν α, καὶ χ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένη· κα-

τὰ τοίνυν τὸν ἀποδοθέντα κανόνα ἔσι $\frac{\mu - \rho}{\nu}$, εἴτ' ὢν $\frac{6-0}{2}$, ἀριθμὸς ὁλοχερὴς ϗ ὑπαρκτικὸς 3· συνάγεται ἄρα ἐντεῦθεν, ὅτι τὸ ὁλόκληρον τῦ προκειμένυ ἀπειροσυ ἐξέχεται πάντως τοιύτυ τόξυ κυκλικῦ, εἰς ὃ τὴν εὕρεσιν ὑποτεθείσθω $0 \frac{\chi^6 \delta\chi}{\alpha^5} (\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}} = (\alpha\alpha - \chi\chi)^{\frac{1}{2}} (A\chi^5 + B\chi^3 + \Gamma\chi) + \Xi\, 0\, \alpha\delta\chi\, (\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$· ϗ εἰλήφθωσαν αὐτῶν τὰ ἀπειροσὰ, ἃ ἔσονται.

$$\frac{\chi^6 \delta\chi}{\alpha^5}(\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} (A\chi^5 + B\chi^3 + \Gamma\chi)\left(-\chi\delta\chi(\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}\right) \\ + (\alpha\alpha - \chi\chi)^{\frac{1}{2}}(5A\chi^4 + 3B\chi^2 + \Gamma)\delta\chi \\ + \Xi\,\alpha\delta\chi(\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

διαιρεθέντων δὲ διὰ $\delta\chi\,(\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$, ἀποφέρεται

$$\frac{\chi^6}{\alpha^5} = -A\chi^6 - B\chi^4 - \Gamma\chi^2 + (\alpha\alpha - \chi\chi)(5A\chi^4 + 3B\chi^2 + \Gamma) + \Xi\alpha\cdot$$

τῦ δὲ σεσημειωμένυ πολλαπλασιασμῦ πραχθέντος, ϗ μεταθέσεως γενομένης, πρόεισιν

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\alpha 5}\,\chi^6 + B\chi^4 + \Gamma\chi^2 - \Xi\alpha \\ + A\chi^6 + 3B\chi^4 + \Gamma\chi^2 \\ + 5A\chi^6 - 5A\alpha^2\chi^4 - 3B\alpha^2\chi^2 - \Gamma\alpha^2 \end{array}\right\} = 0$$

ἐπεὶ τοίνυν ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐπικρατεῖ, ὁποῖον ἂν εἴη τὸ χ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἑκασον τῦ χ βαθμὸν πολλαπλασιαζόντων ὅρων χρεὼν ὑπάρχειν μηδέν· ἔσιν ἄρα $6A + \frac{1}{\alpha^5} = 0$, ϗ $-5A\alpha^2 + 4B = 0$, ϗ $2\Gamma - 3B\alpha^2 = 0$, ϗ $-\Xi\alpha - \Gamma\alpha^2 = 0$· ἐκ δὲ τύτων τῶν ἐξισώσεων πο-

ρίζεται $A = -\frac{1}{6\alpha^3}$, ϗ $B = -\frac{5}{24\alpha^3}$, καὶ $\Gamma = -\frac{5}{16\alpha}$, ϗ $\Xi = \frac{5}{16}$· ἀκῶν τὸ ὁλόκληρον τῶ $\frac{\chi^\sigma \delta\chi}{\alpha^5}(\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$ ἔσιν $(\alpha\alpha - \chi\chi)^{\frac{1}{2}}(-\frac{\chi^5}{6\alpha^5} - \frac{5\chi^3}{24\alpha^3} - \frac{5\chi}{16\alpha}) + \frac{5}{16}\mathrm{O}.\alpha\delta\chi(\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}} + \Gamma$· τὸ δὲ $\mathrm{O}.\alpha\delta\chi(\alpha\alpha - \chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$, τόξον ὂν κύκλῳ, ᾧ ἡ μὲν ἀκτὶς ἔσιν α, ἡ δ' ἀποτετμημένη χ, εὐπετῶς εὑρίσκεται.

273. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ε'ὰν δὲ ἡ διαφορὰ $\mu - \rho$ τῶν δυοῖν ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως δεικτῶν, διαιρεθεῖσα διὰ τῶ ἐν τῇ παρενθέσει δείκτω ν, μὴ προβάλῃ ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικὸν, ἐ παρὰ τοῦτο συμπερανθήσεται ἀδύνατος ἡ ἀπειροσῶ ἐφ' ἕτερον ἀναγωγή· δεῖ γὰρ ἔτι ἀπεργάσασθαι τὸν ἐν τῇ παρενθέσει δείκτην λειπτικὸν ἐφ' ἑκάστω ἀπειροσῶ· ϗ ἦν διαφορὰ τῶν δύω νέων ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως δεικτῶν, διαιρεθεῖσα διὰ τῶ ἐν τῇ παρενθέσει δείκτω, προβάλῃ ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικὸν, δυνατῶς ἔχουσά ἐσιν ἡ ἀναγωγή· ἐὰν γὰρ, φέρε, ζητηθῇ, εἴπερ ἡ ποσότης $\chi^{-8}\delta\chi(\alpha^4 - \chi^4)^{-\frac{1}{2}}$ ἐξέχοιτο τῆς $\delta\chi(\alpha^4 - \chi^4)^{-\frac{1}{2}}$, δῆλον ὅτι $\frac{\mu - \rho}{\nu} = \frac{-8-0}{4}$ ἐ δίδωσιν ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικόν· πρὶν ἓν συναγαγεῖν ὅτι τὰ δύω ἀπειροσὰ ἀλλήλων εἰσὶν ἀνεξάρτητα, τρεπτέον εἰς $\chi^{-10}\delta\chi(\alpha^4\chi^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ ϗ $\chi^{-2}\delta\chi(\alpha^4\chi^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$· ἐνταῦθα μέντοι καταφανὲς, ὅτι $\frac{\mu - \rho}{\nu}$, εἴτ' ἓν $\frac{-10+2}{-4}$ προβάλλει ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑπαρκτικόν· τὰ δύω ἄρα ἀπειροσὰ ἀλλήλων ἐξέχονται· ἵν' ἓν τὸ προτεθὲν ὁλοκλη-

ρωθῇ ἐπὶ τῆς δευτέρας περιπτώσεως, μετιτέον, ὡς προείρηται, ἐκ αὐτὰ τὰ δύω ἀπειροστά, ἀλλὰ τὰ προκύψαντα μετὰ τὸ γενέσθαι λειπτικὸν τὸν δείκτην· ἐν ᾧ τῷ προτεθέντι ὑποδείγματι γενέσθω O. $\chi^{-10}\delta\chi\,(\alpha^4\chi^{-4}-1)^{-\frac{1}{2}} = (\alpha^4\chi^{-4}-1)^{\frac{1}{2}}(A\chi^{-5}+B\chi^{-1}) + \Xi O.\ \chi^{-2}\delta\chi\,(\alpha^4\chi^{-4}-1)^{-\frac{1}{2}}$, καὶ διωρίσθωσαν ὡς ἀνωτέρω οἱ συνεργοὶ A, B, Ξ.

274. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Συμβαίνει πολλάκις τὸ προκείμενον ἀπειροστὸν ὑπάρχειν ὁλοκληρώσιμον, καίπερ ἐξέχεσθαι δοκοῦν τοῦ δοθέντος ἀπειροστοῦ διὰ δατέρου τῶν δυοῖν κανόνων· ἀλλὰ παρὰ τοὺς ἀποδοθέντας ἐξεταστικοὺς κανόνας (207, 209), εἰ ἄρα τὸ προκείμενον ἀπειροστὸν ὑπάρχοι ὁλοκληρώσιμον, ἀείποτε συμβαίνει κατὰ ταύτην τὴν περίπτωσιν τὸν συνεργὸν Ξ, ὃς ἀφοσιοῦται τῷ ἀπειροστῷ, εἰς ὃ ζητεῖται ἀναγαγεῖν τὸ προκείμενον, ὑπάρχειν ο· ἐὰν, φέρε, ζητηθῇ, εἰ τὸ $\chi^{-4}\delta\chi\,(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$ ἐξέχοιτο τοῦ $\delta\chi\,(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}$, ἀδύνατον μὲν εὑρεθήσεται ἐν τῇ πρώτῃ τῶν δυεῖν περιπτώσεων· ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ, τοῦτ' ἔστι μεταβαλόντων τῶν ἀπειροστῶν εἰς $\chi^{-5}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, καὶ $\chi^{-1}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, εὑρεθήσεται $\frac{\mu-\rho}{\nu}$, εἴτ' ἂν $\frac{-5+1}{-2}$, ἀριθμὸς ὁλοχερὴς καὶ ὑπαρκτικὸς, ὃ δείκνυσι τὸ πρῶτον ἀπειροστὸν ἐξεχόμενον τοῦ δευτέρου· ἀλλ' ἔμπης τὸ ἀπειροστὸν $\chi^{-5}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}$ ἔστιν ὁλοκληρώσιμον (207), ἡ δ' ἀντίφασις φαινομένη μόνον ὑπάρχει· ἐὰν γὰρ ἐπισηριζόμενοι τῇ ποσότητι $\frac{\mu-\rho}{\nu}$, ἥτις ἐστὶν ἴση ἀριθμῷ ὁλοχερεῖ, ζητήσωμεν

ἀναγαγεῖν τὴν $\chi^{-5}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ εἰς $\chi^{-1}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, ποιήσομεν Ο $\chi^{-5}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ $=(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{\frac{1}{2}}\,(\mathrm{A}\chi^{-2}+\mathrm{B})+\Xi\mathrm{O}\,.\,\chi^{-1}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$, καὶ διορίζοντες τὰς συνεργὰς A, B, Ξ, ὡς περ ἀνωτέρω, εὑρήσομεν Ξ = 0· ὅθεν πρόεισιν Ο $\chi^{-5}\delta\chi\,(\alpha\alpha\chi^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ ἴσῃ ποσότητι καθαρῶς γεωμετρικῇ.

275. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ΄. Τ΄ποτεθείσθων ἤδη τὰ δύω δυώνυμα, τὰ εἰσιόντα ἐν τοῖς, περὶ ὧν ἐνταῦθα ὁ λόγος, ἀπειροσοῖς, ἔχοντα δείκτας διαφόρους· ὡς τὸ προτεθεν ἀπειροσὸν ὑπάρχειν $\eta\chi^{\sigma}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\varrho}$· τὸ δὲ, εἰς ὃ γενήσεται ἡ ἀναγωγὴ, $\chi^{\mu}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$, τοῦ π ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος ἐλάττω τοῦ, ὃν ἐμφαίνει τὸ ρ· ἐὰν οὖν ρ ᾖ ὑπαρκτικὸν, μεταβεβλήσθω τὸ ἀπειροσὸν $\eta\chi^{\sigma}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\varrho}$ εἰς $\eta\chi^{\sigma}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi-\varrho}\times(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$· τηνικαῦτα δὲ, εἴπερ $\rho-\pi$ εἴη ἀριθμὸς ὁλοχερὴς, ὑπαρκτικὸς, ἀναχθῆναι δύναται τὸ $\eta\chi^{\sigma}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\varrho-\pi}\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$ εἰς ὅρων σειρὰν τοιαύτην $(\mathrm{A}'\chi^{\sigma}+\mathrm{B}'\chi^{\sigma+\nu}+\Gamma'\chi^{\sigma+2\nu}+$ κ. τ. λ.) $\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$, ὧν ἕκαστος ἀναχθῆναι δύναται εἰς $\chi^{\mu}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$ διὰ τῆς προεκτεθείσης μεθόδου, εἰ σ—μ διαιρεθῆναι ἔχοι διὰ ν· ἵνα δὲ ὁλοχερῶς γένοιτο ἡ ἀναγωγὴ, ἐφηρμόσθω κατὰ λέξιν τὰ προειρημένα ἐπὶ ταύτης τῆς μεθόδου, λαμβάνουσιν ὑπὲρ τοῦ κληθέντος ἐκεῖθι σ τὸν μείζω δείκτην τῆς ἐν τῇ ἀνεπτυγμένῃ δυνάμει τοῦ $\eta\chi^{\sigma}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\varrho-\pi}$· ἐὰν, φέρε, προκέηται τὸ Ο $\chi^{2}\delta\chi\,(\beta\beta-\chi\chi)^{\frac{3}{2}}$ ἀναγαγεῖν εἰς Ο $\delta\chi\,(\beta\beta-\chi\chi)^{\frac{1}{2}}$, μεταβεβλήσθω τὸ Ο $\chi^{2}\chi\,(\beta\beta-\chi\chi)^{\frac{3}{2}}$ εἰς Ο $\chi^{2}\delta\chi\,(\beta\beta-\chi\chi)$

$(\beta\beta - \chi\chi)^{\frac{1}{2}}$, ἢ Ο $(\beta\beta\chi^2\delta\chi - \chi^4\delta\chi)(\beta\beta - \chi\chi)^{\frac{1}{2}}$ τηνικαῦτα δὲ, ὃ χρὴ λαβεῖν ὑπὲρ τοῦ σ, ἔσι 4· ὑποτεθείσθω ἄρα κατὰ τὴν μέθοδον, Ο $(\beta\beta\chi^2\delta\chi - \chi^4\delta\chi)$ $(\beta\beta - \chi\chi)^{\frac{1}{2}} = (\beta\beta - \chi\chi)^{\frac{3}{2}}(A\chi + B\chi^3) + O\,P\delta\chi(\beta\beta - \chi\chi)^{\frac{1}{2}}$.

276. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ΄. Ε'ὰν δὲ τἐναντίον, ὑπάρχῃ τὸ ρ λειπτικὸν, τὸ ἀπειροξὸν, εἰς ὃ ἀναγαγεῖν βυλόμεθα τὸ πρυκείμενον, προπαρασκευάσθω ὅτω· $\chi^{\mu}\delta\chi(\alpha + \beta\chi^{\nu})^{\pi-\rho} \times (\alpha + \beta\chi^{\nu})^{\rho}$· τηνικαῦτα δὲ, ἐὰν π — ρ ἀριθμὸς ᾖ ὁλοχερὴς, ἐπεὶ ἀναγκαίως ἔσαι ὑπαρκτικὸς (ὑποτίθεται γὰρ λειπτικὸν τὸ ρ ᾧ μεῖζον τοῦ π, ὁποιονδήποτ' ἂν εἴη τὸ π) δυνατὸν ἀναγαγεῖν τὸ $\chi^{\mu}\delta\chi(\alpha + \beta\chi^{\nu})^{\pi-\rho}(\alpha + \beta\chi^{\nu})^{\rho}$ εἰς πεπερασμένων ὅρων σειρὰν τοιαύτην $(A'\chi^{\mu} + B'\chi^{\mu+\nu} + \Gamma'\chi^{\mu+2\nu} + \kappa.\tau\lambda.)(\alpha + \beta\chi^{\nu})^{\rho}$· τηνικαῦτα δὲ πραχθήσεται, ὡς εἰ ἐζητεῖτο ἀναγαγεῖν ταύτην τὴν ἐχάτην σειρὰν εἰς τὸ χῆμα $\chi^{\sigma}\delta\chi(\alpha + \beta\chi^{\nu})^{\rho}$, τοῦτ' ἔσιν ἐπιτηδευθήσεται τὰ αὐτὰ, ἃ προδιώρισαι, ἡνίκα ἐσὶν ὑπαρκτικὸν τὸ ρ· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ζητῆται ἀναγαγεῖν τὸ $\Im\chi^{-2}\delta\chi(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-2}$ εἰς $\delta\chi(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-1}$, εἴτ' ἓν $\frac{\delta\chi}{\alpha\alpha + \chi\chi}$, ὅπερ (243) ὁλοκληροῦται διὰ τόξου κύκλου, ἓ ἡ μὲν χ ἔσιν ἀπτομένη, ἡ δὲ α ἀκτίς· μεταβεβλήσθω τοίνυν τὸ $\delta\chi(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-1}$ εἰς $(\alpha\alpha + \chi\chi)\delta\chi(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-2}$· χ ἐπείπερ ὁ ἐκτὸς τοῦ προτεθέντος δυωνύμου δείκτης ἔσι — 2, ὑποτεθείσθω $O.P(\alpha\alpha + \chi\chi)\delta\chi(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-2} = (\alpha\alpha + \chi\chi)^{-1}(A\chi^{-1} + B\chi) + O.\Im\chi^{-2}\delta\chi(\alpha\alpha + \chi\chi)^{-2}$· διηνύσθω δὲ τὰ λοιπὰ, ὡς ἀνωτέρω, πρὸς διορισμὸν τῶν συνεργῶν A, B, P· τηνικαῦτα δὲ διὰ μετα-

θέσεως πορισθήσεται ἡ δύναμις τοῦ O. $\vartheta x^{-2} \delta x (aa + xx)^{-2}$, ἐφ' ἧς ἀνήχθω εἶτα ἡ P $(aa + xx)\ \delta x\ (aa + xx)^{-2}$ P $\delta x\ (aa + xx)^{-1}$.

Ε'ὰν δὲ π — ρ μὴ ᾖ ἀριθμὸς ὁλοχερὴς, ἡ ἀπειροσοῦ ἐφ' ἕτερον ἀναγωγὴ ἔσαι ἀδύνατος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΩΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ λογικῶν κλασμάτων.

277. Πᾶσα ποσότης ἀπειροσὴ λογικὴ ἀείποτε ὁλοκληρώσεώς ἐστιν ἐπιδεκτική, ἤτοι γεωμετρικῶς, ἢ διὰ κυκλικῶν τόξων, ἢ διὰ λογαρίθμων, ἢ διὰ τῶν τριῶν ἅμα, ἢ μόνον διὰ δυοῖν.

Καὶ γεωμετρικῶς μὲν ὁλοκληροῦται ἀεὶ, ἡνίκα μὴ περιέχει παρονομασὴν τρεπτὸν, εἰ μὴ εἴη μονώνυμος· ἓν ἔτω μέντοι ἐξαιρεῖται, ἐὰν ᾖ ὑψωμένος εἰς βαθμὸν ἑδένα ἄλλον, ὅτι μὴ τὴν μονάδα.

Λείπεται δὲ ἰδεῖν τὴν ἀλήθειαν τοῦ προκειμένου ἐν ταῖς ἄλλαις περιπτώσεσι, τοῦτ' ἔσιν, ὅταν τὸ προκείμενον ἀπειροσὸν ἔχῃ παρονομασὴν λογικὸν συμπεπλεγμένον.

Ὑποτεθείσθω δὲ, ὅτι ἐν τῷ ἀριθμητῇ τοῦ προτεθέντος ἀπειροσοῦ κλάσματος ἡ τρεπτὴ ὑπάρχει βαθμοῦ ἥττονος, ἢ ἐν τῷ παρονομασῇ· ἐὰν δὲ μὴ ὕτως ἔχουσα ᾖ, ἤχθω εἰς τοῦτο, διαιροῦσι τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, μέχρις ἂν ὁ κατάλοιπος βαθμὸς γένοιτο ἐλάττων τοῦ ἐν τῷ παρονομασῇ· ἐὰν γὰρ, φέρε, προκέηται εἰς ὁλοκλήρωσιν $\frac{x^s \delta x}{aa + 3ax + xx}$, διηρήσθω $x^s \delta x$ διὰ $xx +$

$3\alpha\chi + \alpha\alpha$· ἐκεῖν ἔσαι $\chi\delta\chi$ πηλίκον ϗ — $3\alpha\chi^2\delta\chi$ — $\alpha\alpha\chi\delta$ καταλοιπον· διηρήσθω εἶτα τόδε τὸ καταλοιπον διὰ τῦ αὐτῦ, παρονομασῦ· ϗ ἔσαι, πηλίκον μὲν — $3\alpha\delta\chi$, καταλοιπον δὲ + $8\alpha^2\chi\delta\chi$ + $3\alpha^3\delta\chi$· τοιγαροῦν ἀντὶ $\frac{\gamma.^3\delta\chi.}{\alpha\alpha + 3\alpha\chi + \chi\chi}$, εἰλήφθω $\chi^3\chi$ — $3\alpha\delta\chi$ + $\frac{8\alpha^2\chi\delta\chi + 3\alpha^3\delta\chi}{\alpha\alpha + 3\alpha\chi + \chi\chi}$.

Ἵνα δὲ γνοίημεν, ὅπως ἂν ὁλοκληρωθείη κλάσματα ἀπειροσὰ λογικά, ἀναμνηθέντες, ὅτι τὸ ἀπειροσὸν λογαριθμῦ πάσης ποσότητος ἔσι τὸ ἀπειροσὸν τῆς αὐτῆς ποσότητος, διηρημένον διὰ τῆς αὐτῆς, τῦτ' ἔσιν ἀεί ποτε ὑπάρχει κλάσμα, ϗ ἀπεικότως ἂν συναγάγοιμεν, ὅτι ἡ τῶν λογικῶν κλασμάτων ὁλοκλήρωσις τῶν λογαριθμῶν ἐνδέχεται ἐξέχεωθαι· εἰλήφθω, φέρ' εἰπεῖν, τὸ $2\alpha\lambda(\alpha + \chi) - 2\alpha\lambda(2\alpha + \chi)$, ἧ τὰ ἀπειροσά εἰσι $\frac{2\alpha\delta\chi}{\alpha + \chi} - \frac{2\alpha\delta\chi}{2\alpha + \chi}$, ἤ, ἀναγωγῇ ἐπὶ κοινὸν ὄγομα, $\frac{2\alpha\alpha\delta\chi}{2\alpha\alpha + 3\alpha\chi + \chi\chi}$· δῆλον ἔν, ὅτι εἰς ὁλοκλήρωσιν τῦ δε τῦ κλάσματος, διαιρετέον ἐσὶν αὐτὸ εἰς δύω κλάσματα, ὧν τὸ μὲν ἂν ἔχοι παρονομασὴν $\alpha + \chi$, θάτερον δὲ, $2\alpha + \chi$· οἱ δὲ ἑκατέρων ἀριθμήται εἶεν ἀριθμοὶ ἀμετάτρεπτοι, πεπολλαπλασιασμένοι ἐπὶ $\delta\chi$· ταῦτα δὲ τὰ δύω κλάσματα ὁλοκληρῦνται τότε διὰ τῶν λογαριθμῶν.

278. Εἰς ἆρα ὁλοκλήρωσιν τῶν τοιῦτων κλασμάτων, ἀναλυτέον αὐτὰ εἰς τοσάδε κλάσματα ἁπλᾶ, ὅσες ποιητὰς ἔχει ὁ παρονομασὴς, ὧν ἕκασον ἔχει παρονομασὴν ἕνα τῦτων τῶν ποιητῶν· ταύτῃ ἔν τῇ μεθόδῳ χρη-

σέον, ὅταν πάντες οἱ ποιηταὶ, ἀφ' ὧν συνίσαται ὁ παρονομασὴς, ὦσιν ἄνισοι.

279. Ε'ὰν δὲ μεταξὺ τῶν τῆ παρονομασῆ ποιητῶν ἀπαντῶσι ϗ ἰσάλληλοι, ἄχρησος τηνικαῦτα ἡ μέθοδος, εἴ γε ἡ ὁλοκλήρωσις ὁλοχερῶς τῶν λογαρίθμων ἐκ ἔχεται· ἐὰν γὰρ, φέρ' εἰπεῖν, προκέηται τὸ $\frac{\delta\chi}{(\alpha+\chi)^2}$, ἧ ὁ παρονομασὴς ἔχει δύω ἰσαλλήλες ποιητὰς $\alpha+\chi$, $\alpha+\chi$ εὑρεθήσεται (203) ταύτης τῆς ποσότητος τὸ ὁλόκληρον, ἢ τῆς αὐτῆ ἴσης $\delta\chi\,(\alpha+\chi)^{-2}$, ὑπάρχον $-(\alpha+\chi)^{-2}+\Gamma$· ὅπερ ἐδεμίαν ὅλως ἔχει ϗέσιν πρὸς τὺς λογαρίθμυς· ἀλλὰ καταδηλον ἅμα, ὡς εἰ ληφθεῖεν τὰ ἀπειροσὰ ποσότητος, οἷα ἡ $\frac{\alpha\alpha}{\alpha+\chi}+2\alpha\lambda\,(\alpha+\chi)$ $+\,2\alpha\lambda\,(2\alpha+\chi)$, ἔσαι $-\frac{\alpha\alpha\delta\chi}{(\alpha+\chi)^2}+\frac{2\alpha\delta\chi}{\alpha+\chi}+\frac{2\alpha\delta\chi}{2\alpha+\chi}=\frac{(\alpha\alpha+2\alpha\chi)\,\delta\chi}{(\alpha+\chi)^2}+\frac{2\alpha\delta\chi}{2\alpha+\chi}$, εἴτ' ἓν (ἀναχθέντων ἁπάντων τῶν ὅρων εἰς ϗοινὸν παρονομασὴν) $\frac{4\alpha\chi^2\delta\chi+9\alpha^2\chi\delta\chi+4\alpha^3\delta\chi}{(\alpha+\chi)^2\,(2\alpha+\chi)}$, ἧ τὸ ὁλόκληρον προδήλως περιέχει μίαν γεωμετρικὴν ϗ λογαριθμικὰς ποσότητας· ὁ τρόπος ἓν τῆ εὑρεῖν τῆτο τὸ ὁλόκληρον, ὑπαγαγεῖν ἐσι τὸ ἀπειροσὸν τῷ προτέρῳ ϗήματι $\frac{\alpha\alpha+2\alpha\chi}{(\alpha+\chi)^2}\,\delta\chi+\frac{2\alpha\delta\chi}{\alpha+\chi}$, τῆτ' ἔσιν, ἀναλύσαι εἰς δύω κλάσματα, ὧν τὸ μὲν ἔχοι, παρονομασὴν μὲν πάντας τὺς ἴσυς ποιητὰς, ἐν δὲ τῷ ἀριθμητῇ πάντας τὺς τῆς χ βαθμὺς πλὴν

τῦ ἐν τῷ παρονομασῇ καθυπερτέρᾳ βαθμῷ· τῶν δ' ἄλλων κλασμάτων ἔχοιεν ἕκασον, παρονομασὴν μὲν ἕνα τῶν ἀνίσων ποιητῶν, ἐν δὲ τῷ ἀριθμητῇ ἑδένα βαθμὸν τῆς χ· τηνικαῦτα γὰρ ὁ μὲν ὅρος $\frac{\alpha\alpha + 2\alpha\chi}{(\alpha+\chi)^2}\delta\chi$ εὐμαρῶς ὁλοκληρῦται διὰ τῶν προαποδοθέντων κανόνων, ὁ δὲ $\frac{2\alpha\delta\chi}{2\alpha+\chi}$ διὰ τῶν λογαρίθμων· δυνατὸν ἦν διατέμνειν ἔτως ἅπαν λογικὸν κλάσμα· ᾗ τῦτο φαεὶ ἐπιτηδεύσαιμεν ἄν, εἰ μὴ εἶεν ποιηταὶ ἐπίπλαςοι ἐπὶ τῦ παρονομασῦ.

Τοιγαρῦν $\frac{(\alpha + \beta\chi + \gamma\chi^2 + \ldots\ldots \varkappa\chi^{\nu-1})\,\delta\chi}{(\mathrm{M} + \mathrm{N}\chi + \Pi\chi^2 + \ldots. \mathrm{T}\chi^{\nu})}$

ἐμφαινέτω ἐν γένει ἅπαν κλάσμα λογικόν· ᾗ ὑποτεθείσθω ὁ παρονομασὴς ἔχων ἀριθμὸν μ ποιητῶν ἴσων τῷ $\chi + \vartheta$, ᾗ ἀριθμὸν π ποιητῶν ἴσων ἑκάςῳ τῷ $\chi + \eta$, κτ. ᾗ ἀριθμὸν ὁντιναῦν ποιητῶν ἀνίσων ᾗ ἐμφαινομένων διὰ $\chi + \iota$, $\chi + \xi$, $\chi + \rho$, κτλ.· ἑκεῖν τὸ προτεθὲν κλάσμα ἔςαι $\frac{(\alpha + \beta\chi + \gamma\chi^2 + \ldots. \varkappa\chi^{\nu-1})\,\delta\chi}{(\chi+\vartheta)^{\mu}\,(\chi+\eta)^{\pi} \times \text{κτλ.}\,(\chi+\iota)(\chi+\xi)(\chi+\rho)\ldots\text{κτλ.}}$· εἰς δὲ τὴν τῦτο ὁλοκλήρωσιν ἐπάναγκες ὑποθεῖναι αὐτὸ ἴσον τῷ $\frac{\mathrm{A}\chi^{\mu-1}\delta\chi + \mathrm{B}\chi^{\mu-2}\delta\chi \ldots\ldots + \mathrm{P}\delta\chi}{(\chi+\vartheta)^{\pi}} + \frac{\mathrm{A}^{\mathrm{I}}\chi^{\pi-1}\delta\chi + \mathrm{B}^{\mathrm{I}}\chi^{\pi-2} + \ldots. \mathrm{P}^{\mathrm{I}}\delta\chi}{(\chi+\eta)^{\pi}}$ κτλ. $+ \frac{\Lambda\delta\chi}{\chi+\iota} + \frac{\mathrm{M}\delta\chi}{\chi+\xi} + \frac{\mathrm{N}\delta\chi}{\chi+\rho} +$ κτλ., τῶν Α, Β, Γ, κτλ. συνεργῶν ὄντων ἀμεταπτώτων ᾗ ἀδιορίςων· ἐὰν δὲ τηνικαῦτα διορισθῶσι τρόπῳ τινὶ οἱ συνεργοὶ, εὐχερῶς πορισθήσεται τὸ ὁλόκληρον· ᾗ τῦτο πρόδηλον μέν ἐςιν ὑπὲρ

τῶν ἁπλῶν κλασμάτων $\frac{\Lambda\delta\chi}{\chi+\iota}, \frac{\mathrm{M}\delta\chi}{\chi+\xi}, \frac{\mathrm{N}\delta\chi}{\chi+\varrho}$, κτλ., ὧν ὁλόκληρά εἰσι τὰ $\Lambda\lambda\,(\chi+\iota)$, $\mathrm{M}\lambda\,(\chi+\xi)$, $\mathrm{N}\lambda\,(\chi+\varrho)$, κτλ· ὑπὲρ δὲ τῶν κλασμάτων $\frac{\mathrm{A}\chi^{\mu-1}\delta\chi+\frac{\mathrm{B}\chi^{\mu-2}\delta\chi+\ldots\mathrm{P}\delta\chi}{(\chi+\vartheta)^{\mu}}}{(\chi+\vartheta)^{\mu}}$, γενέσθω, διὰ τὸ ἁπλέστερον, $\chi+\vartheta=\psi$· ὅθεν $\chi=\psi-\vartheta$, καὶ $\delta\chi=\delta\psi$· αἱ τικατασταθεισῶν δὲ τούτων τῶν δυνάμεων, ἀναχθήσεται τὸ ὅλον εἰς σειρὰν μονωνύμων ῥᾳδίως ὁλοκληρωμένων, ὧν ἓν μόνον ἔξει τὸ σχῆμα $\frac{\delta\psi}{\psi}$, εἶτ' ἓν ὁλοκληρωθήσεται διὰ τῶν λογαρίθμων· ὡσαύτως ὑπὲρ τῶν ὅρων $\frac{\mathrm{A}^{\mathrm{I}}\chi^{\pi-1}\delta\chi+\frac{\mathrm{B}^{\mathrm{I}}\chi^{\pi-2}\delta\chi+\ldots\mathrm{P}^{\mathrm{I}}\delta\chi}{(\chi+\eta)^{\pi}}}{(\chi+\eta)^{\pi}}$ γενέσθω $\chi+\eta=\psi^{\mathrm{I}}$.

Οὐδὲν ἓν ἔτι λοιπὸν, ὅτι μὴ δύω τινὰ ἐξετάσαι· ὅπως εὑρίσκονται οἱ ποιηταὶ τῷ παρονομαστῷ τῷ προτεθέντος ἀπείρου κλάσματος, καὶ ὅπως οἱ ἀδιόριστοι συνεργοί.

280. Εἰς ἓν εὕρεσιν τῶν τῷ παρονομαστῷ ποιητῶν τὰ αὐτὰ ἐπιτηδευτέον, ἃ καὶ ἐν τῇ ἐπιλύσει τῶν ἐξισώσεων, ἐξισοῦντας τῷ μηδενὶ τὸν παρονομαστήν· ἐπιλύειν γὰρ ἐξίσωσιν (Συμβ. Λογ. 488) ζητεῖν ἐστι τοὺς δυωνύμους ποιητὰς, ὑφ' ὧν γέγονεν ἡ ἐξίσωσις.

281. Εἰς δὲ εὕρεσιν τῶν συνεργῶν A, B, Γ, ἀνακτέον εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν πάντα τὰ κλάσματα, οἷς ἕτοι ἐνυπάρχουσι· τηνικαῦτα δὲ τῶν δυοῖν μελῶν τῆς ἐξισώσεως, τῆς συνισταμένης ἔκ τε τοῦ προτεθέντος κλάσματος καὶ τῶν καινῶν τῶν δε κλασμάτων, ἐχόντων τὸν

αὐτὸν παρονομασὴν, δυνατὸν αὐτὸν ἑκατέρωθεν ἐκβαλεῖν, ϗ πάντων μετατεθέντων ἐπὶ θάτερον μέλος, ἀνάγκη, μηδεμιᾶς ὕσης χέσεως πρὸς τὴν χ, τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων, τῶν πολλαπλασιαζόντων τὸν αὐτὸν βαθμὸν τῦ χ, ὑπάρχειν μηδέν· ἐντεῦθεν τοσαῦται ἀνακύψουσιν ἐξισώσεις, ὅσοι εἰσὶν ἀδιόριστοι συνεργοί· ὅθεν ϗ διορισθήσονται.

282. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ὁλοκληρῶσαι τὸ ἀπειροστὸν $\frac{\delta x}{\alpha\alpha - xx}$.

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω $\frac{\delta x}{\alpha\alpha - xx} = \frac{A\delta x}{\alpha + x} + \frac{B\delta x}{\alpha - x}$, ἐπείπερ οἱ δύω ποιηταὶ τῦ παρονομασῦ $\alpha\alpha - xx$ εἰσὶν $\alpha + x$, ϗ $\alpha - x$· ἀναγωγῇ ἕν ἐπὶ κοινὸν παρονομασὴν, ἔσαι $\frac{\delta x}{\alpha\alpha - xx} = \frac{(A\alpha - Ax + B\alpha + Bx)\delta x}{\alpha\alpha - xx}$. ἀποβολῇ δὲ τῦ κοινῦ παρονομασῦ, διαιρέσει διὰ δx, ϗ μεταθέσει, ἔσαι

$$\left\{\begin{matrix} 1 + Ax \\ - A\alpha - Bx \\ - B\alpha \end{matrix}\right\} + 0$$

ἄρα $1 - A\alpha - B\alpha = 0$, ϗ $A - B = 0$· ὅθεν εὐχερῶς ἀνάγεται $A = \frac{1}{2\alpha}$, ϗ $B \frac{1}{2\alpha}$· ἔσαι ἄρα $\frac{\delta x}{\alpha\alpha - xx} = \frac{\frac{1}{2\alpha}\delta x}{\alpha + x} + \frac{\frac{1}{2\alpha}\delta x}{\alpha - x}$, ὧν τὰ ὁλόκληρά εἰσιν $0 \cdot \frac{\delta x}{\alpha\alpha - xx} = \frac{1}{2\alpha}\lambda(\alpha + x) - \frac{1}{2\alpha}\lambda(\alpha - x) + \Gamma = \frac{1}{2\alpha}\lambda\frac{\alpha + x}{\alpha - x} + \Gamma$.

283. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Ὁλοκληρῶσαι τὸ κλάσμα

$$\frac{4\alpha\chi\chi + 9\alpha^2\chi + 4\alpha^3}{(\alpha+\chi)^2(2\alpha+\chi)}\,\delta\chi.$$

ΛΥΣΙΣ. Τετὶ εὕρηται, λημθέντων τῶν ἀπειροστῶν ἐκ τῆς ποσότητος (279) $\frac{\alpha\alpha}{\alpha+\chi} + 2\alpha\lambda(\alpha+\chi) + 2\alpha\lambda(2\alpha+\chi)$· ὑποτεθείσθω τοίνυν $\frac{4\alpha\chi^2 + 9\alpha^2\chi + 4\alpha^3}{(\alpha+\chi)^2(2\alpha+\chi)}\,\delta\chi$ $= \frac{A\chi + B}{(\alpha+\chi)^2}\,\delta\chi + \frac{\Gamma\delta\chi}{2\alpha+\chi}$· ἀναχθέντων ἐν τῶν κλασμάτων ἐπὶ κοινὸν ὄνομα, τῷ κοινῷ παρονομαστῷ ἀποβληθέντος, διαιρέσει καὶ μεταθέσει πορισθήσεται

$$\left.\begin{array}{l} 4\alpha\chi^2 + 9\alpha^2\chi + 3\alpha^3 \\ -A\chi^2 - 2A\alpha\chi - 2B\alpha \\ -\Gamma\chi^2 - B\chi - \Gamma\alpha\alpha \\ -2\alpha\Gamma\chi \end{array}\right\} = 0$$

ἄρα $4\alpha - A - \Gamma = 0$, καὶ $9\alpha^2 - 2A\alpha - B - 2\alpha\Gamma = 0$, καὶ $4\alpha^3 - 2B\alpha - \Gamma\alpha\alpha = 0$· ὅθεν $A = 2\alpha$, $B = \alpha^2$, καὶ $\Gamma = 2\alpha$· τὸ τοίνυν προτεθὲν ἀπειροστὸν μεταβαλεῖ εἰς $\frac{2\alpha\chi + \alpha\alpha}{(\alpha+\chi)^2}\,\delta\chi + \frac{2\alpha\delta\chi}{2\alpha+\chi}$· ἀλλὰ τῷ μὲν δευτέρῳ ὅρῳ ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $2\alpha\lambda(2\alpha+\chi)$· εἰς δὲ εὕρεσιν τοῦ πρώτου, γενέσθω $\alpha + \chi = \psi$· ὅθεν $\chi = \psi - \alpha$, καὶ $\delta\chi = \delta\psi$· ἀντικατασάντος δὲ τούτου ἐν $\frac{2\alpha\chi + \alpha\alpha}{(\alpha+\chi)^2}\,\delta\chi$, ἔσται $\frac{2\alpha\psi - \alpha\alpha}{\psi\psi}\,\delta\psi = \frac{2\alpha\delta\psi}{\psi} - \frac{\alpha\alpha\delta\psi}{\psi\psi}$, οὗ ὁλόκληρόν ἐστι τὸ $2\alpha\lambda.\psi + \frac{\alpha\alpha}{\psi} = 2\alpha\lambda(\alpha+\chi) + \frac{\alpha\alpha}{\alpha+\chi}$·

τὸ ἄρα ὅλον ὁλόκληρον ἔσαι $\frac{\alpha\alpha}{\alpha+\chi}$ + 2αλ(α + χ) + 2αλ (2α + χ), ὥσπερ ἔχειν ἐπάναγκες.

284. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Γενικὴ ὑπάρχει ἡ μέθοδος αὕτη· δυνατὸν δὲ ῥᾳδιεργῆσαι τὴν τῶν συνεργῶν εὕρεσιν διὰ πλειόνων μεθόδων· δυνατὸν, φέρ' εἰπεῖν, ἀφχέτως ἀλλήλων, εὑρεῖν τὰς συνεργὰς τῶν ἁπλῶν κλασμάτων ὕτως· ἔσω $\frac{N\delta\chi}{M}$ τὸ προκείμενον κλάσμα· ηχ + α εἷς τῶν τῦ παρονομαστῦ ποιητῶν· ϗ ἔσω Π πηλίκον, προϊὸν ἐκ τῆς τῦ M διὰ ηχ + α διαιρέσεως· ϗ ἐπινοηθήτω τὸ $\frac{N\delta\chi}{M}$ ἀναλελυμένον εἰς $\frac{A\delta\chi}{\eta\chi+\alpha}$ ϗ $\frac{\Xi\delta\chi}{\Pi}$· ἔσαι τοίνυν $\frac{N\delta\chi}{M}$ = $\frac{A\delta\chi}{\eta\chi+\alpha}$ + $\frac{\Xi\delta\chi}{\Pi}$, εἴτ' ἴσν $\frac{N}{M}$ = $\frac{A}{\eta\chi+\alpha}$ + $\frac{\Xi}{\Pi}$· ἀναχθέντων ἄρα ἐπὶ κοινὸν παρονομασὴν, ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως $\Pi + \frac{M}{\eta\chi+\alpha}$, ἢ Π × (ηχ + α) = M, ἔσαι M = ΑΠ + Ξ (ηχ + α)· ληφθέντων δὲ τῶν ἀπειροσῶν τῆς ἐξισώσεως (ηχ + α) Π = M, ἔσαι ηΠδχ + (ηχ + α) δΠ = δM· ἀλλὰ αὕτη ἡ ἐξίσωσις, ὥσπερ ϗ ἡ N = ΑΠ + Ξ (ηχ + α), κρατῦσα ἐπὶ πάσης τῦ χ δυνάμεως, κρατήσει ϗ, ὁπηνικ' ἂν ἀντικατασαθῇ ἡτισῦν τῦ χ δύναμις· τεθείωθω ἄρα ἀντὶ χ ἡ δύναμις, ἡ ἐκ τῦ ἁπλουστέρου ἀποτελέσματος προϊοῦσα, εἴτ' ἴσν τὸ $-\frac{\alpha}{\eta}$, ὃ πρόεισιν ὑποτιθεμένου τῦ παρονομαστῦ ηχ + α = 0· πορισθήσεται ἄρα τηνικαῦτα ηΠδχ = δM, ϗ N = ΑΠ· τεθείσης ἴν ἐν

τῷ δευτέρῳ τῆς δυνάμεως $\Pi = \frac{\delta M}{\eta \delta \chi}$, τῆς ἐκ τοῦ πρώτου ἐξισώσης, ἔσαι $A = \frac{\eta N \delta \chi}{\delta M}$, τοῦτ' ἔστιν εἰς εὕρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ A ἑνός τινος τῶν ἁπλῶν κλασμάτων, διαιρετέον τὸν $N\delta\chi$ ἀριθμητὴν τοῦ προτεθέντος διὰ τοῦ ἀπειροστοῦ δM τοῦ ἐν αὐτῷ παρονομαστοῦ, καὶ ἀντικαταστήσαντας ἀντὶ χ τὴν προϊοῦσαν δύναμιν, εἰ ὁ τοῦ ἁπλοῦ κλάσματος παρονομαστὴς ἰσωθείη τῷ μηδενὶ, πολλαπλασιαστέον τὸν ὅλον παρονομαστὴν τοῦ ἁπλοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν τοῦ χ συνεργόν· εἰς εὕρεσιν, φέρ' εἰπεῖν, τῶν ἀριθμητῶν A, B τῶν κλασμάτων $\frac{A\delta\chi}{\alpha + \chi}$, καὶ $\frac{B\delta\chi}{\alpha - \chi}$, εἰς ἃ ἀναλέλυται τὸ κλάσμα $\frac{\delta\chi}{\alpha\alpha - \chi\chi}$, εἰλήφθω τὰ τοῦ $\alpha\alpha - \chi\chi$ παρονομαστοῦ ἀπειροστὰ, εἴτ' ἓν $- 2\chi\delta\chi$· καὶ διηρήσθω ὁ $\delta\chi$ ἀριθμητὴς τοῦ προτεθέντος διὰ τοῦ $- 2\chi\delta\chi$· ὅθεν πρόεισιν $- \frac{1}{2\chi}$, ἐν ᾧ ἀντικατασταθέντων ἀλληλοδιαδόχως ἀντὶ χ τῶν $- \alpha$, α (ἃ εὑρίσκονται ἴσα τῷ χ, ἰσυμένων ἐξῆς τῷ μηδενὶ τῶν κατὰ τὰ μεριχώτερα κλάσματα παρονομαστῶν $\alpha + \chi$, καὶ $\alpha - \chi$), πολλαπλασιαθέντος τε τοῦ εἰρημένου κλάσματος ἐπὶ τὰς τοῦ η δυνάμεις 1 καὶ $-$ 1, πορίζονται $\frac{1}{2\alpha}$, καὶ $\frac{1}{2\alpha}$ δυνάμεις τοῦ A, καὶ B, ὥσπερ ἀνωτέρω εὕρομεν.

285. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δυνατὸν δὲ ἀποδεῖναι καὶ γενικοὺς κανόνας πρὸς διορισμὸν τῶν κατὰ τοὺς ἀριθμητὰς τῶν μεριχωτέρων κλασμάτων συνεργῶν, ἐπὰν τὰ κλάσματα ἔχωσι παρονομαστὴν τὸ ὑπὸ ῥιζῶν ἰσαλλήλων γινόμενον· τούτων μέντοι ἡμεῖς οὐδενὸς ἐν τῷ παρόντι ἁψόμεθα.

286. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Οἱ περὶ ὁλοκληρώσεως τῶν λογικῶν κλασμάτων ἡμῖν ἀποδοθέντες κανόνες γενικοὶ μέν εἰσιν· ὅταν δέ τινες τῶν τῇ παρονομαστῇ ποιητῶν ὦσιν ἐπίπλαστοι, πρόεισιν ὁλόκληρον ποσότητες ἐπιπλάστοις ἀνάμικτοι, ἐκ εὐχερῶς εἰς χῆμα πραγματικὸν ἐπαναγόμενον· τηνικαῦτα τοίνυν ἐκβλητέον πρῶτον τῇ παρονομαστῇ πάντας τὰς αὐτῇ πραγματικὰς ποιητάς· μεθ' ὃ ἀναλυτέον τὸ λειπόμενον ἐχὶ εἰς πρωτοβαθμίους, ἀλλ' εἰς δευτεροβαθμίους ποιητὰς, οἵτινες ἀεί ποτε εἰσὶ πραγματικοί· ᾧ χηματισέον ὑπὲρ ἑκάστῃ δευτεροβαθμίῳ ποιητῇ, ὃς ἀεὶ παρασαθῆναι ἔχει διὰ $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, κλάσμα τοιοῦτο $\frac{A\chi\delta\chi + B\delta\chi}{\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma}$, ᾧ διοριστέον ἀεὶ τὰς συνεργούς, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται· προκειμένῃ φέρε εἰς ὁλοκλήρωσιν τῇ κλάσματος $\frac{\alpha^4\delta\chi}{\alpha^3 - \chi^3}$, εὑρήσω πρῶτον ἐξισωμένῃ μηδενὶ τῇ παρονομαστῇ $\alpha^3 - \chi^3$ εἷς τῶν αὐτῇ ποιητῶν ὁ $\alpha - \chi$· ᾧ διαιρεθέντος τῇ $\alpha^3 - \chi^3$ διὰ $\alpha - \chi$ πρόεισι $\alpha^2 + \alpha\chi + \chi^2$, ὃ περιέχει δύω ἑτέρους ποιητάς· ἐξισωμένῃ δὲ τούτῳ τῷ μηδενὶ εἰς εὕρεσιν τῶν αὐτῇ ποιητῶν, εὑρεθήσονται ποσὰ ἐπίπλαστα· διὸ δὴ ἐκ εἰς τρία, εἰς δὲ δύω μόνον, ἀναλυτέον τὸ προκείμενον κλάσμα, ἔχοντα παρονομαστὰς, τὸ μὲν τὸν ποιητὴν $\alpha - \chi$, θάτερον δὲ, τὰ $\alpha^2 + \alpha\chi + \chi^2$· ἐκῶν ὑποτεθείσθω $\frac{\alpha^4\delta\chi}{\alpha^3 - \chi^3} = \frac{A\delta\chi}{\alpha - \chi} + \frac{B\chi\delta\chi + \Gamma\delta\chi}{\alpha^2 + \alpha\chi + \chi^2}$· ἀναχθέντων δὲ ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ᾧ διαιρεθέντων διὰ $\delta\chi$, μεταθέσει περιωθήσεται

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^4 - A\alpha\chi - A\chi^2 \\ -A\alpha^2 + \Gamma\chi + B\chi^2 \\ -\Gamma\alpha - B\alpha\chi \end{array}\right\} = 0$$

ἰσωθέντος δὲ τῷ μηδενὶ τῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων, τῶν πολλαπλασιαζόντων τὸν αὐτὸν βαθμὸν τῦ χ, ἔσαι $B - A = 0$, ἢ $\Gamma - A\alpha - B\alpha = 0$, ἢ $\alpha^4 - A\alpha^2 - \Gamma\alpha = 0$· ὅθεν ἀποφέρεται $A = \frac{\alpha^2}{3}$, ἢ $B = \frac{\alpha^2}{3}$, ἢ $\Gamma = \frac{2\alpha^3}{3}$·

τοιγαρῦν ἔσαι $\frac{\alpha^4 \delta\chi}{\alpha^3 - \chi^3} = \frac{\frac{\alpha^2}{3}\delta\chi}{\alpha - \chi} + \frac{\frac{\alpha^2}{3}\chi\delta\chi + \frac{2\alpha^3}{3}\delta\chi}{\alpha^2 + 2\alpha\chi + \chi\chi}$·

ἢ τὸ μὲν ὁλόκληρον τῦ πρώτυ κλάσματος τῦ δευτέρυ μέλυς κατάδηλόν ἐσιν ἐκ τῶν προειρημένων· τῦ δὲ δευτέρυ πορίζεται διὰ τῶν νυνὶ λεγομένων.

287. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ε'ὰν ἐν τοῖς δευτεροβαθμίοις ποιηταῖς ἀπαντῶσί τινες ἰσάλληλοι, χἠματισέον ὑπὲρ ἑκάσης σωρείας τῶν ἴσων ποιητῶν κλάσμα τοιῦτο $\frac{A\chi^{2\nu-1}\delta\chi + B\chi^{2\nu-2}\delta\chi \ldots . \Xi\delta\chi}{(\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma)^\nu}$, τῦ ν ἀμφαίνοντος τὸν ἀριθμὸν τῶν ἰσαλλήλων ποιητῶν $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, προκέηται εἰς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\frac{\chi^4 + 5\alpha\chi^3 + 4\alpha^3\chi}{(\alpha\chi + \alpha\chi + \chi\chi)(\chi^3 - \alpha^3)}\delta\chi$, εὑρεθήσεται ἀναλυόμενος ὁ παρονομασὴς εἰς τρεῖς τύτυς τὺς ποιητὰς, $\chi - \alpha$, $\chi^2 + \alpha\chi + \alpha^2$, $\chi^2 + \alpha\chi + \alpha^2$· τὸν μὲν δεύτερον καὶ τρίτον εἰς ἁπλυσέρυς ποιητὰς, οἳ ἔσονται ἐπίπλασοι, μὴ ἀναλύσαντες, χρησόμεθα αὐτοῖς, ὡς εὕρηνται· ἐπεὶ δέ εἰσιν ἰσάλληλοι, εἰλήφθω τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον $(\alpha^2 + \alpha\chi + \chi)^2$, ἢ γεγονέτω παρονομασὴς ἑνὸς μόνυ κλάσ-

ματος, ἕ τῷ ἀριθμητῇ εἰσαχθήσονται πάντες οἱ τοῦ χ βαθμοὶ, ἥττονες τοῦ μείζονος τῶν ἐν τῷ παρονομαστῇ ἀπαντώντων, τοῦτ' ἔστιν, ἐπεὶ ἐνταῦθα ὁ μείζων τῶν τῷ παρονομαστῇ βαθμῶν ἔστι χ^4, εἰσαχθήσονται τῷ ἀριθμητῇ πάντες τοῦ χ βαθμοὶ οἱ τοῦ χ^4 ἥττονες· ἀκεῖνο ὑποτεθείσθω

$$\frac{\chi^4 + 5a\chi^3 + 4a^3\chi}{(a^2 + a\chi + \chi\chi)(a^3 - \chi^3)} = \frac{A\delta\chi}{\chi - a} + \frac{B\chi^3\delta\chi + \Gamma\chi^2\delta\chi + \Delta\chi\delta\chi + E\delta\chi}{(aa + a\chi + \chi\chi)^2},$$

ᾧ διωρίσθων οἱ συνεργοὶ, ὥσπερ ἤδη εἴρηται· εἶτα γενέσθω ἡ ὁλοκλήρωσις κατὰ τὰ ἐφεξῆς.

288. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Ὁλοκληρῶσαι τὸ ἀπειροστὸν $\frac{A\chi\delta\chi + B\delta\chi}{a\chi^2 + \beta\chi + \gamma}$.

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω, διὰ τὸ ἁπλούστερον, ἀνηγμένη εἰς τὸ σχῆμα $\frac{A^I\chi\delta\chi + B^I\delta\chi}{\chi^2 + a^I\chi + \beta^I}$, ὅπερ ἀεὶ γενέσθαι δυνατὸν, διαιρεμένου ἀριθμητοῦ τε καὶ παρονομαστοῦ διὰ α· καὶ ἐξηφανίσθω ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ παρονομαστοῦ, τεθέντος $\chi + \frac{1}{2}a^I = \psi$· ὅθεν $\chi = \psi - \frac{1}{2}a^I$, καὶ $\delta\chi = \delta\psi$· ἀντικατασάσει δ' ἂν πορισθήσεται τοιάδέ τις ποσότης $\frac{\Gamma\psi\delta\psi + \Delta\delta\psi}{\psi\psi + \xi\xi}$, ἧς τὸ μὲν πρῶτον μέρος ὁλοκληροῦται διὰ τῶν λογαρίθμων (263), θάτερον δὲ διὰ τόξου κύκλου, οὗ ἡ μὲν ἀκτὶς ἐστὶ ξ, ἡ δὲ ἀπτομένη ψ.

289. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπὶ δὲ τῶν τοιῶνδε ποσῶν $\frac{A\chi^{2\nu-1}\delta\chi + B\chi^{2\nu-2}\delta\chi \ldots \Xi\delta\chi}{(\chi^2 + a\chi + \beta)^\nu}$ ἐξηφανίσθω καὶ ἐνταῦθα ὁ δεύτερος τοῦ παρονομαστοῦ ὅρος· ἀκεῖνο πορισθήσεται πο-

σὸτης τοιαύτη $\frac{M\psi^{2\nu-1}\delta\psi + N\psi^{2\nu-2}\delta\psi + \ldots T\delta\psi}{(\psi\psi+\xi\xi)^{\nu}}$,

ἥτις ὁλοκληρωθήσεται, ἀναγομένη εἰς $\frac{\delta\psi}{\psi\psi+\xi\xi}$, κατὰ τὴν ἀποδοθεῖσαν μέθοδον (272) ἐν τῷ ἀθροίσματι τῶν ὅρων, ἔνθα ψ ἔχει δείκτας ἀρτίους· οἱ δὲ ἔχοντες δείκτας περιττὲς ὁλοκληρωθήσονται κατὰ τὰ εἰρημένα (205).

Ἅπαν ἄρα λογικὸν κλάσμα, ἤτοι ἀκριβῶς ὁλοκληρῶται, ἢ μόνον ἐξέχεται τόξων κυκλικῶν, ἢ λογαρίθμων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περί τινων μεταμορφώσεων ῥᾳδιεργεσῶν τὰς ὁλοκληρώσεις.

290. Ἀμήχανον μέν ἐσιν ἐπὶ ταύτης τῆς ὕλης κανόνας γενικὲς ἀποδῦναι, ἡ δ' ἀνερεύνησις τῶν ποσοτήτων, ἥ τε συχνὴ χρῆσις, καὶ τὸ μετιόντος ἡ δεξιότης, τὰ πρακτέα ἐφ' ἑκάσης περιπτώσεως ὑπαγορεύσι· σκοπὸς δὲ τῶν, περὶ ὧν ὁ λόγος, μεταμορφώσεων, ἵνα λογικὰ τὰ προκείμενα ἀπειροσὰ γενόμενα ὁλοκληρώσεως τύχωσιν· εἰς δὲ τὸτο ἐκθετέον τὰς ἐφεξῆς παρατηρήσεις.

291. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ Α'. Ἐὰν ὦσι ῥιζικὰ μονώνυμα, ἀνακτέον πρῶτον αὐτὰ εἰς δείκτας κλασματικὲς, καὶ ἀνακτέον αὐτὲς εἰς τὸν αὐτὸν παρονομασήν· εἶτα, ἐὰν $\chi^{\frac{\kappa}{\lambda}}$ ἐμφαίνῃ μίαν τῶν ἔτω προπαρασκευαθεισῶν ποσοτήτων, ὑποθετέον $\chi^{\frac{1}{\lambda}} = \psi$· ὅθεν $\chi = \psi^{\lambda}$, καὶ $\delta\chi = \lambda\psi^{\lambda-1}\delta\psi$· ἀντικατασάσει δὲ, πορισθήσεται ποσότης ὅλως λο-

γικὴ· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ἡ $\frac{\delta x \sqrt{x} + a\delta x}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}}$, τραπήτω εἰς $\frac{x^{\frac{1}{2}}\delta x + a\delta x}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}$. τοῦτο δὲ εἰς $\frac{x^{\frac{3}{6}}\delta x + a\delta x}{x^{\frac{4}{6}} + x^{\frac{3}{6}}}$. ἐὰν ἄρα γένηται $x^{\frac{1}{6}} = \psi$, ἔσται $x = \psi^6$, $\delta x = 6\psi^5\delta x$, καὶ ἑπομένως $\frac{6\psi^8\delta\psi + 6a\psi^5\delta\psi}{\psi^4 + \psi^3} = \frac{6\psi^5\delta\psi + 6a\psi^2\delta\psi}{\psi + 1}$, ὅπερ εὐμαρῶς ὁλοκληροῦται διὰ τῶν εἰρημένων ἐπὶ τῶν λογικῶν κλασμάτων.

292. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ Β΄. Πᾶσα ποσότης, ἡ ἓν μόνον ῥιζικὸν πολυώνυμον ἐμφιλοχωρεῖ, τὸν δεύτερον μὴ ὑπερβαῖνον βαθμὸν, ἧς ἡ ὑπόῤῥιζος μήδ' αὐτὴ ὑπερβαίνει τὸν δεύτερον βαθμὸν, ἀεὶ λογικὴ ἀποκαθίσαται διὰ θατέρου τῶν ἐφεξῆς κανόνων· α΄. ἀπηλλάχθω τὸ ὑπόῤῥιζον τετράγωνον τῆς τρεπτῆς, καὶ ἐξισώσθω τῇ αὐτῇ τρεπτῇ σὺν ἢ πλὴν ἑτέρας τρεπτῆς· β΄. ἀναλυθήτω τὸ ῥιζικὸν εἰς δύω παιητὰς, καὶ ἀναλυθὲν ἐξισώσθω θατέρῳ τῶν ποιητῶν, πολλαπλασιαθέντι ἐπὶ καινὴν ἄλλην τρεπτήν· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, προκέηται $\frac{\delta x}{\sqrt{(xx - aa)}}$, γενέσθω $\sqrt{(xx - aa)} = x - \psi$· ὅθεν $x = \frac{\psi\psi + aa}{2\psi}$· ἄρα $\delta x = \frac{(\psi\psi - aa)\delta\psi}{2\psi\psi}$, καὶ $\sqrt{(xx - aa)} = \frac{aa - \psi\psi}{2\psi} = -\frac{(\psi\psi - aa)}{2\psi}$· ὅθεν $\frac{\delta x}{\sqrt{(xx - aa)}} = -\frac{\delta\psi}{\psi}$, ἥτις εὐχερῶς ὁλοκληροῦται.

Ε'πὶ δὲ τῆ αὐτῆ ὑποδείγματος δυνατὸν γενέσθαι τὸ $\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}$, εἴτ' ἓν τὸ $\sqrt{(\chi - \alpha)\ (\chi + \alpha)} = (\chi - \alpha)\psi$· ἑκὸν τετραγωνισμῷ ἢ διαιρέσει διὰ $\chi - \alpha$, ἔσαι $\chi + \alpha = (\chi - \alpha)\psi\psi$· ὅθεν $\chi = \frac{\alpha + \alpha\psi\psi}{\psi\psi - 1}$,

$\sqrt{(\chi\chi - \alpha\alpha)} = \frac{2\alpha\psi}{\psi\psi - 1}$, $\delta\chi = \frac{-4\alpha\psi\delta\psi}{(\psi\psi - 1)^2}$· ἄρα

$\frac{\delta\chi}{\sqrt{(\chi\chi - \alpha\alpha)}} = \frac{-2\delta\psi}{\psi\psi - 1}$, ὅπερ ὁλοκληρῶται διὰ τῶν προαποδοθέντων ἐπὶ τῶν λογικῶν κλασμάτων κανόνων.

293. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δυνατὸν δὲ χρήσασθαι ταύταις ταῖς μεθόδοις πρὸς εὕθυνσιν τῆς παραβολῆς, ἧς τὸ στοιχεῖον $\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta v^2)}$ ἔστι $\sqrt{(\delta v^2 + \frac{4v^2\delta v^2}{\pi^2})}$, εἴτ' ἓν $\delta v\sqrt{(1 + \frac{4v^2}{\pi^2})}$· ἀπηλλάχθω ἓν πρῶτον τὸ v^2, γράφωσι $\frac{2\delta v}{\pi}\sqrt{(\frac{\pi^2}{4} + v^2)}$, ᾧ γενέσθω $\sqrt{(\frac{\pi^2}{4} + v^2)} = v + \psi$.

294. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ Γ'. Ὅταν μὴ παρῇ δεύτερος ὑπόῤῥιζος ὅρος, δυνατὸν ἐξισῶσαι τὸ ῥιζικὸν τῷ γινομένῳ ὑπὸ καινῆς μεταβλητῆς, ᾧ αὐτῆς τῆς ὑποῤῥίζῳ· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ᾖ $\frac{\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)}}$ δυνατὸν ποιῆσαι $\sqrt{(\alpha\alpha - \chi\chi)} = \chi\psi$· παρόντος δὲ ᾧ δευτέρῳ, ᾧ ἔτω δυνατὸν ταύτῃ χρήσασθαι τῇ μεταμορφώσει, ἐξαφανιζομένῳ πρῶτον τῷ δευτέρῳ ὅρῳ.

295. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ Δ'. Δυνατὸν τὴν μεταβλητὴν ἐξισῶσαι συνεκθέσει ὁποιαδήποτε τῆς τρεπτῆς,

ἢ καινῇ ἑτέρᾳ τρεπτῇ, ἢ συνεκθέσει καινῆς τρεπτῆς, ἐν ᾗ παραλιφθείη καί τι ἀδιόριστον, συμβαλλόμενον τῇ ἀνὰ χεῖρας ὑποθέσει· ἵνα, φέρ' εἰπεῖν, μάθωμεν, ὅτε ἂν γένοιτο λογικὴ ἡ ποσότης $\chi^{\mu}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}$, γενέσθω $(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}=\psi^{\varkappa}$, τοῦ $\varkappa$ ἀδιορίστου ὄντος· τοιγαροῦν ἔσται

$$\alpha+\beta\chi^{\nu}=\psi^{\frac{\varkappa}{\pi}},\quad \chi^{\nu}=\frac{\psi^{\frac{\varkappa}{\pi}}-\alpha}{\beta},\quad \chi=\left(\frac{\psi^{\frac{\varkappa}{\pi}}-\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\nu}},$$

$$\chi=\left(\frac{\psi^{\frac{\varkappa}{\pi}}-\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}},\quad \delta\chi=\frac{\varkappa}{\nu\pi\beta}\,\psi^{\frac{\varkappa}{\pi}-1}\,\delta\psi$$

$$\left(\frac{\psi^{\frac{\varkappa}{\pi}}-\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\nu}-1}\cdot$$

ἄρα $\chi^{\mu}\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}=\frac{\varkappa}{\nu\pi\beta}$

$$\psi^{\frac{\varkappa}{\pi}+\varkappa-1}\,\delta\chi\left(\frac{\psi^{\frac{\varkappa}{\pi}}-\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{1}{\nu}-1},$$

ὅπερ ὁλοκληροῦται, ὁποῖον ἂν εἴη τὸ $\varkappa$, ὅταν $\frac{\mu+1}{\nu}-1$ ᾖ ἀριθμὸς ὁλοχερὴς ὑπαρκτικὸς, ἢ μηδέν· ᾧ λογικὸν ἀποκαθίσταται, γενομένου $\varkappa=\pi$, ὅταν $\frac{\mu+1}{\nu}-1$ ᾖ ἀριθμὸς ὁλοχερὴς λειπτικός· τοῦ δὲ π ἴσου ὄντος τῷ $\pm\frac{\xi}{2}$, τοῦ ξ ἐμφαίνοντος ἀριθμὸν ὁλοχερῆ περιττὸν, ἀναγέωω εἰς τὴν (292) παρατηρηθεῖσαν περίπτωσιν, γενομένου $\varkappa=\xi$, εἴπερ $\frac{\mu+1}{\nu}$ ἴσον εἴη τῷ $\pm\frac{\xi^{1}}{2}$, τοῦ ξ^{1} ἀριθμὸν ὁλοχερῆ περιττὸν ἐμφαίνοντος.

296. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὰς μὲν ἓν μεταμορφώσεις ταύτας περαιτέρω ἤκισα προάξομεν· τυτὶ δὲ μόνον σημειώσομεν, ὅτι συχνάκις αἱ ὁλοκληρώσεις ἐξευμαρίζονται, τῆς τρεπτῆς κλάσματι τοιῷδε $\frac{1}{\psi}$ ἰσαμένης· ἐὰν ᾖ, φέρ' εἰπεῖν $\frac{\chi^{15}\delta\chi + \alpha\delta\chi}{\chi^{20} + \chi^{18}}$, γενέσθω $\chi = \frac{1}{\psi}$· καὶ δὴ ἔσαι $\frac{-\psi^3\delta\psi - \alpha\psi^{18}\delta\psi}{1+\psi\psi}$, ὅπερ ἀναχθήσεται διὰ διαιρέσεως εἰς σειρὰν μονωνύμων, ᾗ εἰς ποσότητα τοιάνδε $\frac{A\delta\psi}{1+\psi\psi}$, ἧς γινώσκεται ἀκριβῶς τὸ ὁλόκληρον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΤΕΤΑΡΤ.

Περὶ ὁλοκληρώσεως τῶν δεικτικῶν ποσοτήτων.

297. Ἐπὶ τέτων τῶν ποσοτήτων ἕτος μόνος ὑπάρχει ὁλοκληρώσεως κανών· ἀναλυτέον αὐτὰς εἰς δύω ποιητὰς, ὧν ἄτερος εἴη τὸ ἀπειροσὸν τῦ κατὰ τὸν ἕτερον λογαρίθμυ, ᾗ μέρος αὐτῦ ἀμετάβλητον (50, 52), ᾗ διαιρετέον διὰ τῦ ἀπειροστῦ τῦ κατὰ τὸν δεύτερον ποιητὴν λογαρίθμυ. Οὕτως εὐθὺς τὸ $\chi^{\upsilon}\left(\delta\upsilon\lambda\chi + \frac{\upsilon\delta\chi}{\chi}\right)$ ὁλοκληρώσιμον καταφαίνεται, εἴγε ὁ ποιητὴς· $\delta\upsilon\lambda\chi + \frac{\upsilon\delta\chi}{\chi}$ ἔσιν ἀπειροσὸν τῦ υλχ, ὃς ἔσιν ὁ τῦ χ^{υ} λογάριθμος· τὸ

$$\text{τοίνυν ὁλόκληρον ἔσαι } \frac{\chi^{\upsilon}\left(\delta\upsilon\lambda\chi+\frac{\upsilon\delta\chi}{\chi}\right)}{\delta(\lambda\chi\upsilon)}+\Gamma,\ \text{τοῦτ' ἔστι}$$

$$\chi^{\upsilon}\frac{\left(\delta\upsilon\lambda\chi+\frac{\upsilon\delta\chi}{\chi}\right)}{\delta\upsilon\lambda\chi+\frac{\upsilon\delta\chi}{\chi}}+\Gamma,\ \text{εἴτ' ἓν } \chi^{\upsilon}+\Gamma\cdot\ \text{κατὰ τὸν αὐ-}$$

τὸν κανόνα τὸ $\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}$ ἔστιν ὁλοκληρώσιμον, εἴγε $\delta\chi$ ἔστι τὸ ἀπειροστὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ $\varepsilon^{\alpha\chi}$, διαιρεθέντος δι' ἀτρέπτου ποσότητος· ἄρα $\mathrm{O}\,\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}=\frac{\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}}{\alpha\delta\chi\lambda\varepsilon}=\frac{\varepsilon^{\alpha\chi}}{\alpha\lambda\varepsilon}$· ὅταν δὲ τὸ ε ἀριθμὸν ἐμφαίνῃ, οὗ λογάριθμός ἐστι 1, ὁ κανὼν ἀνάγεται εἰς τὸ διελεῖν τὸ προτεθὲν ἀπειροστὸν διὰ τοῦ ἀπειροστοῦ τοῦ κατὰ τὸ ε δείκτου.

Ἐὰν δὲ προκέηται εἰς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\chi^{\mu}\,\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}$, τοῦ ε ἀριθμοῦ ὄντος, οὗ λογάριθμός ἐστι 1, καὶ τοῦ μ ἀριθμοῦ ὁλοχερῶς ὑπαρκτικοῦ, δυνατὸν ποιῆσαι $\mathrm{O}\chi^{\mu}\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}=\varepsilon^{\alpha\chi}\left(\mathrm{A}\chi^{\mu}+\mathrm{B}\chi^{\mu-1}+\mathrm{E}\chi^{\mu-2}+\kappa\tau\lambda+\kappa\right)$· ἐὰν, φέρε εἰπεῖν, ᾖ $\chi^{2}\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}$, δυνατὸν ὑποθεῖναι $\mathrm{O}\chi^{2}\,\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}=\varepsilon^{\alpha\chi}\left(\mathrm{A}\chi^{2}+\mathrm{B}\chi+\mathrm{E}\right)$· τῶν δὲ ἀπειροστῶν ληφθέντων (50), διαιρέσει διὰ $\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}$, πορισθήσεται

$$\chi^{2}=\left\{\begin{matrix}\mathrm{A}\alpha\chi^{2}+\alpha\mathrm{B}\chi+\alpha\mathrm{E}\\ +2\mathrm{A}\chi+\mathrm{B}\end{matrix}\right\}$$

ἄρα $\mathrm{A}\alpha=1$, $\alpha\mathrm{B}+2\mathrm{A}=0$, $\alpha\mathrm{E}+\mathrm{B}=0$, τοῦτ' ἔστιν $\mathrm{A}=\frac{1}{\alpha}$ καὶ $\mathrm{B}=\frac{-2}{\alpha\alpha}$, καὶ $\mathrm{E}=\frac{2}{\alpha 3}$· τὸ ἄρα ὁλόκληρον τῆς $\chi^{2}\delta\chi\varepsilon^{\alpha\chi}$ ἔστιν $\varepsilon^{\alpha\chi}\left(\frac{\chi^{2}}{\alpha}-\frac{2\chi}{\alpha^{2}}+\frac{2}{\alpha 3}\right)+\Gamma$.

Δυνατὸν δὲ εὐεπιβόλως χρήσαθαι τῷ ἀριθμῷ ε, ἕ ὁ λογάριθμός ἐςι 1 εἰς ὁλοκλήρωσιν, πολλῶν μὲν ϗ ἄλλων ποσῶν, μάλιςα δὲ τῶν λογαρίθμυς περιεχόντων· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, προκέηται εἰς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\chi^{\nu}\delta\chi$ $(\lambda\chi)^{\mu}$, γενέσθω $\lambda\chi = \psi = \psi\lambda\varepsilon$· ἄρα $\chi = \varepsilon^{\psi}$, $\delta\chi = \delta\psi\varepsilon^{\psi}$, ϗ ἑπομένως $\chi^{\nu}\delta\chi\ (\lambda\chi)^{\mu} = \psi^{\mu}\delta\psi\varepsilon^{(\nu-1)\psi}$, ὅπερ ὁλοκληρῦται ἐν τῇ αὐτῇ περιπτώσει, ὡς πρότερον, ϗ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ ὁλοκληρώσεως ποσοτήτων δύω, ἢ πλείυς μεταβλητὰς περιεχυσῶν.

298. Ε'ὰν ἀναμνηθῶμεν τῦ πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀπειροσῶν ποσοτήτων, πολλὰς περιεχυσῶν μεταβλητὰς, ἀποδοθέντος κανόνος, ὀψόμεθα, ὅτι πρὸς ὁλοκλήρωσιν τῶν πολλὰς μεταβλητὰς περιεχόντων ἀπειροσῶν, συναπτέον ἐςὶ πάντας τὺς ὅρυς, οἷς τὸ ἀπειροσὸν τῆς αὐτῆς ποσότητος ἐμπεριπέπλεκται, ϗ ὁλοκληρωτέον αὐτύς, ὡς εἰ μηδεμία παρὰ ταύτην εἴη τρεπτὴ, τῦτ' ἔςιν, ὡς εἰ πᾶσαι αἱ λοιπαὶ εἴησαν ἀμετάτρεπτοι· τηνικαῦτα δὲ, ἐὰν τῦ ὁλοκλήρυ τύτυ λειφθῶσι τὰ ἀπειροσὰ, τρεπομένων ἄλλης μετ' ἄλλην πασῶν τῶν μεταβλητῶν, ϗ ἀφαιρεθῶσι τῦ προτεθέντος ἀπειροσῦ, εἰ μηδὲν λειφθείη, τὸ εὑρεθὲν ὁλόκληρον (προσιθεμένυ ϗ ποσῦ ἀμετατρέπτυ) ἔσαι τὸ ἀληθές· ἐὰν δὲ ἡ λείψανον, τῦτο ὐμὴ περιέξει τρεπτὴν ἔχυσάν πως πρὸς τὴν ὁλοκληρωθεῖσαν· χρησέον δ' ἂν ϗ ἐπὶ

τέτε τῦ καταλοίπε τῇ αὐτῇ μεθόδω, ϗ ἐφεξῆς ἕτως ἐφ' ἁπάσης μεταβλητῆς.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ε"ςω $3\chi^2 \upsilon d\chi + \chi^3 d\upsilon + 5\chi\upsilon^4 d\upsilon + \upsilon^5 d\chi$· εἰλήφθωσαν ἓν ὅροι δύω οἱ $3\chi^2 \upsilon d\chi + \upsilon^5 d\chi$, οἷς ἀμέλει ἐμπεριπέπλεκται $d\chi$, ϗ ὡλοκληρώσθωσαν ὡς εἴπερ υ εἴη ἀμετάτρεπτος· τὸ τοίνυν ὁλόκληρον ὑπάρχει $\chi^3\upsilon + \upsilon^5\chi$· ἀλλὰ ταύτης τῆς ποσότητος λιφθέντων τῶν ἀπειροςῶν, τρεπτῶν τιθεμένων τῆς τε χ ϗ τῆς υ, ϗ ἀφαιρυμένων ἀπὸ τῦ προτεθέντος ἀπειροςῦ, λείπεται μηδέν· ἄρα τὸ ὁλόκληρον ἔςι $\chi^3\upsilon + \upsilon 5\chi + \Gamma$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ε"ςω αὖθις $\chi^3 d\upsilon + 3\chi^2\upsilon d\chi + \chi^2 d\psi + 2\chi\psi d\chi + \chi d\chi + \upsilon^2 d\upsilon$· συναφθέντων ἓν ἁπάντων τῶν ὅρων, οἷς ἐνυπάρχει τὸ $d\chi$, ϗ ὁλοκληρωθέντων, τῶν υ, ψ ἀμετατρέπτων τηρηθέντων, προκύψει $\chi^3\upsilon + \chi^2\psi + \frac{\chi^2}{2}$· τῶν δ' ἀπειροςῶν ταύτης τῆς ποσότητος ἀφαιρεθέντων, τρεπτῶν ἐκληφθέντων τῶν χ, υ, ψ, καταλειφθήσεται $\upsilon^2 d\upsilon$· εἰλήφθω τοίνυν τὸ ὁλόκληρον τῦ $\upsilon^2 d\upsilon$, ὅπερ ἐςὶν $\frac{\upsilon^3}{3}$, ϗ προςεθείσθω τῷ προευρημένῳ· τὸ δὲ ὅλον ὁλόκληρον ἔσαι $\chi^3\upsilon + \chi^2\psi + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\upsilon^3}{3} + \Gamma$.

299. Ε'πεὶ μέντοι ἀμήχανόν ἐςιν ὁλοκληρῦν ἀεὶ ἅπαν ἀπειροςὸν, πλειόνων τρεπτῶν περιεκτικὸν, καλῶς ἔχον ἔσαι ἐκδηλῶσαι, ὅπως ἂν αἱ δυναταὶ τῶν ἀδυνάτων διαςέλλοιντο.

300. Εἰς δέγε τὴν διάκρισιν ταύτην προλιπτέων, ὡς εἰ ἐν ποσότητι τῇ Π συγκειμένη ἐκ δυεῖν ἄλλων ποσοτήτων χ, υ, ἀντικατασαθῇ, πρῶτον μὲν ἀντὶ χ ποσότης τις

ἄλλη ἡ π, ἐν δὲ τῷ ἐσχάτῳ ἀποτελέσματι ἀντὶ υ εἰσαχθῇ ἡ κ, ταυτὸν ἔσαι, ὡς εἴπερ ἀντικατασαίη, πρῶτον μὲν ἀντὶ υ ἡ κ, ἑξῆς δὲ ἀντὶ χ ἡ π· ὃ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον.

301. Ἐντεῦθεν ἄρα, εἰ ποσότητος τῆς Π, συγκειμένης ἐκ χ, υ ϗ ἀμετατρέπτων ποσῶν, ληφθεῖεν τὰ ἀπειροστὰ, γενομένης τρεπτῆς πρῶτον τῆς χ, τȣ̃ δ' ἀποτελέσματος αὖθις ληφθεῖεν τὰ ἀπειροστὰ, τιθεμένης τρεπτῆς μόνης τῆς υ, ταὐτὸν ἔσαι ὡς εἰ πρῶτον ληφθεῖεν τὰ ἀπειροστὰ, θεωρȣμένης μόνης τῆς υ τρεπτῆς, ἑξῆς δὲ λειφθεῖεν τὰ τȣ̃ ἀποτελέσματος, ἐκληφθείσης ὡς μόνης μεταβλητῆς τῆς χ· κείσθω γὰρ, τεθέντος πρῶτον ἀντὶ χ τȣ̃ χ + δχ, τὸ Π γενέσθαι Π'· ἔσαι ȣ̃ν τὸ ἀπειροστὸν Π' — Π· κείσθω αὖ ἀντὶ υ, τεθέντος τȣ̃ υ + δυ, τὸ Π' γενέσθαι Π'', τὸ δὲ Π, Π''', ὥστε τὸ Π' — Π τραπέσθαι εἰς Π'' — Π'''· ἔσαι τοίνυν δεύτερον ἀπειροστὸν τὸ Π'' — Π''' — Π' + Π.

Γενέσθωσαν ἤδη ἐναντίως αἱ ἀντικαταστάσεις, ϗ ἐπεὶ, ἀντικατασταθέντος τȣ̃ υ + δυ ἀντὶ υ ἐν τῷ Π, τὸ Π γίνεται Π''', ἔσαι Π''' — Π ὡς πρῶτον ἀπειροστὸν, ὑποτεθέντος τȣ̃ υ μεταβλητȣ̃· ἐὰν ȣ̃ν ἤδη ἀντικατασταθῇ χ + δχ ἀντὶ χ ἐνταύτῃ τῇ ποσότητι, τὸ μὲν Π γίνεται Π', ὥσπερ ἀνωτέρω, τὸ δὲ Π''' (300), Π''· ὥστε τὸ Π'' — Π γίνεσθαι Π'' — Π· τὸ ἄρα δεύτερον ἀπειροστὸν ἔσεται Π'' — Π' — Π''' + Π τ' αὐτὸν ἀκριβῶς, ὥσπερ καὶ πρότερον.

Τȣ́τȣ τεθέντος, ἐπινοήσωμεν ὡς εἴπερ Α παρεμφαίνοι ποσότητα, συγκειμένην ἐκ χ ϗ υ, τὸ $\frac{\delta A}{\delta \upsilon}$ δυ ἐμφανεῖ τὸ τῆς Α ἀπειροστὸν, λαμβανόμενον, ὑποτιθεμένης μετα-

ἐλητῆς τῆς υ, τὸ δὲ $\frac{\delta A}{\delta \chi}\delta\chi$, τὸ τοῦ αὐτοῦ Α ἀπειροστόν, ὑποτιθεμένης τρεπτῆς τῆς υ· ὡσαύτως τὸ $\frac{\delta\delta A}{\alpha\chi\delta o}$, δχδυ ἐμφανεῖ, ὅτι λημθήσεται πρῶτον τὰ ἀπειροστὰ τοῦ Α, ὑποτιθεμένης μόνης τρεπτῆς τῆς χ, εἶτα λημθήσεται τὰ τοῦ ἀποτελέσματος ἀπειροστά, γενομένης μόνης τρεπτῆς τῆς υ.

302. Τέτων τεθέντων, ἔστω Αδχ + Βδυ ἀπειροστὸν ἀκριβὲς, οὗ Μ τὸ αὐτοῦ ὁλόκληρον· ἔσαι ἄρα $\frac{\delta M}{\delta\chi}\delta\chi + \frac{\delta M}{\delta\upsilon}\delta\upsilon = A\delta\chi + B\delta\upsilon$· ἄρα $\frac{\delta M}{\delta\chi} = A$, οὗ $\frac{\delta M}{\delta\upsilon} = B$· ἄρα ἔτω $\frac{\delta\delta M}{\delta\chi\delta\upsilon} = \frac{\delta A}{\delta\upsilon}$, οὗ $\frac{\delta\delta M}{\delta\upsilon\delta\chi} = \frac{\delta B}{\delta\chi}$· ἀλλὰ προδέδεικται (301), ὅτι $\frac{\delta\delta M\delta\chi\delta\upsilon}{\delta\chi\delta\upsilon} = \frac{\delta\delta M\delta\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon\delta\chi}$· ἄρα $\frac{\delta\delta M}{\delta\chi\delta\upsilon} = \frac{\delta\delta M}{\delta\upsilon\delta\chi}$, οὗ $\frac{\delta A}{\delta\upsilon} = \frac{\delta B}{\delta\chi}$, τοῦτ' ἔστιν, ἐὰν ἡ Αδχ + Βδχ ἀπειροστὸν πλῆρες, τὸ τοῦ Α ἀπειροστὸν λαμβανόμενον, ὑποτιθεμένης μόνης τρεπτῆς τῆς υ, οὗ διαιρεμένης διὰ δυ, ἴσον ἔσαι τῷ τῆς Β ἀπειροστῷ, λαμβανομένῳ, ὑποτιθεμένης μόνης τρεπτῆς τῆς χ, οὗ διαιρεμένης διὰ δχ· ἔτως $\frac{1}{3}\upsilon^3\delta\chi + \chi\upsilon^2\delta\upsilon$ ἔστιν ἀπειροστὸν ἐντελὲς, εἴγε $\frac{\delta(\frac{1}{2}\upsilon^3)}{\delta\upsilon} = \frac{\delta(\chi\upsilon^2)}{\delta\chi}$·

τὸ μὲν γὰρ πρῶτον μέλος ἀνάγεται εἰς $\frac{\upsilon^2\delta\upsilon}{\delta\upsilon}$, θάτερον δὲ εἰς $\frac{\upsilon^2\delta\chi}{\delta\chi}$· τἐναντίον δὲ τὸ χυδχ + 2χδυδχ ἐστιν ὁλο-

κληρώσιμον, ἐπεὶ τὸ $\frac{\delta(\chi\upsilon)}{\delta\upsilon}$ ἢ ἔσιν ἴσον τῷ $\frac{\delta(2\chi)}{\delta\chi}$.

303. Εἰ δ' ἐνεῖεν πλείω τῶν δυεῖν τρεπτῶν τῷ προκειμένῳ ἀπειροστῷ, τοῦτ' ἔσιν εἴπερ εἴη τοιοῦδε σχήματος

$A\delta\chi + B\delta\upsilon + \Gamma\delta\psi$, ἵν' ὁλοκληρωθῇ, δεῖ εἶναι $\frac{\delta A}{\delta\upsilon} =$

$\frac{\delta B}{\delta\chi}$, $\frac{\delta A}{\delta\psi} = \frac{\delta\Gamma}{\delta\chi}$, $\frac{\delta B}{\delta\psi} = \frac{\delta\Gamma}{\delta\upsilon}$· δυνατὸν γὰρ ἄλλην μετ' ἄλλην ἐκδέξασθαι τὰς ψ, υ, χ, ὥσπερ ἀμετατρέπτους· ᾗ δὴ τὸ ἀπειροστὸν, ὅπερ ἕξει μόνον δύω ὅρους (ἐκ γὰρ ταύτης τῆς ὑποθέσεως ἔσιν ἤτοι $\delta\psi = 0$, ἢ $\delta\upsilon = 0$, ἢ $\delta\chi = 0$) ἔσαι ᾗ αὐτὸ ἀπειροστὸν ἐντελὲς, εἴπερ εἴη τοιοῦτο τὸ προτεθέν· ἕξει ἄρα ἐφ' ἑκάσης τέτων τῶν περιπτώσεων τὰς ἰδιότητας τῶν ἐντελῶν ἀπειροστῶν, τῶν δύω τρεπτὰς περιεχόντων· ἐντεῦθεν εὐχερῶς πάνυ εὑρεθήσονται αἱ θέσεις ὑπὲρ ἀπειροστῶν, πλείως τρεπτὰς περιέχοντος.

304. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἔσω Π ποσότης ἄγνωστος, συγκειμένη ἐκ χ, υ, ᾗ ποσῶν ἀμετατρέπτων, ᾗ ἔσω γνωστὸν αὐτῆς τὸ ἀπειροστὸν $A\delta\chi$, λαμβανόμενον, ὑποτιθεμένης τρεπτῆς τῆς υ· βουλομένοις δ' εὑρεῖν τὸ ὅλον τῆς Π ἀπειροστὸν ὑποτεθήσεται τοῦτο ὂν $A\delta\chi + B\delta\upsilon$· τηνικαῦτα ἓν ἔσαι τὸ B τοιοῦτον, ὥσε ὑπάρχειν $\frac{\delta A}{\delta\upsilon} = \frac{\delta B}{\delta\chi}$· ἄρα $\delta B =$

$\frac{\delta A}{\delta\upsilon}\delta\chi$· γενέσθω τοίνυν ὁλοκλήρωσις, τηρουμένης μόνης τρεπτῆς τῆς χ, εἴγε μόνη ἡ χ ὑποτέθειται τρεπτὴ ἐν τῷ B· ἔσαι ἄρα $B = O\frac{\delta A}{\delta\upsilon}\delta\chi$· ἄρα $B\delta\upsilon = \delta\upsilon . O . \frac{\delta A}{\delta\upsilon}$

$\delta\chi$· ἀλλ' ἐπείπερ $A\delta\chi$ ὑποτίθεται ἀπειροστὸν τῆς Π, λαμ-

βανόμενον, ὑποτιθεμένης τῆς χ μόνης ὡς τρεπτῆς, ἔσαι Π = ΟΑδχ, τῆς ὁλοκληρώσεως γινομένης ἐκ τοῦ ὑποτεθῆναι μόνην τρεπτὴν τὴν χ· τὸ ἄρα πλῆρες ἀπειροσὸν τῆς Π, εἴτ' οὖν τὸ Ο. Αδχ ἔσιν = Αδχ + δυ· Ο. $\frac{\delta A}{\delta u}$· δχ, ἔνθα ἡ τοῦ Ο. $\frac{\delta A}{\delta u}$ ὁλοκλήρωσις γενήσεται, τηρυμένης ὡς ἀμετατρέπτου τῆς υ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ Ἀπειροσῶν Ἐξισώσεων.

305. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Ἐξίσωσιν ἀπειροσὴν, δύω τρεπτὰς (χ, υ) περιέχουσαν, ἐν ἑκατέρῳ μέλει μίαν μετὰ τοῦ ἰδίου αὐτῆς ἀπειροστοῦ, ὁλοκληρῶσαι.

ΛΥΣΙΣ. Ὁλοκληρώσθω ἑκάτερον μέλος διὰ τῶν ἀποδοθέντων κανόνων εἰς ὁλοκλήρωσιν τῶν μιᾶς μόνης τρεπτῆς περιεκτικῶν ἀπειροστῶν· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ἡ $\alpha\chi^{\mu}u^{\rho}\delta\chi = \beta u^{\kappa}\chi^{\rho}\delta u$, παρισῶσα πάσας τὰς ἀπειροστὰς ἐξισώσεις, τὰς δυοῖν ὅρων περιεκτικάς· ἀποκεκρίσθων αἱ ἀδιόριστοι, διαιρουμένης τῆς ἐξισώσεως διὰ u^{ν}, καὶ χ^{ρ}· ὅθεν ἔσαι $\alpha\chi^{\mu-\nu}\delta\chi = \beta u^{\kappa-\nu}\delta u$, ἧς ὁλόκληρον προφανῶς ἐσι τὸ

$$\frac{\alpha\chi^{\mu-\rho+1}}{\mu-\rho+1} = \frac{\beta u^{\kappa-\nu+1}}{\kappa-\nu+1} + \Gamma.$$

306. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Θατέρου, ἢ ἑκατέρου, μέλους τῶν τῆς ἐξισώσεως γεωμετρικῶς μὴ ὁλοκληρουμένου, τῆς δὲ ἐξισώσεως γεωμετρικῆς ὑπάρχειν δυναμένης, ἢ γοῦν ἀναχθῆναι εἰς σχῆμα γεωμετρικῆς, εὑρεῖν ὁπότε τοῦτο δυνατῶς ἔχει.

ΛΥΣΙΣ. Ε'ὰν ἐν τῇ προεκτεθείσῃ ἐξισώσει ἡ μ — ρ = — 1, ἡ κ — ν = — 1, ἡ ἀπειροσὴ ἐξίσωσις τρέψεται εἰς $\frac{\alpha\delta\chi}{\chi} = \frac{\beta\delta\upsilon}{\upsilon}$, ἧς ἑκάτερον μέλος διὰ μόνων τῶν λογαρίθμων ὁλοκληρωθῆναι δύναται· ὡς εἶναι αλχ = βλυ + λΓ (*)· ἡ ἓν ἐξίσωσις αὕτη δυνατῶς ἔχει γενέσθαι γεωμετρική, γραφομένη ἅτω $\lambda\chi^{\alpha} = \lambda\upsilon^{\beta} + \lambda\Gamma$, εἴτ' ἓν $\lambda\chi^{\alpha} = \lambda\Gamma\upsilon^{\beta}$· ἐὰν ἓν ἕτοι οἱ δύω λογάριθμοι ἴσοι ὦσιν· αἱ, αἷς ἐπανήκουσι ποσότητες, καὶ αὗται ἐξ ἀνάγκης ἴσαι ἔσονται· ἄρα $\chi^{\alpha} = \Gamma\upsilon^{\beta}$, ἐξίσωσις γεωμετρική.

Ε'ὰν δὲ ἡ μόνον κ — ν = — 1, ἡ ἀπειροσὴ ἐξίσωσις ἔσαι $\alpha\chi^{\mu-\rho}\delta\chi = \frac{\beta\delta\upsilon}{\upsilon}$, ἧς τὸ ὁλόκληρον ἔσιν

$$\frac{\alpha\chi^{\mu-\rho+1}}{\mu-\rho+1} = \beta\lambda\upsilon + \lambda\Gamma\cdot$$

δυνατὸν μέντοι ἀπονεμηθῆναι ταύτῃ τῇ ἐξισώσει σχῆμα γεωμετρικὸν, πολλαπλασιαζομένου μὲν τοῦ πρώτου μέλους ἐπὶ λε, τοῦ δὲ ε ἀριθμὸν δηλοῦντος, ἓ ὁ λογάριθμος ἔσιν = 1· τηνικαῦτα γὰρ ἥκιστα μεταβαλεῖ ἡ ἐξίσωσις· ἔσαι ἄρα

$$\frac{\alpha\chi^{\mu-\rho+1}}{\mu-\rho+1}\ \lambda\varepsilon = \beta\lambda\upsilon + \lambda\Gamma,$$

ἢ (γενομένου μ — ρ + 1 = π) $\lambda\varepsilon\ \frac{\alpha\chi^{\pi}}{\pi} = \lambda\Gamma\upsilon^{\beta}$, καὶ ἑπομένως $\varepsilon\ \frac{\alpha\chi^{\pi}}{\pi} = \Gamma\iota^{\beta}$· τοῦ λοιποῦ τοίνυν διὰ ε δηλωθήσεται ἀριθμὸς, οὗ ὁ λογάριθμός ἐσι 1.

(*) Παντὶ ἐφεῖται ὑποθεῖναι τὴν ἀμετάτρεπτον ποσότητα ὡς ἓν ἂν λογάριθμον.

Κειῶθω αὖθις ἐξίσωσις $\nu\delta\chi = \frac{\delta\psi}{\sqrt{(1-\psi\psi)}}$, ἧς τὸ δεύτερον μέλος ἐμφαίνει στοιχεῖον τόξου κύκλου, οὗ ψ μέν ἐστι τὸ ἡμίτονον, 1 δὲ ἡ ἀκτίς· ψ ἄρα ἐστὶ τὸ ἡμίτονον τοῦ $\frac{\delta\psi}{\sqrt{(1-\psi\psi)}}$, τοῦτ' ἔστι τοῦ $\nu\delta\chi$, εἴτ' οὖν τοῦ $\nu\chi+\Gamma$· ἔστιν ἄρα ὁλόκληρον τὸ $\psi = \eta\mu.(\nu\chi+\Gamma)$· ὡσαύτως ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\nu\delta\chi = \frac{-\delta\psi}{\sqrt{(1-\psi\psi)}}$ συναχθήσεται $\psi = \sigma\upsilon\nu\eta\mu.(\nu\chi+\Gamma)$.

Ὁμοίως, ἐπεὶ $\frac{\delta\psi}{1+\psi\psi}$ ἐμφαίνει στοιχεῖον τόξου κύκλου, οὗ 1 μέν ἐστιν ἡ ἀκτὶς, ψ δὲ ἡ ἀπτομένη, ἐὰν ὑπάρχῃ $\nu\delta\chi = \frac{\delta\psi}{1+\psi\psi}$, συνάγεται $\psi = \alpha\pi.(\nu\chi+\Gamma)$· ἐὰν δὲ ἡ $\nu\delta\chi = \frac{\beta\delta\psi}{\alpha+\zeta\psi\psi}$, ἵν' ἀναχθείη εἰς τὸ πρότερον σχῆμα, γενέσθω $\psi = \mu\nu$, τοῦ μ συνεργοῦ ἀμεταπτώτου ὄντος· ἔσται δὴ $\nu\delta\chi = \frac{\beta\mu\delta\eta}{\alpha+\zeta\mu^2\eta^2}$· ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ $\zeta\mu^2 = \alpha$, ἔσται $\mu = \sqrt{\frac{\alpha}{\zeta}}$· ὅθεν πρόσεισι $\nu\delta\chi = \frac{\beta\sqrt{\frac{\alpha}{\zeta}}\delta\eta}{\alpha+\alpha\eta\eta}$· ὅθεν $\frac{\delta\eta}{1+\eta\eta} = \frac{\nu}{\beta}\delta\chi\sqrt{\alpha\zeta}$· ἄρα η, ἢ $\frac{\zeta}{\mu}$, ἢ $\psi\sqrt{\frac{\zeta}{\alpha}} = \alpha\pi.(\frac{\nu}{\beta}\chi\sqrt{\alpha\zeta}+\Gamma)$· ἄρα $\psi = \sqrt{\frac{\alpha}{\zeta}}$· $\alpha\pi(\frac{\nu}{\beta}\chi\sqrt{\alpha\zeta}+\Gamma)$.

307. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ε'ν τοῖς τύποις ημ. (νχ + Γ), απ. (νχ + Γ), τοῖς ἀρτίως εὑρημένοις, τὸ νχ + Γ ἐμφαίνει ἀπολύτως μῆκος τῦ τόξυ, διὰ μερῶν τῆς ἀκτῖνος, ι παρισαμένου· ἀλλ' ἐπείπερ εὐπετέσερόν ἐσι χρήσαωθαι τοῖς τῶν μοιρῶν ἀριθμοῖς, ἢ αὐτοῖς τοῖς μήκεσιν, ὁπινήκ' ἂν ἁπαντῶσι τοιάδε τόξα, ἐκτιμητέον αὐτὰ εἰς μοίρας· ἅπερ εὐμαρῶς ἀποτελεῖται, διαιρυμένων διὰ τῦ ἀριθμῦ τῶν τῆς ἀκτῖνος μερῶν, ἃ περιέχει μοῖρα μία, τῦτ' ἔσι διὰ 0,0174533, ἢ (ὃ ταὐτὸν) πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ 57,2974166. Τὸ γὰρ ἡμίτονον τόξυ, ἔχοντος μῆκος β, ἢ τὸ ἡμίτονον τόξυ, ἔχοντος ἀριθμὸν μοιρῶν, ἐμφαινόμενον διὰ β × 57,2974166, ταὐτὸν δήπυ πέφυκε.

308. Ε'ὰν ἢ $\frac{\nu\delta\chi}{\sqrt{(1-\chi\chi)}} = \frac{\delta\upsilon}{(1-\upsilon\upsilon)}$, ἧς ἑκάτερον μέλος ἐμφαίνει σοιχεῖα δυοῖν τόξων, ἐχόντων πρὸς ἄλληλα :: 1 : ν, ᾗ ὧν τὰ ἡμίτονά εἰσι χ, υ· τηνικαῦτα τοίνυν εἰς ὁλοκλήρωσιν γενέωθω ἑκάτερον μέλος λογικὸν, ὑποτιθεμένυ, ὑπὲρ μὲν τῦ πρώτυ, $\sqrt{(1-\chi\chi)} = \chi\sqrt{(-1)} - \psi$, ὑπὲρ δὲ θατέρυ, $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} = \upsilon\sqrt{(-1)} - \tau$· ἡ δ' ἐξίσωσις μεταβαλεῖ εἰς $\frac{\nu\delta\psi}{\psi} = \frac{\delta\tau}{\tau}$, ἧς ὁλόκληρόν ἐσι νλψ + λτ + λΓ, ὅθεν ἀποφέρεται Γτ + ψ$^{\nu}$· ἀντικαθισαμένων δὲ ἀντὶ ψ ᾗ τ τῶν κατ' αὐτὰς δυνάμεων, Γ [$\upsilon\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}$] + [$\chi\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-\chi\chi)}$]$^{\nu}$, ἥτις ἐν γένει ἐμφαίνει τὸν λόγον δύω ἡμιτόνων χ, υ δυοῖν τόξων πολλαπλῶν ἀλλήλων.

Ι"να δὲ χρησώμεθα ταύτῃ τῇ ἐξισώσει, διορισέον πρῶτον τὴν μόνιμον Γ· ὑποτεθείφων ἓν (ὥσπερ ᾗ δυνα-

τὸν ὑπάρχει) ἑκάτερα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀρχόμενα· τηνικαῦτα τοίνυν τό, τε χ καὶ τὸ υ ἅμα ἐξισδενωθῆναι ὀφείλουσιν· ἐν ταύτῃ μέντοι τῇ περιπτώσει, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $-\Gamma\sqrt{1} = (-\sqrt{1})^{\nu}$, εἴτ' ὃν $-\Gamma = (-1)^{\nu}$· ἀλλὰ $(-1)^{\nu}$ ἔσι $+1$, ἢ -1, ὡς ἂν ἔχον τύχοι λείψεως ἢ ὑπάρξεως τὸ ν· ἄρα $-\Gamma = \pm 1$, καὶ $\Gamma = \mp 1$, τοῦ μὲν $-$ κρατοῦντος, ἡνίκα τὸ ν ἔσιν ἄρτιος, τοῦ δὲ $+$, ἡνίκα περιττὸς ἀριθμός· ἄρα τελευταῖον $\mp [\upsilon\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}] = [\chi\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-\chi\chi)}]^{\nu}$.

Ἐν ἑκάσῃ μερικωτέρᾳ περιπτώσει δυνατὸν ἀεὶ ἐξαφανίζειν τὰς ἐπιπλάσεις ποσότητας· ὁ δὲ ἁπλούσερος τρόπος ἐξισῶσαι ἐσι τῷ μηδενὶ (μετὰ τὸ μεταθεῖναι πάντας τοὺς ὅρους ἐπὶ θάτερον μέλος) τὸ ἄθροισμα τῶν πραγματικῶν ποσοτήτων· τηνικαῦτα ἓν ἡ καταλοιπος ἐξίσωσις φανήσεται διαιρέσεως ἕσα ἐπιδεκτικὴ διὰ $\sqrt{(-1)}$, καὶ ἔσεται ἡ αὐτὴ τῇ συγκροτηθείσῃ, ἰσωθέντος τῷ μηδενὶ τοῦ τῶν πραγματικῶν ποσοτήτων ἀθροίσματος· ἐὰν, φέρε, γένηται $\nu = 2$, ἔσαι $-\upsilon\sqrt{(-1)} + \sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} = -\chi\chi - 2\chi\sqrt{(-1)}\cdot\sqrt{(1-\chi\chi)} + 1 - \chi\chi$, εἴτ' ὃν $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} + 2\chi\chi - 1 + 2\chi\sqrt{-1}\cdot\sqrt{(1-\chi\chi)} - \upsilon\sqrt{(-1)} = 0$· ἰσωμένου ἄρα τῷ μηδενὶ τοῦ τῶν πραγματικῶν ποσοτήτων ἀθροίσματος, ἔσαι $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} + 2\chi\chi - 1 = 0$· ἡ δὲ ὅλη ἐξίσωσις ἀναχθήσεται εἰς $2\chi\sqrt{(-1)}\cdot\sqrt{(1-\chi\chi)} - \upsilon\sqrt{(-1)} = 0$, ἥτις διαιρεθεῖσα διὰ $\sqrt{(-1)}$, δίδωσι $2\chi\sqrt{(1-\chi\chi)} - \upsilon = 0$, εἴτ' ὃν $\upsilon = 2\chi\sqrt{(1-\chi\chi)}$· ἐὰν ὃν τετραγωνισθῇ αὖτητε ἡ ἐξίσωσις, καὶ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} + 2\chi\chi - 1 = 0$, ἢ γοῦν ἡ $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} = 1 - 2\chi\chi$, τὸ αὐτὸ ἀποτελεσθήσονται.

Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δυνατὸν εὑρεῖν τὰ συνη-

μίτονα ϗ τὰς ἀπτομένας τῶν πολλαπλῶν τόξων· ὑπὲρ ἓν τῶν ἀπτομένων ὁλοκληρωθήσεται τὸ $\frac{\nu\delta\chi}{1+\chi\chi} = \frac{\delta u}{1+uu}$, ἀναλυομένῳ τῷ $1+\chi\chi$ εἰς $(1+\chi\sqrt{(-1)})(1-\chi\sqrt{(-1)})$, ϗ τῷ $1+uu$ εἰς $(1+u\sqrt{(-1)})(1-u\sqrt{(-1)})$, ϗ τῶν ἄλλων διανυσθέντων, ὡς εἴρηται ἐπὶ τῶν λογικῶν κλασμάτων.

309. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ε'ταῦθα δὲ ἐνδιατρίβουσιν ἐκθετέον, ἧς ποτ' ἂν εἴη χρήσεως τό,τε ἡμίτονον ϗ τὸ συνημίτονον τόξου τινός· ἔστω ἓν $\delta\chi = \frac{\delta u}{\sqrt{(1-uu)}}$ ἐξίσωσις παρισῶσα τὸν τῦ χ τόξου πρὸς τὸ αὐτῦ ἡμίτονον υ λόγον· ἐὰν τοίνυν γένηται $\sqrt{(1-uu)} = u\sqrt{(-1)} - \psi$, ποριωθήσεται $\delta\chi = \frac{-\delta\psi}{\psi\sqrt{(-1)}}$, ἢ $\frac{\delta\psi}{\psi} = -\delta\chi\sqrt{(-1)}$, ἧς τὸ ὁλόκληρόν ἐστι $\lambda\psi = -\chi\sqrt{(-1)} + \lambda\Gamma$, ἢ $\lambda\psi = -\chi\sqrt{(-1)}\,\lambda\varepsilon + \lambda\Gamma$, ὅθεν $\psi = \Gamma\varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}$, ϗ τεθείσης ἀντὶ ψ τῆς αὐτῦ δυνάμεως, ποριωθήσεται $\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-uu)} = \Gamma\varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}$· ἡ δὲ μόνιμος Γ προσδιορισθήσεται, εἰ παρατηρηθείη, ὅτι τό,τε τόξον χ, ϗ τὸ αὐτῦ ἡμίτονον ἅμα ἐξαδενωθήσονται· ἔσαι ἄρα $-\sqrt{1} = \Gamma$· ἄρα $u\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-uu)} = -\varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}$, ϗ ἑπομένως $\sqrt{(1-uu)} = u\sqrt{(-1)} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}$· τετραγωνισμῷ τοίνυν ϗ ἀναγωγῇ πορισθήσεται $u = \frac{1-\varepsilon^{-2\chi\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{(-1)}.\varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}} =$

$\frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{(-1)}} - \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{(-1)}}$· ἐπεὶ ἄρα υ ἐσὶν ἡμίτονον τοῦ χ, ἔσαι ημ. $\chi = \frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{(-1)}} - \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{(-1)}}$· ἐὰν δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)} = \upsilon\sqrt{(-1)} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}$ τεθῇ ἀντὶ υ ἡ αὐτοῦ ἤδη εὑρημένη δύναμις, πορισθήσεται $\sqrt{(1-\upsilon\upsilon)}$ τοῦτ' ἔσι συν. ημ. $\chi = \frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{(-1)}} - \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}}{2} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}$ 1) $= \frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{(-1)}} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}}{2}$· ἄρα συνημ. $\chi = \frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{(-1)}} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{(-1)}}}{2}$· ἐπανίωμεν δ' ἐπὶ τὴν τῶν ἐξισώσεων ὁλοκλήρωσιν.

310. Ὅταν αἱ ἀδιόριστοι μὴ ὦσι διακεκριμέναι ἐπὶ τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως, πρὶν ἢ διακρίνειν αὐτὰς ἐπιχειρῆσαι, σκεπτέον μὴ ἡ ἐξίσωσις, ὡς ἔχουσά ἐσι, τύχῃ ὁλοκληρώσεως ἔσα ἀνεπίδεκτος· τοῦτο δὲ γνωσθήσεται (302) ἐξετάσασιν, εἴπερ $\frac{\delta A}{\delta \chi} = \frac{\delta B}{\delta \upsilon}$, ταύτην τὴν ἐξίσωσιν παρισώσης καθ' ὑπόθεσιν τῆς $A\delta\chi + B\delta\upsilon = 0$· ταύτης δὲ ἐπικρατέσης τῆς θέσεως, γενήσεται ἡ ὁλοκλήρωσις, ὥσπερ εἴρηται (298).

311. Ἀλλὰ γὰρ δυνατὸν, τὴν μὲν θέσιν ταύτην μὴ ἐπικρατεῖν, τὴν δ' ἐξίσωσιν οὐδὲν ἧττον εἶναι ὁλοκληρώσιμον· δεῖ μέντοι πολλαπλασιάζειν αὐτὴν ἐπὶ ποιητήν τι-

να κατάλληλον σύνθετον ἐκ χ καὶ υ καὶ ἀμετατρέπτων ποσοτήτων· ἔσω Π ἕτος ὁ ποιητής· τηνικαῦτα ἓν ΑΠδχ + ΒΠδυ = 0. ἔσαι ἀπειροσὸν τέλειον· δεῖ δὴ ὑπάρχειν $\frac{\delta(A\Pi)}{\delta u} = \frac{\delta(B\Pi)}{\delta x}$· τὸ ἄρα ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν ὑπὲρ τῆς Π συνέκθεσιν ἐκ χ, καὶ υ καὶ ἀμεταποιήτων ποσῶν· ἀλλ' ἐπεὶ τὸ ζήτημα τόδε μακρᾶς ἐξιν ἐρεύνης δεόμενον, ζητητέον τὴν Π περιέχουσαν μόνον χ καὶ ἀμετατρέπτους, ἢ γοῦν μόνον υ καὶ ἀμετατρέπτους ποσότητας· ὑποτεθείσθω ἓν ἡ Π περιέχουσα μόνον χ· πορισθήσεται ἄρα ἁπλῶς $\Pi\frac{\delta A}{\delta u} = \Pi\frac{\delta B}{\delta x}$· ὅθεν $\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \frac{\left(\frac{\delta A}{\delta u} - \frac{\delta B}{\delta x}\right)}{B}\delta x$· ῥᾳδίως ἄρα εὑρεθήσεται τὸ Π, ἐὰν τὸ $\frac{\left(\frac{\delta A}{\delta u} - \frac{\delta B}{\delta x}\right)}{B}$ ἀναχθῇ εἰς μίαν μόνην τοῦ χ συνέκθεσιν, ὥς περ ἐπάναγκες τὸ Π, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὑπάρχειν μίαν μόνην τοῦ χ συνέκθεσιν.

Δυνατὸν ἔτι εὑρεῖν τὸν ποιητὴν, εἴπερ ἕτος συγκέοιτο ἐκ συνεκθέσεως τοῦ χ, πολλαπλασιαζομένης, ἢ διαιρουμένης διὰ γνωσῆς τοῦ υ συνεκθέσεως.

312. Διὰ ταύτης ἓν τῆς μεθόδου δυνατὸν ὁλοκληρῶσαι ἅπασαν ἐν γένει ἐξίσωσιν τοιαυτώδη $X u^{\kappa} \delta u + X' u^{\kappa+1} \delta x + X'' u^{\rho} \delta x = 0$, τῶν μὲν X, X', X'' οἱασοῦν συνεκθέσεις τοῦ χ, τῶν δὲ κ, ρ δείκτας ὁστινασοῦν ἐμφαινόντων· δυνατὸν ἓν ζητεῖν, εἰ μὴ γίνοιτο ὁλοκληρώσι-

μος, πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ ποιητὴν τοιοῦτον Πv^{ν}, τοῦ Π συνεκθέσεως ὄντος τῆς χ, καὶ τοῦ ν δείκτου ἀδιορίστου· καὶ εὑρεθήσεται ὁλοκληρωμένη, εἴπερ ὑποτεθείη $\nu = -\rho$· ἁπλέστερον μέντοι ὑπάρχει ἀναγαγεῖν ἅπασαν ἐξῆς τὴν ἐξίσωσιν εἰς τοῦτο τὸ σχῆμα $v^{x-\rho}\delta v + Z v^{x-\rho+1}\delta\chi + Z'\delta\chi = 0$, διαιροῦντας αὐτὴν διὰ X καὶ v^{ρ}, καὶ παριστῶντας διὰ Z, Z' τὰ πηλίκα $\frac{X'}{X}, \frac{X''}{X}$· ἵνα δὲ αὕτη ὁλοκληρωθείη, ὑποτεθείσθω τὸ Π ποιητὴς, συνέκθεσις ὢν τῆς χ· ἔσαι ἄρα $\Pi v^{x-\rho}\delta v + Z\Pi v^{x-\rho+1}\delta\chi + Z\Pi\delta\chi = 0$· ἐὰν ἓν τὸ Π συνέκθεσις ὑπάρχῃ τοῦ χ, ἔσαι καὶ τὸ ZΠ· τὸ ἄρα $O.Z\Pi\delta\chi$ ἀναχθήσεται εἰς τὴν ὁλοκλήρωσιν τῶν ἐκ μιᾶς μόνης τρεπτῆς ποσοτήτων· ζητεῖται ἄρα μόνον, ἵνα γένηται $\Pi v^{x-\rho}\delta v + Z\Pi v^{x-\rho+1}\delta\chi$ ἀπειροστὸν τέλειον, τοῦτ' ἔστιν ἵνα γένηται $\frac{\delta(\Pi v^{x-\rho})}{\delta\chi} = \frac{\delta(Z\Pi v^{x-\rho+1})}{\delta v}$, εἴτ' ἓν $v^{x-\rho}\frac{\delta\Pi}{\delta\chi} = (x-\rho+1)v^{x-\rho}Z\Pi$· ὅθεν ἀποφέρεται $\frac{\delta\Pi}{\Pi} + (x-\rho+1)Z\delta\chi$, ἧς τὸ ὁλόκληρον ἔστι $\lambda\Pi + O.(x-\rho+1)Z\delta\chi + O.(x-\rho+1)Z\delta\chi.\lambda\varepsilon$· ἄρα $\Pi + \varepsilon^{O(x-\rho+1)Z\delta\chi}$· ἀντικατασάσει ἄρα ταύτης τῆς τοῦ Π δυνάμεως ἐν τῇ ἐξισώσει $\Pi v^{x-\rho}\delta v +$ κ.τ.λ., καὶ ὁλοκληρώσει πορισθήσεται

$$\frac{\upsilon^{\varkappa-\varrho+1}}{\varkappa-\varrho+1}\varepsilon^{O.(\varkappa-\varrho+1)}+O.Z\delta\chi\,\varepsilon^{O(\varkappa-\varrho+1)Z\delta\chi}+$$

$$\Gamma=0.$$

Οὐδὲν δὲ προσίθεται ὑπὲρ τῆς ἀμεταβλήτου ποσότητος ἐν τῇ ὁλοκληρώσει τῆς τὸ Π προβαλλούσης ἐξισώσεως· μὴ ἔχουσι γὰρ ὡδεμίαν θέσιν εἰς διορισμὸν αὐτῆς, ἐφ' ἡμῖν κεῖται ὑποθεῖναι αὐτὴν ἴσην τῷ μηδενί.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείσθω εἰς ὁλοκλήρωσιν ἡ ἐξίσωσις $\delta\upsilon+\frac{\alpha\upsilon\delta\chi}{\chi}+(\beta\chi^2+\gamma\chi+\zeta)\,\delta\chi=0$· πολλαπλασιαθεῖσα τοίνυν ἐπὶ τὸν ποιητὴν Π γενήσεται $\Pi\delta\upsilon+\frac{\alpha\upsilon\Pi\delta\chi}{\chi}+\Pi(\beta\chi^2+\gamma\chi+\zeta)\,\delta\chi=0$· δεῖ δὴ ὑπάρ-

χειν $\frac{\delta\Pi}{\delta\chi}=\delta\frac{\left(\frac{\alpha\upsilon\Pi}{\chi}\right)}{\delta\upsilon}=\frac{\alpha\Pi}{\chi}$· ἄρα $\frac{\delta\Pi}{\Pi}=\frac{\alpha\delta\chi}{\chi}$· ἄρα $\lambda\Pi=\alpha\lambda\chi$, ἢ $\Pi=\chi^\alpha$· ὡκοῦν ἡ ἐξίσωσις ἀποτελεῖται $\chi^\alpha\delta\upsilon+\alpha\chi^{\alpha-1}\upsilon\delta\chi+\beta\chi^{\alpha+2}\delta\chi+\gamma\chi^{\alpha+1}\delta\chi+\zeta\chi^\alpha\delta\chi$, ἧς ὁλοκληρόν ἐστι τὸ $\chi^\alpha\upsilon+\frac{\beta\chi^{\alpha+3}}{\alpha+3}+\frac{\gamma\chi^{\alpha+2}}{\alpha+2}+\frac{\zeta\chi^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\Gamma=0$.

313. Τῇ ἤδη ὁλοκληρωθείσῃ γενικῇ ἐξισώσει ἐντυγχάνομεν συχνότερον, ἡ δὲ μέθοδος, ᾗ ἐχρησάμεθα, πολλαῖς καὶ ἄλλαις περιπτώσεσιν ἐφαρμοσθῆναι δύναται.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείσθων δύω ἐξισώσεις $\delta\chi+\alpha\delta\upsilon+(\beta\chi+\gamma\upsilon)\,\mathrm{T}\delta\tau=0$, $\varkappa\delta\chi+\acute{\alpha}.\,\delta\upsilon+(\beta'\chi+\gamma'\upsilon)\,\mathrm{T}\delta\tau=0$ τῶν μὲν χ, υ, τ τριῶν ὄντων ἀσάτων ποσῶν,

μονίμων δὲ τῶν α, β, γ, ά. κτ., ϗ τῆ Τ συνέκθεσιν ἡντιναοῦν ἐμφαίνοντος τῆς τ ποσότητος· ἀνακθήσεται ἓν τὸ τέτων τῶν δυεῖν ἐξισώσεων ὁλόκληρον εἰς τὴν προεκτεθεῖσαν μέθοδον ἴτω· πεπολλαπλασιάσθω ἡ ἑτέρα τῶν δυεῖν, ἡ πρώτη φέρ' εἰπεῖν, ἐπὶ συνεργὸν ἀδιόριστον ϗ ἀμετάτρεπτον τὸν Θ, ϗ προσεθείσης τῆ δευτέρᾳ, πολλαπλασιαθήτω τὸ ὅλον ἐπὶ ποιητὴν τὸν Π, ὃς ὑποτίθεται ὧν συνέκθεσις τῆ τ· ἐκεῖν ἔσαι $(\Theta\Pi + \kappa\Pi)\,\delta\chi +$ $(\Theta\alpha\Pi + \acute{\alpha}.\,\Pi)\,\delta\upsilon + [(\Theta\beta\Pi + \beta'.\,\Pi)\chi + (\Theta\gamma\Pi + \gamma'.\,\Pi)$ $\upsilon] = \mathrm{T}\delta\tau = 0$· ἔσω ἓν καθ' ὑπόθεσιν ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀπειροσὸν ἀκριβές· ἔσαι ἄρα (304) ά. $\dfrac{\delta\,(\Theta\Pi + \kappa\Pi)}{\delta\tau} =$

$\dfrac{\delta\,[(\Theta\beta\Pi + \beta'.\,\Pi)\chi + (\Theta\gamma\Pi + \gamma'.\,\Pi)\upsilon]}{\delta\tau}$ Τ· β'.

$\dfrac{\delta\,(\Theta\alpha\Pi + \acute{\alpha}.\,\Pi)}{\delta\chi} =$

$\dfrac{\delta\,[(\Theta\beta\Pi + \beta'.\,\Pi)\chi + (\Theta\gamma\Pi + \gamma'.\,\Pi)\upsilon]}{\delta\upsilon}$ Τ· γ'.

$\dfrac{\delta\,(\Theta\Pi + \kappa\Pi)}{\delta\upsilon} = \dfrac{\delta\,(\Theta\alpha\Pi + \acute{\alpha}.\,\Pi)}{\delta\chi}$· ἀλλ' ἐὰν Π ὑποτεθῆ συνέκθεσις τῆ τ, ἐπικρατεῖ ἡ τελευταία ἐξίσωσις, ἐπείπερ ἀνάγεται εἰς $0 = 0$· αἱ δὲ λοιπαὶ δύω διδόασι

$(\Theta\gamma + \kappa)\dfrac{\delta\Pi}{\delta\tau} = (\Theta\beta + \beta'.)\,\Pi\mathrm{T}$, ϗ $(\Theta\alpha + \acute{\alpha}.)\dfrac{\delta\Pi}{\delta\tau} =$

$(\Theta\gamma + \gamma'.)\,\Pi\mathrm{T}$· ὅθεν ἀποφέρεται $\dfrac{\delta\Pi}{\Pi} = \dfrac{\Theta\beta + \beta'.}{\Theta + \kappa}\mathrm{T}\delta\tau$,

ϗ $\dfrac{\delta\Pi}{\Pi} = \dfrac{\Theta\gamma + \gamma'.}{\Theta\alpha + \acute{\alpha}.}\mathrm{T}\delta\tau$· ἑκατέρας ἄρα τῶν δυεῖν τέτων

δυνάμεων ἐξισωμένης τῷ $\frac{\delta\Pi}{\Pi}$, ἔσαι $\frac{\vartheta\beta+\beta'.}{\vartheta+\varkappa}=\frac{\vartheta\gamma+\gamma'}{\vartheta\alpha+\acute{\alpha}}$, ἐν ᾗ ἄνεισιν εἰς δεύτερον βαθμὸν τὸ Θ· ταύτης ἓν τῆς ἐξισώσεως ἐπιλυθείσης, προκύψουσι δυνάμεις δύω τοῦ Θ.

Τ'ποτεθέντος ἓν γνωστοῦ τοῦ Θ, εὐχερῶς πορισθήσεται τὸ Π· εἴγε ἡ ἐξίσωσις $\frac{\delta\Pi}{\Pi}=\frac{\vartheta\beta+\beta'.}{\vartheta+\varkappa}$ Τδτ δίδωσι Π $=\varepsilon^{0}\frac{\vartheta\beta+\beta'.}{\vartheta+\varkappa}$ Τδτ. Α'λλὰ τῆς ἐξισώσεως $(\vartheta\Pi+\varkappa\Pi)\delta\chi+$ κ.τ.λ. ἀπειροστῷ ἀκριβῶς πράγματι ἴσης, ἐὰν ταύτην ὁλοκληρώσωμεν, ἕξομεν $(\vartheta\Pi+\varkappa\Pi)\chi+(\vartheta\alpha\Pi+\acute{\alpha}.\Pi)\upsilon+\Gamma=0$· ἐὰν ἄρα, τοῦ Θ ἐμφαίνοντος τὴν πρώτην τοῦ Θ δύναμιν, δεδομένην ὑπὸ τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, τὸ Θ' ἐμφαίνῃ τὴν δευτέραν τοῦ Θ δύναμιν, ϰ᾽ διὰ τοῦ Π', ὅπερ γίνεται Π, τεθέντος τοῦ Θ' ὑπὲρ τοῦ Θ', πορισθήσεται $(\vartheta'\Pi'+\varkappa\Pi')\chi+(\vartheta'\alpha\Pi'+\alpha'\Pi')\upsilon+\Gamma'=0$, τοῦ Γ' ποσότητα καινὴν ἀμετάτρεπτον ἐμφαίνοντος· ἐδεὶς γάρ ἐστι λόγος, δι' ὃν ἄντις θατέρᾳ μᾶλλον, ἢ θατέρᾳ χρήσαιτο τῶν τοῦ Θ δυνάμεων· ἐκ τούτων δὲ τῶν δισσῶν ἐξισώσεων πορίζονται εὐμαρῶς αἱ τοῦ χ, ϰ᾽ υ δυνάμεις, παρισάμεναι διὰ τ ϰ᾽ ἀμεταθρέπτων ποσοτήτων.

314. Ὅταν ἡ προκειμένη ἀπειροσὴ ἐξίσωσις μὴ ἐμπεριέχηται ταῖς εἰς δεῦρο ἐκτεθείσαις περιπτώσεσι, σκεπτέον εἰ δυνατὸν διακρίναι τὰς ἀδιορίστους· ἐνίοτε τοίνυν μόνων τῶν κοινῶν κανόνων τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ τέτω δεῖ· ἐνίοτε δὲ, μεταμορφώσεων· εἰσὶ μέντοι ἐξισώσεις, ἐφ' αἷς ἄγνωστον, ἥτις ἂν εἴη ἡ κατάλληλος μεταμόρφωσις· ἡ μὲν γὰρ ἐξίσωσις $\alpha\chi^{\nu}\delta\chi+\beta\upsilon^{\varkappa}\chi^{\nu}\delta\chi=$

$υ^{n}δυ\ (ε + ζχ^{n})^{ρ}$ ἀμέσως διαιρίνεται διὰ διαιρέσεως, εἴ-γε ταυτίζεται τῇ $(α + βυ^{x})\,χ^{ν}δχ = υ^{n}δυ\ (ε + ζχ^{n})^{ρ}$, ἥτις γίνεται $\dfrac{χ^{ν}δχ}{(ε + ζχ^{n})^{ρ}} = \dfrac{υ^{n}δυ}{α + βυ^{x}}$, ἧς τὸ ὁλοκλήρωμα ἐξέχεται τῶν τῶν δυωνύμων ποσῶν τῶν μιᾶς μόνης τρεπτῆς περιεκτικῶν· ἡ δέ γε $ϑχδχ = αχ^{4}υδυ + 2αβχ^{2}υ^{3}δυ + αββυ^{5}δυ$ πρῶτον μὲν, ἢ παντὶ δῆλον εὐθέως καθίσαται, γραφήσεται $ϑχδχ = (χ^{4} + 2βχ^{2}υ^{2} + ββυ^{4})αυδυ$· ἐξῆς δὲ μεταμορφωθήσεται εἰς $ϑχδχ = (χ^{2} + βυ^{2})^{2} × αυδυ$· βραχὺ ἂν ἐπισησαμένοις δῆλον εὐϑὺς, ὅτι εὐτυχῶς πραχθήσεται ἡ διάκρισις, εἰ γένοιτο $χ^{2} + βυ^{2} = ψ$· ϗ γὰρ ἔσαι $χ^{2} = ψ - βυ^{2}$, ϗ $χδχ = \frac{1}{2}δψ - βυδυ$· ἀντικατασάσει ἄρα πορισθήσεται $\frac{1}{2}ϑδψ - βϑυδυ = αψψυδυ$, ὅϑεν ἀποφέρεται $\dfrac{\frac{1}{2}ϑδψ}{βϑ + αψψ} = υδυ$, ἥτις ἐσὶ ῥάσι πρὸς ὁλοκλήρωσιν.

315. Ἐπείπερ ἀμήχανόν ἐσιν ἀποδεῖναι κανόνας γενικὰς τῶν μεταμορφώσεων, ἐκθησόμεθα ἐν γένει, ὅτε γνωσὸν καθίσαται εὐτυχῶς ἐκτελεῖσθαι τὰ τῆς διακρίσεως.

Δυνατὸν ἓν ἐν γένει τὰ τῆς διακρίσεως ἐκτελεῖσθαι ἐν ἁπάσαις ταῖς ἐξισώσεσι ταῖς δυεῖν τρεπτῶν περιεκτικαῖς· ἔσω γὰρ ἡ $Aδχ + Bδυ = 0$ ἐξίσωσις ὁμογενὴς, ϗ διηρήσϑω ὅλη διὰ βαθμοῦ τῆς χ, οὗ ὁ δείκτης ἐμφαίνει τὸν βαθμὸν τῆς ἐξισώσεως· ταῖς ἓν A, B μόνοι οἱ βαθμοὶ τοῦ $\frac{υ}{χ}$ ἐνέσονται ϗ ποσότητες ἀμετάτρεπτοι· ὥσε ἡ ἐξίσωσις γενήσεται $Zδχ + Z^{I}δυ = 0$, τῶν Z, Z^{I} συνεκϑέσεις ἐμφαινόντων τοῦ $\frac{υ}{χ}$, ϗ τῶν ἀμετατρέπτων· τὰ-

τῦ τεθέντος, ἐπεὶ $\delta(\frac{\upsilon}{\chi}) = \frac{\chi\delta\upsilon - \upsilon\delta\chi}{\chi\chi}$, ἔσαι $\delta\chi =$ $\frac{-\chi\chi}{\upsilon}\delta(\frac{\upsilon}{\chi}) + \frac{\chi}{\upsilon}\delta\upsilon$· ἐὰν ἄρα γένηται $\frac{\upsilon}{\chi} = \psi$, πορισθήσεται $\delta\chi = -\frac{\upsilon\delta\psi}{\psi\psi} + \frac{\delta\upsilon}{\psi}$· ἀντὶ ἄρα $\frac{\upsilon}{\chi}$, καὶ $\delta\chi$ ἀντικατασταθεισῶν τῶν κατ' αὐτὰς δυνάμεων, πορισθήσεται $-\frac{Z\upsilon\delta\psi}{\psi\psi} + \frac{Z\delta\psi}{\psi} + Z^{I}\delta\upsilon = 0$, τῶν Z, Z^{I} ἐμφαινόντων ἀληθῶς τὰς συνεκθέσεις τῦ ψ καὶ τῶν ἀμεταπτωτων, αὕτη τοίνυν ἡ ἐξίσωσις δίδωσι $\frac{\delta\upsilon}{\upsilon} = \frac{Z\delta\psi}{Z\psi + Z^{I}\psi\psi}$ ἐξίσωσιν ὅλην διακεκριμένην, ἐπεὶ Z καὶ Z^{I} μόνην τὴν ψ τρεπτὴν περιέχουσιν· ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, ἦ $\upsilon^3\delta\chi + \upsilon^2\chi\delta\upsilon + \beta\chi^3\delta\upsilon = 0$· ἥτις ἐξίσωσίς ἐστιν ὁμογενὴς, ἧς τὸν βαθμὸν ἐμφαίνει ὁ ἀριθμὸς 3, διηρήσθω διὰ χ^3· γινέσθω $\frac{\upsilon^3}{\chi^3}\delta\chi + \frac{\upsilon^2}{\chi^2}\delta\upsilon + \beta\delta\upsilon = 0$· γενέσθω δὴ $\frac{\upsilon}{\chi} = \psi$, ἢ $\chi = \frac{\upsilon}{\psi}$· ἔσαι τοίνυν $\delta\chi = \frac{\psi\delta\upsilon - \upsilon\delta\psi}{\psi\psi}$· ἀντικατασάσει ἄρα ἐν τῇ προτεθείσει ἐξισώσει, πρόεισι $\psi^2\delta\upsilon - \upsilon\psi\delta\psi + \psi^2\delta\upsilon + \beta\delta\upsilon = 0$, ὅθεν $\frac{\delta\upsilon}{\upsilon} = \frac{\psi\delta\psi}{2\psi^2 + \beta}$, ἧς τὸ ὁλόκληρον ἔστι $\lambda\upsilon = \frac{1}{4}\lambda(2\psi^2 + \beta) + \lambda\Gamma$, ἥτις δίδωσιν $\upsilon = \Gamma(2\psi^2 + \beta)^{\frac{1}{4}}$, εἴτ' ἦν $\upsilon^4 = \Gamma^4(2\psi^2 + \beta)$, εἴτ' ἦν τελευταῖον $\upsilon^4 = \Gamma^4(\frac{2\upsilon^2}{\alpha^2} + \beta)$, ἀντικαθιξαμένης ἀντὶ ψ τῆς αὐτῦ δυνάμεως.

316. Συμφορώτατον ἄρα ὑπάρχει ὁμογενεῖς, εἰ ἐξείη, ἀπεργάζεσθαι τὰς ἐξισώσεις· ἀλλὰ μέθοδος γενικὴ ὑπὲρ τούτου ὑπάρχει ὐδεμία· προσφευκτέον ἓν ἐξι ταῖς μεταμορφώσεσιν· αἱ δέ τι χ᾽ ἀποτελεῖν ἔχουσαι ἐν τούτῳ κεῖνται, ἐξισῶσαι ἀμέλει μίαν τῶν τρεπτῶν, ἢ συνέκθεσιν αὐτῆς, ἢ γεν συνέκθεσιν ἑκατέρας, συνεκθέσει καινῆς τρεπτῆς μετὰ δεικτῶν ἀδιορίστων, οἳ διορίζονται διὰ τῆς θέσεως, ὅτι ἔσιν ὁμογενὴς ἡ μεταμορφωθεῖσα ἐξίσωσις.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ε᾽ἀν, φέρε, ἐξισώσεως προτεθείσης τῆς $\alpha x^{\mu} dx + \beta u^{\nu} x^{\varkappa} du + \gamma u^{\varkappa} du = 0$, εἰς ἣν ἀναχθῆναι ἔχει πᾶσα ἐξίσωσις τριῶν ὅρων περιεκτική, ζητηθῶσιν αἱ περιπτώσεις, καθ᾽ ἃς αὕτη γίνεται ὁμογενής, γενέω $x = \psi^{\eta}$· χ᾽ δὴ ἔσαι $\alpha\eta\psi^{\mu\eta+\eta-1} d\psi + \beta u^{\nu}\psi^{\varkappa\eta} du + \gamma u^{\eta} du = 0$· ἵν᾽ ἄρα γένηται αὕτη ὁμογενής, δεῖ εἶναι $\pi = \varkappa\eta + \nu$, χ᾽ $\pi = \mu\eta + \eta - 1$, ὅθεν ἀποφέρεται $\eta = \frac{\nu + 1}{\mu - \varkappa + 1}$, χ᾽ $\pi = \frac{\mu\nu + \varkappa + \nu}{\mu - \varkappa + 1}$· ἐκεῖν, ἐὰν αἱ δεῖκται π, κ, μ, ν, τοιοίδε ὦσιν, ὡς ἐπικρατεῖν ταύτην τὴν ἐξίσωσιν, δυνατὸν ἀποτελέσαι ὁμογενῆ, χ᾽ ἐπομένως διακρῖναι τὴν προτεθεῖσαν ἐξίσωσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ ἐξισώσεων καὶ ποσοτήτων ἀπειροσῶν δευτέρας, τρίτης κτλ. τάξεως.

317. Η᾽ ἄδεια τὲ ἐν τῇ λήψει τῶν ἀπειροσῶν (32, 33) ὑποτιθέναι ὡς ἀμετάτρεπτον μίαν τινὰ ποσότητα ἐν πολ-

λοῖς τὴν ὁλοκλήρωσιν ῥᾳδιουργεῖ· ἐπεὶ μέντοι συμβαίνει ἐν τῇ λήψει τῶν ἀπειροστῶν ἀμετάτρεπτον γίνεσθαι ἀπειροστὸν, μὴ ῥᾳδιουργεῖν τὴν ὁλοκλήρωσιν· ῥητέον πρῶτον ὅπως ἐξίσωσις ἀπειροστὴ, ἐν ᾗ ὑποτέθειται μία τις ἀπειροστὴ ποσότης ἀμετάτρεπτος, τραπείη εἰς ἑτέραν, μηδὲν ἔχουσαν ποσὸν ἀμετάτρεπτον· ἐφ' ἡμῖν δὲ ἔσαι τῷ λοιπῷ ὑποθεῖναι, ἥν ἂν βουλώμεθα, ἀμετάτρεπτον· ἔστω ὧν $A\delta\chi^2 + B\delta\chi\delta v + \Gamma\delta v^2 + \Delta\delta\delta v = o$, ἐξίσωσις δυεῖν τρεπτῶν, ᾗ ἀπειροστῶν δευτέρων, περιεκτικὴ, ἐν ᾗ τὸ πρῶτον ἀπειροστὸν $\delta\chi$ τῆς ἑτέρας τῶν τρεπτῶν ὑποτέθεται ἀμετάτρεπτον· διαιρεθεῖσα τοίνυν αὕτη ἡ ἐξίσωσις διὰ $\delta\chi$, γεγράφθω ὕτως, $A\delta\chi + B\delta v + \frac{\Gamma\delta v^2}{\delta\chi} + \Delta\delta\left(\frac{\delta v}{\delta\chi}\right) = o$, ἥτις ἐπιεικῶς ἐστιν ἡ αὐτὴ, εἴγε, κἂν ὑποτεθείη μόνιμον τὸ $\delta\chi$, $\delta\left(\frac{\delta v}{\delta\chi}\right)$ ἔστιν ἴσον τῷ $\frac{\delta\delta v}{\delta\chi}$· μὴ βουλομένοις δὲ εἶναι ἀμετάτρεπτον τὸ $\delta\chi$, ἔσαι $\delta\left(\frac{\delta v}{\delta\chi}\right) = \frac{\delta\chi\delta\delta v - \delta v\delta\delta\chi}{\delta\chi^2}$· ἡ ἄρα ἐξίσωσις μεταβαλεῖ εἰς $A\delta\chi + B\delta v + \frac{\Gamma\delta v^2}{\delta\chi} + \Delta\left(\frac{\delta\chi\delta\delta v - \delta v\delta\delta\chi}{\delta\chi^2}\right) = o$, ἐν ᾗ ὑποθέσει ἐστὶν ἀπειροστὸν ἀμετάτρεπτον.

Ἔστω $A\delta\chi^3 + B\delta\chi^2\delta v + \Gamma\delta v^2\delta\chi + \Delta\delta v^3 + E\delta\chi\delta\delta v + Z\delta v\delta\delta v + H\delta^2 v = o$, ἐξίσωσις ἐξ ἀπειροστῶν τριτοταγῶν, τοῦ $\delta\chi$ ἀεὶ ἀμεταπτώτου ὄντος· διαιρεθεῖσα οὖν αὕτη ἡ ἐξίσωσις διὰ $\delta\chi^2$ γενήσεται $A\delta\chi + B\delta v + \frac{\Gamma\delta v^2}{\delta\chi} + \Delta\frac{\delta v^3}{\delta\chi^2} + E\frac{\delta\delta v}{\delta\chi} + Z\frac{\delta v}{\delta\chi}\frac{\delta\delta v}{\delta\chi} + H\frac{\delta^2 v}{\delta\chi^2} =$

ο, ἥτις ἔχει γραφῆναι ἔτως, $A\delta\chi + B\delta v + \frac{\Gamma\delta v^2}{\delta\chi} +$ $\frac{\Delta\delta v3}{\delta\chi^2} + E\delta\left(\frac{\delta v}{\delta\chi}\right) + Z\frac{\delta v}{\delta\chi}\,\delta\left(\frac{\delta v}{\delta\chi}\right) + H\delta\left[\left(\frac{1}{\delta\chi}\right)\right.$ $\left.\delta\left(\frac{\delta v}{\delta\chi}\right)\right] = o$· πάντων δὲ τρεπτῶν γενομένων ἐν ταῖς σεσημειωμέναις ταῖς δε τῶν ἀπειροςῶν λήψεσι, πορισθήσεται ἐξίσωσις μηδὲν ἔχουσα ἀπειροσὸν ἀμετάτρεπτον.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἔςω $\delta\chi^2\delta v - \delta v^3 = a\delta\chi\delta\delta v +$ $\chi\delta\chi\delta\delta v$, ἔνθα τὸ $\delta\chi$ ἀμετάτρεπτον ὑποτίθεται· τὴν ἀρχὴν ἧν ἐδόλως καταφαίνεται, ὅπως ἂν εἴη αὕτη ἡ ἐξίσωσις ὁλοκληρώσιμος· ἀλλ' ἐὰν γένηται τρεπτὸν τὸ $\delta\chi$, γραφομένης τῆς ἐξισώσεως ἔτω, $\delta\chi\delta v - \frac{\delta v3}{\delta\chi} = (a\delta\chi + \chi\delta\chi)\,\delta\left(\frac{\delta v}{\delta\chi}\right)$, ἐξέσαι ἐν ταύτῃ τῇ σεσημειωμένῃ λήψει τῶν ἀπειροςῶν λαβεῖν ὡς ἀμετάτρεπτον τὸ δv· ὑκῶν ἔσαι $\delta\chi\delta v - \frac{\delta v3}{\delta\chi} = -(a\delta\chi + \chi\delta\chi)\frac{\delta v\delta\delta\chi}{\delta\chi^2}$, ἥτις ἀναγωγῇ γίνεται $\delta\chi^2 + \chi\delta\delta\chi + a\delta\delta\chi - \delta v^2 = o$, ἧς ὁλόκληρον, ὡς εὐμαρῶς κατανοεῖται, ἔςι τὸ $\chi\delta\chi +$ $a\delta\chi - v\delta v + \Gamma\delta v = o$, προσιθεμένυ ἀμετατρέπτυ τῦ $\Gamma\delta v$ τῷ ὁλοκλήρῳ ὁμοταγῦς· ἐπανολοκληρωθεῖσα δὲ αὕτη ἡ ἐξίσωσις, γίνεται $\frac{1}{2}\chi^2 + a\chi - \frac{1}{2}v^2 + \Gamma v +$ $\Gamma' = o$.

318. Ὁ ἀποδοθεὶς ἡμῖν κανὼν (298) εἰς ὁλοκλήρωσιν ποσῶν ἀπειροςῶν, πολλὰς περιεχόντων τρεπτὰς, ἐφαρμόζεται ταῖς ἁπάσης τάξεως ἀπειροσαῖς ποσότησιν, ἐκλαμβανομένων τῶν ἀπειροςῶν $\delta\delta\chi$, $\delta\delta v$, $\delta^3\chi$, $\delta^3 v$,

κτλ., ὡς τρεπτῶν παντοίων· προκείσθω γὰρ εἰς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\chi^3 v^2 \delta\delta v + 2\chi^3 v \delta v^2 + (2\chi^2 v + 3v^2\chi^2)\delta\chi\delta v + 2v^2\chi\delta\chi^2$, ἐν ᾗ τὸ $\delta\chi$ ὑποτίθεται ἀμετάτρεπτον· γενέσθω ἓν πρῶτον ὁλοκλήρωσις, ἐκλαμβανομένου τοῦ $\delta\delta v$ ὡς μόνου τρεπτοῦ· καὶ δὴ ἔσαι $\chi^3 v^2 \delta v$· εἰλήφθω ἓν τούτου τὰ ἀπειροσὰ, ἅπερ ἐστὶ $3\chi^2 v^2 \delta\chi\delta v + 2\chi^3 v \delta v^2 + \chi^3 v^2 \delta\delta v$, καὶ τοῦ προτεθέντος ἀφαιρεθέντα, λείπουσι $2\chi^2 v \delta\chi\delta v + 2v^2\chi\delta\chi$· εἰλήφθω ἓν καὶ ταύτης τῆς ποσότητος τὰ ἀπειροσὰ, καὶ ἀφηρήσθω τοῦ πρώτου καταλοίπου τὸ ἀπειροστόν $2\chi^2 v \delta v \delta\chi + 2\chi^2 v^2 \delta\chi$, καὶ ἐπεὶ μηδὲν λείπεται, συνάγεται τὸ τῆς προτεθείσης ποσότητος ὁλόκληρον εἶναι τὸ $\chi^3 v^2 \delta v + \chi^2 v^2 \delta\chi + \Gamma\delta\chi$, προσιθεμένης ἀμεταβλήτου ποσότητος τῆς $\Gamma\delta\chi$, ὁμοταγοῦς τῷ ὁλοκλήρῳ.

319. Αἱ δὲ ἀπειροσαὶ ἐξισώσεις ὁλοκληροῦνται ὡσαύτως, ὅταν, ὡς προτίθενται, ὦσιν ὁλοκληρώσιμοι· ὅπερ γνωσθήσεται, εἰ τῆς ὁλοκληρώσεως προχωρούσης, ὡς προείρηται, τὸ ἔσχατον καταλοιπὸν εἴη μηδέν.

Τοῦ δ' ἐσχάτου καταλοίπου μὴ ὄντος μηδὲν, ὃ παρὰ τοῦτο συναγαγεῖν δεῖ μὴ εἶναι ὁλοκληρωσίμους τὰς προτεθείσας ἐξισώσεις· ἐπεὶ γὰρ ἡ ἰσότης ἥκιστα μεταβάλλεται, ἑκατέρου μέλους εἴτε πολλαπλασιαζομένου, εἴτε διαιρουμένου διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, δυνατὸν εὑρεθῆναι ποσότητα, ἥτις, πολλαπλασιάσασα τὴν ἐξίσωσιν, ποιεῖ αὐτὴν ὁλοκληρώσιμον.

Ὃ δ' ἐν γένει ὁ ποιητὴς ἕκαστος ἀπαιτεῖ, ἡμῖν ἐπὶ τοῦ παρόντος παραιτηθήσεται, ἀποδοθήσεται δὲ μερικώτερόν τι, ὡς νύξιν τινὰ ἐμποιῆσαι τῆς τούτου μετελεύσεως, ἄλλως λυσιτελοῦν ἐν ὀλίγαις περιπτώσεσι τῶν μαθηματικωτέρων φυσικῶν προβλημάτων· κείσθωσαν ἓν ἐξισώσεις τοιαίδε $\delta\delta v + \alpha\delta v\delta\chi + \beta v\delta\chi^2 + X\delta\chi^2 = 0$, ἢ

$\delta^3 v + \alpha\delta\delta v\delta\chi + \beta\delta v\delta\chi^2 + \gamma v\delta\chi^3 + X\delta\chi^3 = 0$, ἢ ἐν γένει, $\delta^\nu v + \alpha\delta^{\nu-1} v\delta\chi + \beta\delta^{\nu-2} v\delta\chi + \ldots \mu v\delta\chi^\nu + X\delta\chi^\nu = 0$, ἐν αἷς τὸ μὲν $\delta\chi$ ὑποτίθεται ἀμετάτρεπτον· οἱ δὲ α, β, γ, κτλ. εἰσὶ συνεργοὶ ἀμετάτρεπτοι, τὸ δὲ X συνέκθεσις ἡτισοῦν τοῦ X· πᾶσαι αὗται αἱ ἐξισώσεις ὁλοκληρώσιμοι γίνονται πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ ποιητὴν συγκείμενον ἐκ χ, καὶ ἀμετατρέπτων ποσῶν· ὁ δὲ ποιητὴς εὑρίσκεται ὅτω.

Κείσθω ἐξίσωσις ἡ $\delta\delta v + \alpha\delta v\delta\chi + \beta v\delta\chi^2 + X\delta\chi^2 = 0$, καὶ ἀναλυθήτω ὁ ὅρος $\alpha\delta v\delta\chi$ εἰς δύω τοὺς $\kappa\delta v\delta\chi$, $(\alpha - \kappa)\,\delta v\delta\chi$· ἐκεῖν πορισθήσεται ἡ ἐξίσωσις $\delta\delta v + \kappa\delta v\delta\chi + (\alpha - \kappa)\,\delta v\delta\chi + \beta v\delta\chi^2 + X\delta\chi^2 = 0$· τὸ δὲ κ ὑποτίθεται ποσὸν ἀμετάτρεπτον ἀδιόριστον· τῇ δὲ ἐξισώσει ἐδενὸς ἐνδεῖ, ὡς εἶναι ὁλοκληρώσιμον, ἢ πολλαπλασιασθῆναι ἐπὶ ποιητὴν τὸν Π, ὃς ἂν εἴη συνέκθεσις τοῦ χ, καὶ ἀμετατρέπτων ποσῶν.

Τούτου τεθέντος, ἡ ἐξίσωσις $\Pi\delta\delta v + \Pi\kappa\delta v\delta\chi + \Pi(\alpha - \kappa)\,\delta v\delta\chi + \Pi\beta v\delta\chi^2 + \Pi X\delta\chi^2 = 0$, ἔσαι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὁλοκληρώσιμος· γεγράφθω ἓν αὕτη ὅτω, $\Pi\delta\delta v + \Pi\kappa\delta\chi\delta v + [\Pi(\alpha - \kappa)\,\delta v + \Pi\beta v\delta\chi + \Pi X\delta\chi]\,\delta\chi = 0$.

Ἀλλ' ἵν' εἴη ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὁλοκληρώσιμος, ἀπαιτεῖται (303) ἐπικρατεῖν τὰς τρεῖς ἐφεξῆς ἐξισώσεις

α'. $\dfrac{\delta\Pi}{\delta v} = \dfrac{\delta(\Pi\kappa\delta\chi)}{\delta\delta v}$

β'. $\dfrac{\delta\Pi}{\delta\chi} = \dfrac{\delta[\Pi(\alpha - \kappa)\,\delta v + \Pi\beta v\delta\chi + \Pi X\delta\chi]}{\delta\delta v}$

γ'. $\dfrac{\delta(\Pi\kappa\delta\chi)}{\delta\chi} = \dfrac{\delta[\Pi(\alpha - \kappa)\,\delta v + \Pi\beta v\delta\chi + \Pi X\delta\chi)}{\delta v}$

ἐκ τοίνυν τῆς πρώτης ἐξισώσεως πρόεισι $0 = 0$, ἐπεὶ καθ' ὑπόθεσιν Π ϗ κ ἐ περιέχουσιν ἕτε υ ἕτε δυ· ἐκ δὲ τῆς δευτέρας κατὰ τὴν αὐτὴν ὑπόθεσιν, $\frac{\delta\Pi}{\delta\chi} = \Pi(\alpha - \kappa)$·

ἐκ δὲ τῆς τρίτης $\frac{\Pi\delta\kappa + \kappa\delta\Pi}{\delta\chi} = \Pi\beta$, ἢ μόνον $\frac{\kappa\delta\Pi}{\delta\chi} = \Pi\beta$, ἐπεὶ τὸ κ ὑποτίθεται ποσὸν ἀμετάτρεπτον· ἐξαρυομένης δὲ ἀφ' ἑκάσης τῶν δε τῶν ἐξισώσεων τῆς δυνάμεως τοῦ $\frac{\delta\Pi}{\Pi}$, ἔσαι $\frac{\delta\Pi}{\Pi} = (\alpha - \kappa)\,\delta\chi$, ϗ $\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \frac{\beta\delta\chi}{\kappa}$·

ἰσαμένων δὲ τούτων τῶν δυνάμεων, ἔσαι $\alpha - \kappa = \frac{\beta}{\kappa}$, ἢ $\kappa\kappa - \alpha\kappa + \beta = 0$· δισσαὶ ἄρα δυνάμεις τοῦ κ προκύψουσιν ἐκ τῆς δευτεροβαθμίου ταύτης ἐξισώσεως· παρασαθεισῶν δὲ τῶν δε τῶν δυνάμεων διὰ μ, μ' πορισθήσεται

$\frac{\delta\Pi}{\Pi} = \frac{\beta\delta\chi}{\mu}$, ϗ ἑπομένως· λογ. $\Pi = \frac{\delta\chi}{\mu}$, ἢ $\Pi\,\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$·

ἡ ἄρα ἐξίσωσις $\Pi\delta\delta\upsilon + \text{κτλ.}$ γενήσεται $\delta\delta\upsilon\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + \mu\delta\upsilon\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + \delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + (\alpha - \mu)\,\delta\upsilon\delta\chi\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + \beta\upsilon\delta\chi^2\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} + \chi\delta\chi^2\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}} = 0$· εἰς δὲ τὴν ταύτης ὁλοκλήρωσιν, ὡλοκληρώσθω πρῶτον (318) ὁ ὅρος $\delta\delta\upsilon\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$, ἐκλαμβανομένου ὡς τρεπτοῦ μόνου τοῦ $\delta\delta\upsilon$· ἐκῶν ἔσαι $\delta\upsilon\varepsilon^{\frac{\beta\chi}{\mu}}$· τούτου δὲ τῶν ἀπειροστῶν ληφθέντων, ϗ ἀπὸ τῆς ἐξισώσεως ἀφαιρεθέντων, κατα-

$\frac{\beta\chi}{\mu}$ $\frac{\beta\chi}{\mu}$
λείπεται (μ + α — $\frac{\beta}{\mu}$ — μ) δυδχε + βυδχ²ε

$\frac{\beta\chi}{\mu}$
+ Χδχ²ε . ἡ δὲ ἐξίσωσις κκ — ακ + β = ο, ἥτις ἐδέν ἐσιν ἀλλ' ἢ μμ — αμ + β = ο, δίδωσιν α — $\frac{\beta}{\mu}$ — μ = ο· λείπεται ἄρα πρὸς ὁλοκλήρωσιν ἡ ποσότης

$\frac{\beta\chi}{\mu}$ $\frac{\beta\chi}{\mu}$ $\frac{\beta\chi}{\mu}$
μδυδχε + βυδχ²ε + Χδχ²ε . εἰλήφθω ἓν ταύτης τὸ ὁλόκληρον, ἐκλαμβανομένυ μόνυ τοῦ υ ὡς τρεπτοῦ· καὶ δὴ ἔσαι δεύτερος τοῦ ὁλοκλήρυ ποσοῦ ὅρος

$\frac{\beta\chi}{\mu}$
ὁ μυδχε . λαμβανομένων οὖν τούτυ τῶν ἀπείροσῶν, καὶ ἀφαιρυμένων ἀπὸ τοῦ πρώτυ καταλοίπυ, λείπεται Χδχ²ε $\frac{\beta\chi}{\mu}$, οὗ τὸ ὁλόκληρον ἐμφαινέσθω ἐν γένει

$\frac{\beta\chi}{\mu}$
διὰ τοῦ δχΟ . Χδχε, ὅπερ, μόνον μίαν τρεπτὴν περιέχον, ἐξέχεται τῶν κανόνων τῆς τῶν μιᾶς τρεπτῆς περιεκτικῶν ἀπείροσῶν ὁλοκληρώσεως· ἐκοῦν τὸ ὁλόκληρον

$\frac{\beta\chi}{\mu}$ $\frac{\beta\chi}{\mu}$ $\frac{\beta\chi}{\mu}$
ἔσι δυε + μυδχε + δχΟ . Χδχε = Γ, ἢ δυ + $\frac{-\beta\chi}{\mu}$ $\frac{\beta\chi}{\mu}$ $\frac{-\beta\chi}{\mu}$
μυδχ + δχε Ο . Χδχε = Γε . ἐπεὶ μέντοι ἑδεὶς πάρεσι λόγος, δι' ὃν ἄντις χρήσαιτο θατέρᾳ δυνάμει τοῦ κ μᾶλλον, ἢ θατέρᾳ, ἐὰν χρησώμεθα τῇ δευτέρᾳ, ἣν ἐδηλώσαμεν διὰ μ', ἔξομεν ἑδὲν ἧττον δυ +

$\mu^{\underline{-\beta\chi}}\upsilon\delta\chi + \delta\chi\varepsilon^{\underline{\beta\chi}}_{\mu} \text{ O.X}\delta\chi\varepsilon^{\underline{-\beta\chi}}_{\mu} = \Gamma^{\text{I}}\varepsilon^{\underline{-\beta\chi}}_{\mu}$, ἐμφαινομένης διὰ τῦ Γ^{I} τῆς ἐπαναληψύσης τῇ ὁλοκληρώσει, καθ' ἣν ὑποτίθεται ἡ καινὴ τῦ κ δύναμις μ΄, ἀμεταβλήτου ποσότητος· ἰσυμένων δὲ τῶν δυεῖν τῦ δυ δυνάμεων τῶν ἐκ τῶν δυεῖν ἐξισώσεων προκυπτυσῶν, συναχθήσεται τε-

$$\text{λευταῖον } \upsilon = \frac{\Gamma\varepsilon^{\underline{-\beta\chi}}_{\mu} - \Gamma\varepsilon^{\underline{-\beta\chi}}_{\mu'} + \varepsilon^{\underline{-\beta\chi}}_{\mu}\text{ O.X}\delta\chi\varepsilon^{\underline{\beta\chi}}_{\mu}}{\mu - \mu'}$$

$$- \varepsilon^{\underline{-\beta\chi}}_{\mu}\text{ O.X}\delta\chi\varepsilon^{\underline{\beta\chi}}_{\mu}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

$$\mu - \mu'$$

320. Εἰδ' εἴη ἡ ἐξίσωσις τριτοβάθμιος, κατὰ τὸν αὐτὸν αὖθις ἐκτελεωθήσεται ἡ ὁλοκλήρωσις τρόπον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ε'ὰν ἦ $\delta^3\upsilon + \alpha\delta\delta\upsilon\delta\chi + \beta\delta\upsilon\delta\chi^{2}$ $+ \gamma\upsilon\delta\chi^3 + \text{X}\delta\chi^3 = \text{o}$, γραφήσεται $\delta^3\upsilon + \kappa\delta\delta\upsilon\delta\chi +$ $(\alpha - \kappa)\,\delta\delta\upsilon\delta\chi + \kappa^{\text{I}}\delta\upsilon\delta\chi^2 + (\beta - \kappa^{\text{I}})\,\delta\upsilon\delta\chi^2 +$ $\gamma\upsilon\delta\chi^3 + \text{X}\delta\chi^3 = \text{o}$, κ καὶ κ^{I} ἀγνώστων μὲν ὄντων, ἀμεταβλήτων μέντοι· ὑποτεθείσθω ἕν, ἵν' ἡ ἐξίσωσις γένοιτο ὁλοκληρώσιμος, δεῖν πολλαπλασιαωθῆναι ἐπὶ τὸν ποιητὴν Π, ὃς περιέχει χ καὶ ποσὰ ἀμετάβλητα, εἶτ' ἕν ὑποτεθείσθω ἡ ἐξίσωσις $\Pi\delta^3\upsilon + \Pi\kappa\delta\delta\upsilon\delta\chi + \Pi(\alpha - \kappa)$ $\delta\delta\upsilon\delta\chi + \Pi\kappa^{\text{I}}\,\delta\upsilon\alpha^2\chi^2 + \Pi(\beta - \kappa^{\text{I}})\,\delta\upsilon\delta\chi^2 + \Pi\gamma\upsilon\delta\chi^3$ $+ \Pi\text{X}\delta\chi^3 = \text{o}$ ὁλοκληρώσιμος· μεταμορφωθείσης ἕν τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἰς τὴν ἑφεξῆς $\Pi\delta^3\upsilon + \Pi\kappa\delta\chi\delta\delta\upsilon +$ $[\Pi(\alpha - \kappa)\,\delta\delta\upsilon + \Pi\kappa^{\text{I}}\,\delta\upsilon\delta\chi] \times \delta\chi + [\Pi(\beta - \kappa^{\text{I}})$ $\delta\upsilon\delta\chi + \Pi\gamma\upsilon\delta\chi^2 + \Pi\text{X}\delta\chi^2]\,\delta\chi = \text{o}$, ἡ θέσις, δι' ἣν γίνεται ὁλοκληρώσιμος, δίδωσι (303) ἐξ ἐξισώσεις, αἵτινες διὰ τὰ ὑποτεθέντα ἐπὶ τῶν κ, κ^{I}, Π ἀνάγονται

εἰς τρεῖς· ἡ δὲ τελευταία ἐξίσωσις, τρεῖς μὲν προβαλεῖ δυνάμεις τῆ κ, τρεῖς δὲ συσοίχους τῆ κ', ϗ Π· ἐντεῦθεν δὲ, ὡς ϗ πρότερον, προκύψουσιν ἐξισώσεις τρεῖς δι' υ, χ, δχ, δυ, ϗ δδυ· ἀποβαλλομένων ἄρα τῶν δδυ, δυ, πορισθήσεται ἡ ἐχάτη τῆ υ δύναμις, περιέχουσα χ καὶ ποσὰ μόνιμα.

321. Ἐντεῦθεν καταφανὲς, ὅ,τι χρὴ ποιεῖν ὑπὲρ τῶν ἀνωτέρων τάξεων.

Ἡ αὐτὴ δὲ μέθοδος ἐφαρμοσθείη, κἂν εἴη μείζων ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων, μὴ ὑπερβαινουσῶν τὸν πρῶτον βαθμὸν, ϗ μὴ πολλαπλασιαζομένων μήτ' ἐπ' ἀλλήλας μήτ' ἐπὶ μηδὲν ἀπειροσὸν τῶν τρεπτῶν τῶνδε, εἰ μὴ εἴη τὸ ὑποτιθέμενον ἀμετάτρεπτον ἀπειροσόν.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐὰν ὦσι δύω ἐξισώσεις $\alpha\delta\delta u + \beta\delta\delta\psi + \gamma\delta u\delta\chi + \varepsilon\delta\psi\delta\chi + \zeta u\delta\chi^2 + \Theta\psi\delta\chi^2 + X\delta\chi^2 = 0$, ϗ $\alpha'\delta\delta u + \beta'\delta\delta\psi + \gamma'\delta u\delta\chi + \varepsilon'\delta\psi\delta\chi + \zeta' u\delta\chi^2 + \Theta'\psi\delta\chi^2 + X'\delta\chi^2 = 0$· ἀναγέσθων ἓν εἰς μίαν μόνην, συναπτομένης τῆς πρώτης τῆ δευτέρᾳ, πολλαπλασιαθείσῃ ἐπὶ συνεργὸν ἀδιόριστον ϗ ἀμετάτρεπον κ· ἐν δὲ τῆ ὅλῃ ἐξισώσει διατετμήσθων ὅ,τε τῆ δυ περιεκτικὸς ὅρος ϗ ὁ τῆ δψ εἰς δύω μέρη, ὥσπερ ἀνωτέρω ἐγένετο· τέλος δὲ πολλαπλασιαθήτω ἐπὶ ποιητὴν ὑποτιθέμενον συνέκθεσιν τῆ χ, ϗ ποσῶν μονίμων.

322. Ὅταν ἐξίσωσις δυεῖν τρεπτῶν περιεκτικὴ ἐλλειπὴς ἢ τῆς ἑτέρας τῶν δυεῖν πεπερασμένων μεταβλητῶν, δυνατὸν αὐτὴν ἀναγαγεῖν εἰς ἀπειροσὰ τῆς ἀμέσως ὑπερκειμένης τάξεως, ἰσουμένου τῆ πρώτου ἀπειροστῆ τῆς ἑτέρας τῶν τρεπτῶν τῷ τῆς δευτέρας ἀπειροστῷ, πολλαπλασιαθέντι ἐπὶ καινὸν ποσὸν ἄτοπον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείσθω πρὸς ὁλοκλήρωσιν τὸ $\frac{\delta\delta v}{\delta v}$

$\sqrt{(1+\frac{\delta v^2}{\delta x^2})} = (\alpha v+\beta)\,\delta x$, ἔνθα τὸ δx ὑποτίθεται ἀμετάτρεπτον, ἤτε μεταβλητὴ x ἄπεσι· γενέσθω τοίνυν $\delta v = \pi\delta x$· ὅθεν ἔσαι $\delta\delta v = \delta\pi\delta x$, καὶ ἑπομένως

$\frac{\delta\pi}{\pi}\sqrt{(1+\pi\pi)} = (\alpha v+\beta).\frac{\delta v}{\pi}$, ἢ $\delta\pi\sqrt{(1+\pi\pi)}$

$= (\alpha v+\beta)\,\delta v$, ἧς τὸ μὲν πρῶτον μέλος ὁλοκληροῦται γεωμετρικῶς, τὸ δὲ δεύτερον, πῇ μὲν γεωμετρικῶς, πῇ δὲ λογαριθμικῶς, λογικοῦ ἀποκαθισαμένου τοῦ $\sqrt{(1+\pi\pi)}$ κατὰ τὰ προειρημένα (291).

Καὶ ταῦτα μὲν ἱκανὰ εἰς στοιχείωσιν τῶν ἡμετέρων νεανίσκων, συνερανισθέντα ἔκ τε τῶν τοῦ Σαυρίου, καὶ Βεζουτίου, καὶ δὴ καὶ τοῦ Λακροΐου συγγραμμάτων· ὁ δὲ θέλων ἑαυτὸν ἀπαρτίσαι ἔντε τῷ τῶν ἀπειροσῶν, καὶ τῷ τῶν ὁλοκλήρων λογισμῷ, μετιέτω τούς τε εἰρημένους, καὶ τὸν Εὔλερον, τὸν Α᾽λέμβερτον, καὶ ἄλλους.

ΣΕΙΡΑ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΤΩΝ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ.

ΤΗΣ ΕΝ ΓΕΝΕΙ ΦΥΣΙΚΗΣ.

Εἰσαγωγή.

1. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ Φυσικὴ, ὡς τὸ ἔτυμον τοῦ ὀνόματος δηλοῖ, γνῶσις ἂν εἴη τῆς Φύσεως· ἐπεὶ δὲ ἡ φωνὴ Φύσις τὸ συμπλήρωμα πάντων τῶν ἐν τῷ παντὶ ὄντων, ἃ ταῖς ἡμετέραις ὑποπίπτει αἰσθήσεσιν, ἐμφαίνει· αἱ δ' αἰσθήσεις ἡμῶν μόνων ἐξικνοῦνται ἀντιλαβέσθαι τῶν ὑλικῶν· ὁρισθείη ἂν καταλληλότερον ἡ Φυσικὴ, Ἐπιστήμη τῶν κατὰ τὰ σώματα, εἴτ' ὂν τὴν ὕλην, ἰδιοτήτων. (*)

2. Κοινῇ δὲ διαιρεῖται εἴς τε τὴν ἐν γένει, καὶ εἰς τὴν κατ' εἶδος· κἀκείνη μέν ἐστιν ἡ γνῶσις τῶν ἐπίσης παντὶ σώματι ἐπαγγελλομένων ἰδιοτήτων· ταύτης δὲ ἔργον ἡ τῶν εἴδει διαφερόντων σωμάτων ἔρευνα· περὶ τῆς πρώτης ὂν ἡμεῖς ἐνταῦθα, ὅσα ἀποχρῶντα κρίνομεν, προανα-

(*) Ὅρα περὶ τούτων Εὐγενίου τὰ Ἀρέσκοντα τοῖς Φιλοσόφοις, Σελ. 1 — 7.

κρȣ́σαντες, ϗ τὰς ταύτῃ συννάȣς ἐπιςήμας ὑποσυνάψαντες, τὰ τῇ κατ' εἶδος προσανήκοντα ἐν τῷ ἐσχάτῳ τόμῳ ἐκθέσθαι ἀποταμιεύσομεν.

Διακριτέον δὲ τὴν Φυσικὴν ἐπιςήμην τῆς καλȣμένης Φυσικῆς Ἱςορίας· αὕτη μὲν γὰρ ἱςορικῶς περὶ τὰ φυσικὰ ὄντα ἀσχολεῖται, τȣ̀ς κυριωτέρȣς αὐτῶν χαρακτῆρας ἀποδιδȣ̃σα, δι' ὧν ἀπ' ἀλλήλων διαςέλλονται· ἐκείνη δὲ τὰς αἰτίας ἐν γένει πολυπραγμονεῖ τῶν κατὰ τὰ σώματα ἰδιοτήτων ϗ ἀλλοιώσεων· ταύταις δέ τινες ϗ τρίτην προστιθέασι τὴν καλȣμένην Ἱςορίαν τῆς Φύσεως, ἥτις καθόλȣ περὶ τῶν ἐν τῷ αἰσθητῷ κόσμῳ γενομένων ἀλλοιώσεων πραγματεύεται.

3. Αἱ μὲν ȣ̃ν κατὰ τὰ σώματα συμβαίνȣσαι ἀλλοιώσεις Φαινόμενα λέγονται, αἱ δὲ ταῦτα προάγȣσαι αἰτίαι, Δυνάμεις· ὅθεν ἡ Φυσικὴ ἀναπτύσσειν λέγεται τὰ φαινόμενα ταῦτα, ἐπειδὰν τὰς, ἐξ ὧν γεγόνασιν, ἀποδῶ δυνάμεις, εἴτ' ȣ̃ν αἰτίας· ἐπεὶ δὲ, τὰς αἰτίας καταλέγοντες τῶν φαινομένων, ἐπίτινα τέλος ἀφικνȣ́μεθα, ἧς ȣ̓χ οἷόν τε ἄλλην αἰτίαν ἀνευρεῖν, ἐκείνην τηνικαῦτα ἐσχάτην αἰτίαν ὀνομάζομεν· ȣ̃τως ἐπὶ τῆς ἀντλίας, τῆς μὲν ἐν τῷ σωλῆνι ἀνόδȣ τȣ̃ ὕδατος αἰτία ἐςὶν ἡ τȣ̃ ἐπικεχυμένȣ τῷ ὕδατι ἀέρος θλίψις, ταύτης δ' αἰτία ἡ τȣ̃ ἀέρος βαρύτης, εἴτ' ȣ̃ν ἡ ἐπὶ τὸ τῆς γῆς κέντρον αὐτȣ̃ φορά, ἧς ȣ̓κ ἔχομεν ἄλλην αἰτίαν ἀποδȣ̃ναι· ἐκτὸς γὰρ τȣτὶ τῶν ὁρίων τῆς ἀνθρωπείȣ γνώσεως· ἡ βαρύτης τοίνυν, ϗ ὅσαι τοιαῦται τῶν δυνάμεων, ἔσχαται λέγονται τῶν φαινομένων αἰτίαι.

4. Ἐπεὶ δὲ τὰ ἐν τῷ αἰσθητῷ κόσμῳ φαινόμενα κατά τινας ὡρισμένȣς ϗ ἀπαρατρέπτȣς κανόνας συμβαίνειν φιλȣ̃σιν, ὡς ἐξ ὁμοίων αἰτιῶν ἐν ὁμοίαις περιπτώσεσιν ἀεὶ ὅμοια γεννᾶσθαι καὶ τὰ ἀποτελέσματα, τȣ̀ς κανόνας

τούτυς Νόμους φυσικὺς ἐκάλεσαν οἱ Φιλόσοφοι, ὧν ὐκ ἔξιν εἰπεῖν ὅσον ἀναγκαία ϗ χρήσιμος τοῖς φυσιολογοῦσιν ἡ γνῶσις.

5. Διττῶς δὲ ἐν τῇ Φυσικῇ (3) αἱ τῶν φαινομένων αἰτίαι ἀναπτύσσονται, ἀμέλει ἤτοι διὰ πείρας ἢ διὰ λόγυ. Πεῖρα μὲν ἓν λέγεται τὸ ταῖς αἰσθήσεσιν ἀνακαλύπτειν τὰς ἐν τοῖς φυσικοῖς σώμασιν ἐπισυμβαινύσας ἀλλοιώσεις· τῦτο δὲ ποιῦμεν, ἤτοι ἄνευ τινὸς μεταβολῆς, ἃς ἔχυσι κατασάσεως, ἐῶντες τὰ, περὶ ἃ ἡμῶν ἡ θεωρία, ἢ ἐκόντες μεταβάλλομεν αὐτὰ ἐν διαφόροις περιπτώσεσιν ἐπὶ διαφόρυς ἐνεργείας ἐνωθῦντες, ἃς ἐκ ἂν ὑπῆλθον καθ' ἑαυτὰ ἄνευ τῆς παρ' ἡμῶν συνδρομῆς· καλεῖται δ' ἐκεῖνο μὲν παρατήρησις, τῦτο δὲ πείραμα· ὧν γὰρ τὴν κατανόησιν μόνη παρατηρήσει οὐκ ἔξι λαβεῖν, ταῦτα πειράμασιν ἀναπτύσσομεν· οἷς δὲ χρώμεθα εἰς ἐκτέλεσίν τινος πειράματος, ταῦτα ὄργανα λέγονται. Ἀλλὰ μόνη τῇ πείρᾳ ὐδὲν ἄντις διανύσειεν, εἰμὴ συλλογισμοὶ ἐντεῦθεν συνάγοιντο περὶ τῆς φύσεως ϗ τῶν ἰδιοτήτων τῦ διὰ τῆς πείρας ἐξεταθέντος σώματος· ὅθεν ὁ φυσιολογεῖν ὀρθῶς βυλόμενος, ἐξ ὧν ἐπειράθητε ϗ παρατετήρηκε, δι' ὀρθῦ λόγυ τὰς τῶν σωμάτων ἰδιότητας ὁρίζειν ϗ τὰς τῶν φαινομένων αἰτίας ἀνιχνεύειν ὀφείλει.

6. Ἐπειδὴ δὲ πολλάκις ἡμῖν ὐκ ἐφικτὸν πείρᾳ, ὅτε μὴν λόγῳ, φαινομένων τινῶν τὰς αἰτίας ἀποδῦναι, ἀνάγκη τηνικαῦτα αἰτίαν τινὰ προϋποθεῖναι, ἐξ ἧς ἂν ἔχοιμεν τὰ παρατηρηθέντα συναγαγεῖν ἀποτελέσματα· καλεῖται δὲ τῦτο ὑπόθεσις, ἀντὶ τῆς ἀληθῦς αἰτίας ἡμῖν συμβάλλυσα· προσήκει δὲ τὰς ὑποθέσεις ταύτας πειράμασί τισιν ἢ παρατηρήσεσιν ἐρηριγμένας εἶναι ϗ ἀκαταναγκάστυς, ϗ ὐδενὶ τῶν γενικῶν τῆς Φύσεως νόμων ἀντιβαι-

νέσας. Ε"σωσαν ἓν ὑπ' ὄψιν οἱ ἐφεξῆς Νευτώνειοι καλέμενοι κανόνες.

7. Α΄. Ε'κείνας μόνον ὡς ἀληθεῖς αἰτίας παραδεκτέον, ὅσαι εἰσὶν ἱκαναὶ κ᾽ ἀπαραίτητοι εἰς ἀκαταναγκασον, ἁπλεσάτην, κ᾽ εὐληπτοτάτην, φαινομένε τινὸς ἀνάπτυξιν.

Αἱ αἰτίαι δὲ ἀληθεῖς εἰσι, ά. ἐπειδὰν αἰσθητῶς ἐν τῇ Φύσει ἀποδεικνύωνται, κ᾽ καταδηλον ᾖ, ὅτι ἐν τῷ παρατηρηθέντι φαινομένῳ αὗται παρῆσαν, τῶν ἄλλων ἁπασῶν αἰτιῶν σαφῶς ἐντεῦθεν ἀποκλειομένων· β΄. ἐπειδὰν τὸ φαινόμενον μὴ μόνον κατὰ δυνατὸν τρόπον· ἀλλ᾽ ἀριδήλως ἐντεῦθεν συνάγηται· γ΄. ἐπειδὰν ἐν διαφόροις περιπτώσεσιν αἱ αὐταὶ αἰτίαι τ᾽ αὐτὰ παράγεσι φαινόμενα, κ᾽ δ΄. τέλος, ἐὰν, αἰρομένης τῆς αἰτίας, αἴρηται σὺν αὐτῇ κ᾽ τὸ φαινόμενον.

8. Β΄. Τοῖς ὁμογενέσιν ἀποτελέσμασι τὰς αὐτὰς ἀποδοτέον αἰτίας.

Ε'νταῦθα μέντοι προσέχειν δεῖ, μὴ, ταῖς ὁμοίαις διαφόρων φαινομένων περιπτώσεσι πλανηθέντες, τὰς αὐτὰς αὐτοῖς ἀποδῶμεν αἰτίας· ἐ ῥᾴδιον γὰρ πολλάκις τὸ ἐσιώδες τὸ κατὰ συμβεβηκὸς διακρίνειν, τὸ τὴν ὁμοιότητα τοῖς ἑτεροειδέσι φαινομένοις παρέχον.

9. Γ΄. Τὰς τῶν σωμάτων ἰδιότητας, τὰς μηδεμιᾶς μὲν ἐπιδεκτικὰς μεταβολῆς, ἀεὶ δὲ τὰς αὐτὰς πᾶσι τοῖς παρ᾽ ἡμῶν βασανιζομένοις σώμασι προσούσας, ὡς κοινὰς πᾶσι τοῖς σώμασιν ἰδιότητας ἐκλεπτέον.

10. Δ΄. Τὰς ἐκ τῶν φαινομένων συναχθείσας θέσεις, καίτοι τινῶν ὑποθέσεων αὐταῖς ἀντιβαινεσῶν, παραδεκτέον μέντοι ὡς

ἀληθεῖς, ἢ ὡς τοῦ ἀληθοῦς ἔγγισα ὄσας, μέχρις ὃ ἑτέροις ἐντύχωμεν φαινομένοις, ἤτοι πρὸς ἐμπέδωσιν αὐτῶν, ἢ πρὸς ἀναίρεσιν, ἐπιτηδείοις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ διαφορᾶς διαςήματος, σώματος, καὶ ὕλης.

11. Ἔκτασις, σῶμα, καὶ ὕλη, τρία ταῦτα ἀλλήλων εἰσὶ διαφέροντα.

12. Α΄. Διάςημα ἄνευ σώματος, ἢ ἄνευ ὕλης, οἷον ἄντις ἐννοήσειε τὸ πρὸ τῆς δημιουργίας μέρος τοῦ ἀπείρου διαςήματος, ᾧ ἐντετόπισαι, ὃν οἰκοῦμεν, ὁ κόσμος· οὐκ ἔσιν, ὅτε σῶμα, ὅτε ὕλη.

13. Β΄. Παρὰ ταῦτα, τότε σώματα, καὶ ἡ ὕλη, εἰσὶ κινητὰ, δυνάμενα μεταβῆναι ἀφ' ἑνὸς μέρους τοῦ διαςήματος ἐφ' ἕτερον· τὰ μέντοι μέρη τῆς ἐκτάσεως, ἢ καλεῖται τόπος, ἢ διάςημα, εἰσὶν ὥσπερ ἀκίνητα· κίνησις δὲ πραγματικὴ τῶν σωμάτων, ἢ τῆς ὕλης, λέγεται, ἐπειδὰν ταῦτα μέρος τοῦ τόπου, ἢ τοῦ διαςήματος, διατρέχωσι, τῶν τοῦ τόπου μερῶν ἀναλλοιώτων ἐν τῇ αὐτῇ αὐτῶν σχετικῇ θέσει μενόντων.

14. Γ΄. Τὰ τοῦ τόπου μέρη εἰσὶ διαχωρητὰ, ἀκωλύτως δι' αὐτῶν διϊόντων τῶν σωμάτων, ἢ τῆς ὕλης· τὰ δὲ σώματα ἀδιαχώρητά εἰσιν, ἀπεκκλειόντα ἄλληλα τοῦ αὐτοῦ χώρου.

15. Δ΄. Ἡ ὕλη, ἢ τὸ σῶμα, σύνθετον ὄν, διαιρέσεως ἐςὶν ἐπιδεκτικόν· ὅτι τὰ αὐτοῦ μέρη εἰσὶ κινητὰ, καὶ

δὴ ἀπ' ἀλλήλων διακριθῆναι δύνανται· τὸ δὲ διάσημα ἔσιν ἀδιαίρετον· ὅτι ἕκασον τῶν αὐτοῦ μερῶν, ἀκίνητον ὂν, οὐδύναται τῶν συνεχῶν τούτων μερῶν ἀποχωρισθῆναι.

16. Ε'. Τὸ σῶμα, ἢ ἡ ὕλη, ἔσιν ἀδρανὲς, ὅτι, ὡς αὐτίκα ὀψόμεθα, ἀπαρύεται πλεῖον ἢ ἔλαττον ἐνεργείας ἐκ τῆς αἰτίας, τῆς ἐμποιούσης αὐτῷ τινα μεταβολήν· ἀλλ' ἔσιν ἀδύνατον εἰπεῖν, ὡς ὁ τόπος, ἢ τὸ διάσημα, ἀποφέρεταί τι ἐνεργείας παράτινας φυσικῆς αἰτίας· αἱ γὰρ φυσικαὶ αἰτίαι οὐδὲν ἂν αὐτῷ ἐνεργάσαιντο παρὰ τὸ ἀκίνητον τῶν αὐτοῦ μερῶν.

17. ς'. Η' ὕλη, ἢ τὸ σῶμα, ἔσι βαρὺ, ὅτι τείνει κινούμενον καταλαβεῖντι κέντρον· τὰ γήϊνα φέρε τῶν σωμάτων, τῆς γῆς τὸ κέντρον· ἀλλ' ἐπεὶ τὰ μέρη τοῦ τόπου εἰσὶν ἀκίνητα, οὐδὲν ἐπείγονται καταλαβεῖν κέντρον.

18. Ζ'. Τὰ μέρη τοῦ τόπου, ἢ τοῦ διασήματος, οὐκ ἔχουσιν ἐν ἑαυτοῖς κενὰ διασημάτια, ἀλλ' εἰσὶ συνεχῆ, ἀλλήλων ἀμέσως σνεφαπτόμενα· τὰ δὲ τῶν σωμάτων, τῶν γοῦν ἡμῖν ἐγνωσμένων, ἀλλήλοις ἥκιστα παροσφυῶς προσεφαρμόζονται, ἀλλὰ διακρίνονται διὰ πολλῶν διασηματίων, ἢ ὀπῶν μικρῶν, ἃ καλοῦνται πόροι, ὡς αὐτίκα ἡμῖν ἐκτεθήσεται.

19. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πολλοὶ ἂν λόγοι πείθουσι διακρίνειν τῶν σωμάτων τὸ διάσημα, ἢ τὸν τόπον.

20. Διακριτέον δὲ δύω εἴδη ἐκτάσεως, ἰδεωμένοις διὰ τῆς φωνῆς ἔκτασις, συμπλήρωμά τι μερῶν, ἐκτὸς ἀλλήλων κειμένων, εἴτ' ἐν τὴν ἔκτασιν τοῦ τόπου ἢ τὴν τῆς ὕλης.

21. Ε'κτασις μὲν τοῦ τόπου ἐσὶν, ἧς τὰ μέρη ἀκι-

γητα, ἀδιαίρετα, διαχωρητὰ, ἀδρανείας ϗ βαρύτητος ἄμοιρα, ϗ ἀμέσως ἀλλήλων συνεχόμενα.

22. Ἔκτασις δὲ τῆς ὕλης, ἧς τἐναντίον τὰ μέρη κινητὰ ὑπάρχει, διαιρετὰ, ἀδιαχώρητα, ἀδρανείας τε ϗ βαρυτῆτος εὐμοιρῆντα, ὧν ἡ συνέχεια διακόπτεται, ἢ γῆν διακοπῆναι δύναται, διὰ κενῶν διασηματίων.

23. Πᾶσα μὲν ὕλη ὑπάρχει σῶμα, εἴτ' ἓν ἄθροισμα μερῶν σωματικῶν, ὅ ἐστι, μερῶν κινητῶν, ἀδιαχωρήτων κτ. ἀλλ' ἀντιστρόφως, ὅ ἐστι σῶμα, ἔστι τοῦτ' αὐτὸ ϗ ὕλη; εἴτ' ἓν ἅπαν σῶμα, ὅσῳ ἂν εἴη μικρὸν, ἔστι μερῶν ἄθροισμα; ἀλλ' ἕτως ἅπαν σῶμα ἔσεται ὕλη· εἰ μέν τοι ἡ ὕλη ἐσχάτως ἀναλυθῆναι δύναται εἰς κυρίως λεγόμενα ἄτομα, εἴτ' ἓν εἰς μέρη ἁπλᾶ ϗ ἀδιαίρετα, ϗ ταῦτα σώματα ἔσονται, ἅτε δὴ κινητά τε ἐσόμενα, ἀδιαχώρητα, ἀδρανῆ ϗ βαρέα, ὥσπερ ἡ ὕλη, ἧς ταῦτα μέρη· ἀλλὰ ταῦτα ἕτω μὴ ὄντα ἄθροισμα μερῶν, ἐδ' ὕλη ἑπομένως ἔσονται· ἐὰν ἓν ἄτομα κυρίως λεγόμενα ὑπάρχωσι, πᾶσα μὲν ὕλη ἔσεται σῶμα, ὁ μὴν δὲ ϗ σῶμα ἅπαν ὕλη.

24. ΠΟΡΙΣΜΑ. Εἰ ὑπάρχει ἄτομα, εἴτ' ἓν μέρη ἀδιαίρετα, τὸ διαιρετὸν εἶναι ἔσαι ἐσιῶδες γενικὸν ἰδίωμα τῆς ὕλης· ἔστι γὰρ ὕλη ἄθροισμα μερῶν σωματικῶν, ϗ δὴ ἀπ' ἀλλήλων διαιρετῶν· τὸ μέντοι διαιρετὸν εἶναι οὐκ ἔσαι ἐσιῶδες γενικὸν τοῦ σώματος ἴδιον.

25. Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὡς τὰ τρία ταῦτα, τόπος, ὕλη, ϗ σῶμα, διαφέρουσιν ἀλλήλων.

26. Ἡ μὲν οὖν Γεωμετρία περὶ τὸ διάστημα· ἡ δὲ Φυσικὴ περὶ τὴν ὕλην, ἢ τὰ σώματα, ἐναχολεῖται· ἡνίκα γὰρ ὁ Γεωμέτρης ἐπιφάνειάν τινα καταμετρεῖ, ἀμελεῖ ὅλως τοῦ ἀθροίσματος τῶν σωματικῶν μο-

ρίων, ἃ συντιθέασι τὴν ἐπιφάνειαν· ἐπεὶ γὰρ τὰ μέρη ἐτινοσῦν σώματος ἀεί εἰσιν ἀλλήλων κεχωρισμένα πολλοῖς διασηματίοις κενοῖς, εἴτ' οὖν πόροις, ἀφελεῖν ἔδει τῦ τῶν μερῶν ἀθροίσματος τὰ κενὰ χωρία, ἵν' εὕροι ἀκριβῶς τὸ μέτρον τῆς ἐπιφανείας, τῦτο μέντοι ἀδέποτ' ἂν γένοιτο· ἀμήχανον γὰρ εἰδέναι τόν τε ἀριθμὸν ϗ τὸ μέγεθος τῶν πόρων.

27. Ὡσαύτως περὶ τῆς στερεότητος, ἡνίκα τυχὸν ἡ δωματίϖ χωρητικότης καταμετρεῖται, ὁ τόπος, ἢ τὸ διάσημα, ἀ μέντοι γε τὰ σώματα, ἀδ' ὁ ἐμπεριεχόμενος τῷ δωματίῳ ἀὴρ, καταμετρεῖται· εὑρίσκει γὰρ ὁ Γεωμέτρης τὸ δοχεῖον τῆς πνευματικῆς ἀντλίας, ἀέρος κενωθὲν, ὅσον ϗ πρότερον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τόπϖ, ἢ διαστήματος.

28. Φθάντες ἐδείξαμεν τὰς χαρακτῆρας, οἷς τὸ διάσημα τῆς ὕλης διαφέρει· ἔστι γὰρ, ὕλης ἀμοιρῆν, ἀκίνητον, διαχωρητὸν, ἀδιαίρετον, ἀδρανείας ἄμοιρον ϗ βαρυτῆτος· οἷς ἅπασιν ἐναντίως ἔχει πρός τε τὴν ὕλην ϗ τὰ σώματα.

29. Ἀλλὰ τί γὰρ ἂν εἴη καθ' ἑαυτὸν ὁ καλέμενος τόπος, ἢ τὸ διάσημα; Τῦτ' ἐστιν, ὃ ἀδύνατον ἡμῖν ὅλως ὁρίσασθαι· ὁ μέντοι Νεύτων ὑπέλαβεν, ὡς ἄρα τυτὶ τὸ ἄπειρον διάσημα, ἅτε δὴ ὑπερεκπίπτον τῦ ἡμετέρϖ νοὸς τὰ ὅρια, πρὸ τῆς δημιϖργίας αἰωνίως προὸν, εἴη αὐτὴ ἡ ἀπειρία τῦ Θεῦ, ὡς ἱκανῶς ἔχϖσα χωρῆσαι τὰ σώματα.

30. Καὶ ἦν μὲν ἂν αὕτη ἡ δόξα ἀναμφιβόλως ἀπα-

σῶν πιθανωτέρα, εἰ συνῆδε τῇ φύσει τῆς θεότητος· ἀλλ' ἐνταῦθα ἡ πᾶσα δυσχέρεια· ἐπεὶ, καθάπερ δοκεῖ, τῷ τόπῳ μέρη ἐσὶ πραγματικά, ὧν θάτερον πραγματικῶς ἐκτὸς κείμενον θατέρε, ἐ δύναται πραγματικῶς ἐκείνῳ εἶναι ταὐτόν· ἔτω φέρε τὸ μέρος τῦ διασήματος, ὃ ἐπέχει τὰ Παρίσια ἐκ ἂν εἴη τὸ αὐτὸ πραγματικῶς τῷ, ὃ ἐπέχει ἡ Βιέννα· ὅθεν τὸ διάσημα, ἄπειρον ὄν, ἐκ τέτε ϗ ἄπειρα μέρη ἕξει πραγματικά· ὅπερ ἐκ ἂν ἐπὶ τῆς Υ̓σίας καὶ ἄϋλε ἐσίας λεγοιτο.

31. Ὁ δὲ Καρτέσιος ὑπέθετο, ὡς ϗ τόδε εἶδος εἴη ἐκτάσεως τῆς τῶν σωμάτων, ἢ τῆς ὕλης· ϗ ἑπομένως εἰπεῖν κατηναγκάσατο, ὡς ὁ τόπος ϗ τὸ διάσημα εἶεν αὐτὰ τὰ σώματα· τῆς αὐτῆς δὲ γνώμης ὑπῆρξε ϗ Λεϊβνίτιος· ἀλλ' ἠδόξα αὕτη ἀντιφέρεται προφανῶς, οἷς εἴπομεν περὶ τῦ διασήματος, ὃ ὑπάρχειν δύναται δίχα σωμάτων, ἀκίνητον, ἀδιαίρετον, διαχωρητὸν, ἀδρανείας ϗ βαρυτῆτος ἄμοιρον, πάντη πάντως συνεχές.

32. Τὸ διάσημα ἄρα ἔσι τρίτον τι εἶδος ὄντος, τοῦτε πνεύματος καὶ τοῦ σώματος διάφορον, ὅπερ ὁ Θεὸς, δοχεῖον τῶν σωμάτων ἐδημιούργησε· πνεῦμα μὲν γάρ ἐσιν ὐσία νοερὰ, ἐξ ἧ ἀναγκαίως ἁπλῆ ϗ ἀδιαίρετος, ϗ ἑπομένως ἀνέκτατος, ἐνεργείας εὐμοιρῦσα, ϗ δεξιῶς ἔχυσα ἑαυτὴν προσδιορίσαθαι· τόπος δὲ, ἢ διάσημα, ἔσιν ἔκτασις πραγματικὴ, νοήσεως ϗ ἐνεργείας ἀνεπίδεκτος· οἷς ἅπασι τῦ πνεύματος διενήνοχεν· ἔσι δὲ ϗ ἀκίνητος, ἀδιαίρετος, διαχωρητὴ, συνεχὴς, ἀδρανείας καὶ βαρυτῆτος ἄμοιρος· τέλος δὲ σῶμά ἐσι τὸ ὑποπίπτον ταῖς ἡμετέραις αἰθήσεσι, πραγματικῶς ἐκτεταμένον, ἀμοιρῦν νοήσεως ϗ δρασηριότητος, ἐν οἷς τῷ μὲν τόπῳ ταὐτίζεται, τῦ δὲ πνεύματος διακρίνεται· ἔσι δὲ ϗ

κινητὸν, ϗ διαιρετὸν εἰς γῦν τὰ, ἐξ ὧν συντέθειται, ϗ ἀδιαχώρητον, ἀδρανείας ϗ βαρυτῆτος εὐμοιρῦν, οἷς διενήνοχε τῦ τόπυ, ἢ τῦ διασήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ φύσεως τῦ σώματος ϗ τῆς ὕλης.

33. Εἴδομεν ἄρτι πολλὰς χαρακτῆρας, οἷς ἀληθῶς διακρίνεται ἡ ὕλη ϗ γενικῶς τὸ σῶμα τῦ πνεύματος ϗ τῦ διασήματος· παρατηρῦσι μέντοι, ὡς αὗται αἱ ἰδιότητες τῆς ὕλης ϗ τῦ σώματος ἐκπηγάζυσιν ἐκ πρώτυ τινὸς ὑποκειμένυ, ὅ ἐσι τὸ συσατικὸν, ἢ ἡ ὐσία τῆς ὕλης ἢ τῶν σωμάτων, περιέχυσα τὸν τελευταῖον λόγον, δι' ὃν ἄντις συναγάγοι, ὅπως ἡ ὕλη εὐμοιρεῖ τῆς δε ἢ τῆς δε τῆς ἰδιότητος· συνελόντι δὲ φᾶναι, τοῖς πυνθανομένοις τίς ἔσιν ἡ ὐσία, ἢ τὸ πρῶτον συσατικὸν, τῆς ὕλης ϗ τῶν σωμάτων, ὁμολογητέον, μηδὲν εὐλαβυμένυς, τὴν ἡμῶν ἄγνοιαν.

34. Ἡ φύσις, ἢ ἡ ὐσία, τῦ σώματος, ὐκ ἔσιν ἡ ἔκτασις, ὡς ὑπέλαβεν ὁ Καρτέσιος.

35. α'. Ἐτράπετο δὲ πρὸς τῦτο ὁ ἀνὴρ ὑπολαβὼν μηδεμίαν εἶναι ἔκτασιν παρὰ τὴν τῶν σωμάτων· ἀλλὰ δοκεῖμοι ἱκανὰς ἡμῖν ἀποδεδόσθαι τὰς διαφορὰς, αἷς διακρίνεται ϗὶ ἀφορίζεται ἀλλήλων τὸ διάσημα, ϗὶ τὸ σῶμα (32).

36. β'. Ἡ ἔκτασις ἄθροισμα ὁρίζεται μερῶν ἐκτὸς ἀλλήλων κειμένων· ἀλλ' ἔπω τυτὶ ἑρμηνεύει τὴν φύσιν ἑκάσυ μέρυς καθ' ἑαυτὸ θεωρηθεντος, τὴν φύσιν τῦ ἐκ τύτων τῶν μερῶν ἀποτελυμένυ ὅλυ· ἤτοι γὰρ ἕκασον

τέτων τῶν μερῶν, καθ' ἑαυτὸ λαμβανόμενον, ἔσι σωματῶδες, ἢ ἔ· ϗ εἰμὲν ἐκεῖνο, ἡ ἕνωσις τῶν μερῶν ὑποτίθησι τὴν φύσιν τῦ σώματος, ϗ αὕτη ἀδὲν ἀναπτύσσει· εἰ δὲ τῦτο, πῶς ἂν ἐκ μὴ σωματικῶν μερῶν σωματικὸν συγκροτηθείη ὅλον;

37. γ'. Φύσις ἀρχικὴ ὄντος τινὸς ἔσιν ὁ ἔχατος λόγος, ὁ ἀφ' ἑκάσης ἰδιότητος αὐτῦ ἐπενεχθῆναι δυνάμενος· ἀλλ' εἴτις με ἔροιτο τυχὸν, διὰ τί τὸ σῶμα ἔσιν ἀδιαχώρητον, διὰ τί ἐσιν ἀδρανὲς, ἀ δύναμαι ἀποκριθῆναι, δὴ ὅ,τι ἐσὶν ἐκτεταμένον· ϗὰν γὰρ ἡ ἔκτασις πολλῶν ὑπάρχῃ μερῶν, ἐκτὸς ἀλλήλων κειμένων, ἄθροισμα, ἀ παρὰ τῦτο τὰ μέρη ταῦτα ἀδύνανται ἐνυπάρχειν ἀλλήλοις, εἴτ' ἂν διαχωρεῖσθαι ὑπ' ἀλλήλων· ἄκυν ἀδ' ἕκασον τέτων τῶν μερῶν ἔσιν ἀδρανὲς, ἢ καθαρῶς παθητικὸν, ἢ δυνάμεώς τινος περιεκτικὸν, ἢ προσδιορισμῦ ἐπιδεκτικόν.

38. Φύσις, ἢ ἀσία, τῦ σώματος ἀκ ἔσιν, ἔτε τὸ κινεῖσθαι, ἔτε τὸ ἀδιαχώρητον, ἀχ ἡ ἀδράνεια, ἀχ ἡ βαρύτης, ἀδέ τις ἄλλη τῶν ἡμῖν γνωσῶν ἰδιοτήτων τῦ σώματος· πᾶσαι γὰρ αὗται αἱ ἰδιότητες ὑποτιθέασι πρῶτόν τι ὑποκείμενον, ἀφ' ἓ ἀπονάσσι, ϗ εἰς ἓ τὴν ἰδέαν ϗ κατανόησιν ἥκισα ἡμᾶς αὗται ὁδηγῦσι. διαφέυγει γὰρ ἡμᾶς ὁ ἔχατος τῶν πραγμάτων λόγος, ὃς μόνῳ τῷ ὑπερτάτῳ νοῒ τυγχάνει καταληπτός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ ὑπάρξεως σωμάτων.

39. Τὸ ζήτημα, εἰ εἰσὶ σώματα, εἴτ' ἓν ὕλη, μέχρις ἀηδίας ἀνακινηθὲν, παραφροσύνη τις ἂν εἴη ἀναμφιλέκτως τῷ ἀνθρωπίνῳ πνεύματος· ἀλλὰ μηδεὶς ταραττέσθω, διενθυμούμενος τὰ πολυάριθμα διαπτώματα, εἰς ἃ ὑπὸ τῶν αἰσθήσεων δειλαίως ἐκτραχηλιζόμεθα.

Εἰλήφθω γὰρ εἰς ὑπόδειγμα τὸ τῆς ὁράσεως, ἢ ἐξαπατᾷ ἐπὶ τῆς τῶν σωμάτων ὑπάρξεως. Ἐν τοῖς κατόπτροις ἐμαυτὸν ὁρῶ πραγματικῶς, ἔνθ' οὐδὲν τοιοῦτον ὑπάρχει· διὰ κατόπτρων, ὡς ὀψόμεθα, παλλαπλᾶ φαίνονται τὰ ἓν μόνον ὑπάρχοντα· κατὰ δὲ τὸ μέγεθος, μυριαχῶς ποικίλλει τὰ ὄντα ἡ ὅρασις, κατὰ τὰ διάφορα, ἀφ' ὧν ὁρῶνται, ἀποσήματα· τό, τε σχῆμα ὡσαύτως ποικίλλει· ἐν τῷ κέντρῳ γὰρ κύκλου ἱσάμενος, τοῦτ' αὐτὸ κύκλον τὸν κύκλον ὁρῶ· ἐκεῖθεν δ' ἀποσὰς ἢ πρὸς τὴν περιφέρειαν πλησιάζων, ἔλλειψιν δοκῶ ὁρᾶν· τὴν δὲ θέσιν, διὰ τὴν θραῦσιν, τὰ ταπεινότερα καθορῶμεν ὑψηλότερα· τὴν δὲ κίνησιν, περιπατῶν πάντα κινούμενα ὁρῶ, καίτοι καθημενῶντα· ἄνθρωπος παραλλήλως ἐμοὶ συμπεριπατῶν ἠρεμεῖν μοι δοκεῖ κτ. κτ.· ὡς τρανώτερον ὀψόμεθα ἐν τοῖς ἑφεξῆς, τὰ περὶ τῶν τοῦ φωτὸς ἰδιοτήτων ἐκτιθέντες.

40. Ταύταις ταῖς ἀπάταις κινηθέντες τῶν φιλοσόφων τινὲς, οἷος ὁ Μαλεμβράγχιος, ἀπίστους μάρτυρας τῆς τῶν σωμάτων ὑπάρξεως τὰς αἰσθήσεις ἡγήσαντο· ἕτεροι δὲ τὴν τῶν σωμάτων ὕπαρξιν ἀμέσως ἐκ τῆς τοῦ Θεοῦ ἀληθείας ἀποδειχθῆναι μὴ ἔχειν διϊσχυρίσθησαν, ὅτω

συλλογιζόμενοι· ἴδωμεν γὰρ ἐπ' ἀδυνάτου, τὸν Θεὸν ἡμᾶς ἀπατῆσαι βέλεσθαι· ἐδύνατο ἓν ἡμῖν παρισᾷν σώματα, καίτοι μηδόλως ὑπάρχοντα, ἢ παρὰ τῶν μηδὲ τὴν ἀρχὴν ὑπαρχόντων ἡμᾶς πάσχειν, ἃ πάσχομεν· ἠδύνατο φέρε ποιῆσαί με δοκεῖν πίνειν τοῦτο τὸ ὑγρὸν, ἢ τῆς δε ἀπογεύεσθαι τῆς ποιότητος αὐτοῦ, ὃ τὴν ἀρχὴν ἐχ ὑπῆρξεν· ἄρα κτ.

41. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ τῶν αἰσθήσεων μαρτυρία ἐμπεδοῖ τὴν τῶν σωμάτων ὕπαρξιν.

ΔΕΙΞΙΣ. Καθ' ἑκάστην ἡμέραν καὶ ὥραν συναισθάνομαι ἐμαυτῷ πεινῶντι, διψῶντι, γευομένῳ, ἁπτομένῳ, ἡδομένῳ, ἀλγοῦντι· ἐξ ὧν ἁπάντων ἑκὼν ἀέκων κρίνω, ὡς ἔστι τι σῶμα, ἀφ' οὗ ἡ ψυχὴ ὅτω διατίθεται· ὡσαύτως ἀείποτε βλέπω, ἀκούω, ἅπτεσθαι δοκῶ κτ.· καὶ ταῦτα τὰ αἰσθήματα ἑκὼν ἀέκων ἐγγίνεσθαί μοι πιστεύω ἐκ τοῦ ἐμοῦ σώματος, τοῦ ἡλίου, τῆς σελήνης, ἢ ἑτέρων διαφόρων σωμάτων οὐρανίων ἢ γηΐνων, ὡς πραγματικῶς ὑπαρχόντων· ἐκ τούτων ἓν συναγαγεῖν ἀναγκάζομαι, ὅτι ὑπάρχουσι σώματα. Ο. Ε. Δ.

42. Ἵνα δὲ μήτις ἡμῖν ἐκ τῶν αἰσθήσεων, ἃ πολλάκις συμβαίνει, ἀπάτη προσγένηται, τῷ λόγῳ χρησέον· εἰδότες γὰρ ὡς τὰ αὐτὰ μεγέθη τοσούτῳ ἐλάττονα φαίνεται, ὅσῳ μᾶλλον ἡμῶν ἀπέχει, τῶν ἥλιον ὁρώντες ἢ πύργον, τὸν μὲν ἐγγὺς ἡμῶν ἱσάμενον, τὸν δὲ μακρὰν ἀπέχοντα, ἀμφοτέρους δὲ ἴσους δοκοῦντας, κρινοῦμεν ἀσυγκρίτως τὸν ἥλιον ὑπερκείμενον τοῦ πύργου· οὕτως ἓν πείρᾳ χειραγωγούμενοι, ἢ μικρὸν διανοούμενοι, ῥᾷσα ἐκκλίνομεν τὰς ἀπὸ τῶν αἰσθήσεων ἀπάτας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ διαιρέσεως τῆς ὕλης.

43. Διὰ πολλῶν γεωμετρικῶν θεωρημάτων τὸ διάσημα, ἢ ὁ τόπος, ἐπ' ἄπειρον διαιρετὸν δέδεικται· ἀ. δέδεικται γὰρ τὸ γωνιῶδες διάσημα, τὸ μεταξὺ τῆς ἁπτομένης καὶ τῆς κυκλικῆς περιφερείας ἐναπολαμβανόμενον, διαιρεθῆναι ἐπ' ἄπειρον δύνασθαι διὰ κυκλικῶν περιφερειῶν ἀεὶ μειζόνων, διηκοσῶν διὰ τέτου τοῦ διαζήματος (Γεωμ. 155.) β'. αἵ τε τῆς ὑπερβολῆς καὶ πολλῶν ἄλλων καμπύλων ἀσύμπτωτοι ἀεὶ μᾶλλον ἔγγιον γίνονται τῆς καμπύλης ἐπ' ἄπειρον, ἐδέποτε δὲ αὐτῇ συμπίπτουσι· ἐκεῖν τὸ περασμένον διάσημα, τὸ μεταξὺ τῆς ἀσυμπτώτου καὶ τῆς καμπύλης ἐπ' ἄπειρόν ἐστι διαιρέσιμον.

44. Ἰδὲ δὴ καὶ ἀπόδειξις Γεωμετρικὴ ἁπλῆ καὶ ἔυληπτος εἰς ἐμπέδωσιν τοῦ λεγομένου.

Ἔστωσαν εὐθεῖαι δύω παράλληλοι, ὅσον ποδὸς τυχὸν πλάτος τὸ **AK = BΔ** (κ. 84) ἀλλήλων ἀφεστάμεναι, αἱ **AB, KΔ**· φημὶ δὴ, ὅτι τὸ κυκλικὸν τεταρτημόριον **AΨ**, ὃ μετρεῖ τὴν ὀρθὴν γωνίαν **K**, καί τοι πεπερασμένον, εἰς ἄπειρον μέντοι διαιρεθῆναι δύναται· ἀεὶ γὰρ μεταξὺ τῶν διαγωνίων **KE, KZ, KB** καὶ τῆς βάσεως **KΔ** τῶν ἐξῆς κειμένων παραλληλογράμμων **AE, Θν**, κτλ. καταλειφθήσεταί τι μέρος ἀεὶ ἔλαττον τοῦ τόξου **AΨ**· ἔστω ἔσαι **OΨ<ΘΨ**, καὶ **τΨ<OΨ** κτλ. ἀλλὰ προήχθωσαν ἐπ' ἄπειρον αἱ δύω παράλληλοι **AB, KΔ**, καὶ ἤχθω νέα διαγώνιος ἡ **KB**· λειφθήσεται ἣν ὕπερθεν ἄλλο τόξον **τΨ** ἔλαττον ἀεὶ τοῦ προτέρου· τὸ δὲ **τΨ** ἐδέποτε = ο γενέσθαι δύναται, πρὶν

τὴν ΚΒ διαγώνιον συμπεσεῖν τῇ ΚΔ· ἀλλὰ διὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΚΔ, ἀεὶ τὸ πέρας Β τῆς ἐφάτως ἂν ἀχθείσης διαγωνίᾳ ΚΔ ἀπεχωρισμένον ἔσαι τῆς ΚΔ παραλλήλᾳ τῷ ποδιαίῳ διαστήματι ΒΔ· ἄρα ἀεὶ τὸ λειπόμενον τόξον τΨ, τὸ διατεμνόμενον ὑπὸ τῆς ἐφάτως ἂν ἀχθείσης διαγωνίᾳ, ἀεὶ ἔσαι διαιρετὸν ἐπ' ἄπειρον· ἐντεῦθεν ἄρα τὸ πεπερασμένον τόξον ΑΨ ἐπ' ἄπειρον τμηθήσεται.

45. Οὐκοῦν καὶ τὴν ἐπ' ἄπειρον τοῦ πεπερασμένου διαστήματος διαίρεσιν, ὡς ἔντι τῶν ἀκριβῶς δεδειγμένων τῆς Μαθηματικῆς θεωρημάτων ἐνδεξόμεθα· ἔδοξαν δὲ οἱ τὴν ὕλην τοῦ διαστήματος διαιρίνειν μὴ ἀξιοῦντες, οἷον οἱ περὶ Καρτέσιον καὶ Λεϊβνίτιον, ἐπιλύσαι τὸ ζήτημα τὸ περὶ τῆς ἐπ' ἄπειρον διαιρέσεως τῆς ὕλης.

46. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ ὕλη οὐκ ἔστιν ἐπ' ἄπειρον διαιρετή.

ΔΕΙΞΙΣ. Οὐ γὰρ, ὅτι τὸ διάστημα ἐπ' ἀπειρόν ἐστι διαιρετὸν, παρὰ τοῦτο καὶ ἡ ὕλη ἔσαι τοιαύτη· οὐ γὰρ αὕτη ἀπολύτως ἐμπίμπλησι τὸ διάστημα, ἀλλ' ἔχει καὶ μεταξὺ κενὰ διαστήματα, ἢ πόρους πολυαρίθμους, μεγέθους πεπερασμένου, ὡς αὐτίκα ἐκθήσόμεθα.

47. Ἔτι δοκεῖ τὸν θεὸν δύνασθαι δημιουργῆσαι ἄτομα κυρίως λεγόμενα, εἴτ' ἂν μέρη σωματικὰ, ἃ πραγματικῶς μὴ συγκείμενα ἐξ ἄλλων μερῶν εἶεν ἀπολύτως ἀδιαίρετα, ὡς αὐτίκα ὀψόμεθα· δοκεῖ δὲ πᾶσα ἡ ὕλη δύνασθαι ἐκ τῶν τοιούτων ἀτόμων πραγματικῶς συγκεῖσθαι· εἰ ἂν πολυπληθῆ μὲν, πεπερασμένα δὲ τὸν ἀριθμὸν, ἄτομα τοιάδε συνῆλθον εἰς κυβικῆ ποδὸς φέρε ὕλης σύστασιν, ἐξέσαι ταύτην ὡς πεπερασμένην τε θεωρεῖν, καὶ μὴ ἐς ἄπειρον διαιρετήν.

Ἐντεῦθεν ἦν δῆλον ὡς πασῶν τῶν γεωμετρικῶν δείξεων μόνῳ τῷ διαςήματι ἐφαρμόζεσθαι δυναμένων, ἐχὶ δὲ καὶ τῇ ὕλῃ, ἐκ τῆς Γεωμετρίας ἃ δυνάμεθα ἀποφήνασθαι τὴν ὕλην διαιρετὴν ἐπ' ἄπειρον.

48. Ἀλλὰ γὰρ, ὥσπερ ἃ δυνατὸν ἄλλως ἐναργῶς ἐννοῆσαι τὸν ἀριθμὸν, εἰ μήτις συμπλήρωμά τι αὐτὸν ἰδεῖτο μονάδων, ὧν ἑκάςη καὶ ἔςιν ἀριθμὸς τὸ προκειμένου εἶδος· τὸν ἀριθμὸν φέρε τὸ ςρατὸν, ὅς ἐςι συμπλήρωμα ςρατιωτῶν, ὧν ἕκαςος καὶ ἔςι ςρατός· ὕτως καὶ ὕλην ἐναργῶς ἐννοῆσαι δύναταί τις ἄλλως, ἢ παριςῶν αὐτὴν ἑαυτῷ ὡς συμπλήρωμάτι μερῶν, ὧν ἕκαςον, μετὰ διαιρέσεις μονονὲχ ἀπείρους, καὶ ἂν λέγοιτο ὕλη.

49. Ἡ μέντοι πεῖρα ὐδὲν ἡμῖν περὶ τύτου δείκνυσι· δύνανται μὲν γὰρ ἥτε φύσις καὶ ἡ τέχνη τὴν διαίρεσιν τῆς ὕλης ἐπ' ἐξαίσιόν τινα βαθμὸν προαγαγεῖν, ὡς ὀψόμεθα· ἀλλ' ἵνα ταύτην τὴν διαίρεσιν παραςήσωμεν, ἃ χρὴ τὴν ὕλην ὑποθέσθαι ἐξ ἀπείρων συγκροτυμένην μερῶν· ἀπόχρη δ' αὐτῇ ἀριθμὸν ἀπονεῖμαι, μέγαν μὲν, εἰς ὅσον ἄντις καὶ βέλοιτο, πεπερασμένον μέντοι καὶ ὡρισμένον. Ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων συνάγεται τὰ ἑφεξῆς.

50. Εἰ μὲν τὰ σώματα μὴ ἐκ μονάδων σύγκειται, ὡς ὑπέλαβε Λεϊβνίτιος, ἀτόμων καὶ ἀδιαιρέτων, τὸ ζήτημα λύεται· ἔςι γὰρ ἐπιεικῶς ἡ ὕλη ἐπ' ἄπειρον διαιρετή· ἐπεὶ γὰρ τηνικαῦτα ἕκαςον μέρος τῆς ὕλης μετὰ πολλὰς διαιρέσεις ἐμπεριέχει ἔτι μέρη ἄπειρα, ὧν ἕκαςον μέρη αὖ ἄπειρα, καὶ ἐξῆς ὕτως ἐπ' ἄπειρον, σαφὲς, ὡς ὐδέποτε πάντα τὰ μέρη τῶν δυνατῶν διαιρέσεων ἀπαντληθῆναι δύναται.

51. Εἰ δὲ τἐναντίον εἰσὶν ἄτομα, ἀδιαίρετα μόρια, καὶ ὡρισμένος τύτων ἀριθμὸς συνίςηςι πόδα τυχὸν

κυβικὸν ὕλης πεπερασμένης, ἀδύνατον εἰπεῖν τὴν ὕλην ἐπ' ἄπειρον διαιρεῖσθαι· ἀλλὰ ἔτε αἱ Γεωμετρικαὶ δείξεις, ἔτε ἡ Μεταφυσικὴ, ἔτε ἡ πεῖρα, δύνανταί τι ἀποδεικτικῶς εἰπεῖν περὶ τῆς τῶν ἀτόμων ὑπάρξεως· ἄρα συναγαγεῖν δύναμαι, ὡς καίτοι ἡ ἐπ' ἄπειρον τῦ διαστήματος διαίρεσις καλῶς δείκνυται ἔχουσα δυνατῶς, ὁ μέντοι ἐκ τύτυ τὸ αὐτὸ ῥηθήσεται καὶ περὶ τῆς ἐπ' ἄπειρον διαιρέσεως τῆς ὕλης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ τῆς ἐνεργείᾳ διαιρέσεως τῆς ὕλης.

52. Ἡ ὕλη διαιρεθῆναι δύναται, καὶ συχνάκις διαιρεῖται, εἰς μέρη, ὧν ὅ,τε ἀριθμὸς καὶ ἡ μικρότης πᾶσαν ὑπερβαίνει ἐπίνοιαν· ἰδὲ δὴ ὑποδείγματα.

53. α'. Ἐκ τῶν ὀδμῶν. Ἐυώδες τινὸς ὑγρῦ ἄγγος πλῆρες ἀνοίγεται ἐν μεγάλῳ οἰκήματι, καὶ ἀυτίκα ὀδμῆς πληρῦνται πάντα αὐτῦ τὰ μέρη· ἀλλ' ἡ ὀδμὴ αἰσθητὴ γίνεται, ὡς δῆλον ἔσαι, ἐκ τῶν τῆς ὕλης ἀποπεμπομένων μεριδίων, καὶ πανταχῦ τῦ ἀέρος διασκεδαζομένων· ἐπεὶ τοίνυν ἡ ὄσφρησις ἡμῶν διατίθεταί πως ὑπὸ τύτων τῶν μεριδίων, ὅπυ ἂν τῦ δωματίυ ςαθῶμεν· εἰκὸς ἅπαν τὸ δωμάτιον τῶν ὀσμωδῶν μεριδίων πληρῦσθαι, ἵν' ἑκαςαχῦ ἱκανὰ ὄντα κινήτωσι τὴν ὄσφρησιν· ὅθεν ἡ διάθεσις μεταδίδοται τῷ ἐγκεφάλῳ, καὶ ὕτως αἰσθητὴ γίνεται ἡ ὀσμή· συμβαίνει δὲ ἡ ἐξάτμισις αὕτη διὰ μακροτάτυ χρόνυ, ὥςε τὸ ἄγγος, εἰς πολλὰ μεταφερόμενον δωμάτια ἀλληλοδιαδόχως, κἀκείνων ἕκαςον ὀσμῆς ἀναπιμπλᾷν· ἀλλ' ἐκ ἆρα ὀδμηρὰ μερίδια ἐξιέναι ἀεννάως τῦ ὑγρῦ

ἀνάγκη, ὥσε πάντα τὰ δωμάτια ἐμπλησθῆναι· καὶ ἐπεὶ αὖ τὸ ὑγρὸν αἰσθητῶς ἐ μειῶται, τὴν αὐτῶν σμικρότητα θαυμασίαν ἔσαν ὑπερνικᾶν πᾶσαν ἐπίνοιαν;

Ἀλλ' ὁ μόχος ἐν τούτῳ ἐξαισιώτερόν τι ὑπόδειγμα δίδωσιν· εἰς γὰρ αὐτοῦ κόκκος εἴτ' ἔν. $\frac{1}{576}$ τῆς ἐγγίας ἐν δωματίῳ, ὅπου καινὸς ἀεὶ εἴσεισιν ἀὴρ, τεθεὶς, ἀεί ποτε ἐπὶ πολλῶν ἐνιαυτῶν ἐνεργητικωτάτης ὀσμῆς πλήρου τὸ περιέχον.

54. β'. Ἐκ τῶν χρωμάτων. Ἐὰν κόκκος μίλτου μεγάλῳ ἄγγει ὕδατος πλήρει ἐμβληθῇ, ἅπαν τὸ ὕδωρ ἐρυθρῷ ἄνθει χρωματισθήσεται· εἰς τοῦτο μέντοι ἀνάγκη ἅλις ὑποδιαιρεθῆναι, ἵνα πάντα τὰ μέρη τοῦ ὕδατος καταλάβῃ, ὥσε τὰς ἐκ πάντων τοῖς ὀφθαλμοῖς ἡμῶν προσπιπτούσας φωτιστικὰς ἀκτῖνας ἐρυθρᾶν παρισᾶν τὸ ὕδωρ· ἐὰν ἓν τὸ ἄγγος κυβικῷ ποδὶ ἢ ἴσον, ἑκάστου μεριδίου χρωματιστικοῦ ὑποτιθεμένου χρωννύειν ἓν κυβικὸν σίγμα ὕδατος, ὁ κόκκος τῆς μίλτου, εἴτ' ἔν $\frac{1}{576}$ ἐγγίας μιᾶς, διαιρεθήσεται εἰς $5^{1}59780^{0}352^{2}$ μερίδια (Ἀριθμ. 156).

55. Θαυμάσαι δ' ἄντις καὶ τοῦ φωτὸς τὴν ἐξαίσιον μικρότητα· ὡς γὰρ μαθησόμεθα ἐν τῇ ὀπτικῇ, ἰδεῖν καθαρῶς ἐδυνάμεθα, εἰμὴ πλεῖσα φωτοφυῆ μόρια κώνους οἷον διπλοῦς τοσούτους συσήσονται, ὅσα εἰσὶ τὰ τοῦ ὁρατοῦ ὑποκειμένου μέρη· ὅτοι δὲ ἀσυγχύτως τῇ τοῦ ὀφθαλμοῦ κόρῃ συμπεσόντες τὰ ὁρατὰ σημεῖα διακριδὸν τῷ ἀμφιβληστροειδεῖ χιτῶνι ἐγχαράξουσιν· οἱ δὲ κῶνοι ὅτοι καὶ εἰς τὴν κόρην τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ ἐλαχίστου τῶν ζώων εἰσέρχονται, καὶ διακριδὸν τῷ ἐν αὐτῷ ἀμφιβληστροειδεῖ χιτῶνι τὰ ὁρατὰ μέρη ἐντυποῦσι.

56. Ὀψόμεθα δὲ ἐν τοῖς ἑφεξῆς, ὡς τὸ φῶς τοσαύτην ἔχει ταχυτῆτα, ὥσε διατρέχειν τέσσαρα μιλλιόνια

λευγῶν ἐν ἑνὶ λεπτῷ· ἀλλὰ σφαῖρα κανονίϑ τῶν 24 πεπληρωμένϑ ἐννέα λιτρῶν κόνεως, διατρέχει ἐν τῷ ἀέρι ὀργιὰς 3780, εἶτ' ἓν λέυγας περίπϑ $1\frac{1}{2}$ ἐν ἑνὶ λεπτῷ, ἡ ἄρα ταχυτὴς τϑ φωτὸς ἔϛι περίπϑ 2000000 μείζων τῆς ταχυτῆτος τῆς ἐκ κανονίϑ προϊϋσης σφαίρας· ὑποτιθεμένοις δὲ μόριον φωτοφυὲς = $\frac{1}{2000000}$ τῆς ὕλης τῆς σφαίρας, εὑρεθήσεται ἓν τϑτων τὴν αὐτὴν ἰσχὺν ἔχον, ὡς δειχθήσεται, ἣν ἡ σφαῖρα τϑ κανονίϑ τῶν 24· τϑτέϛι τὰ φωτοφυῆ μερίδια ὑποτιθέμενα ἕκαϛον = $\frac{1}{2000000}$ ἠδύναντο φονεῦσαι πάντα τὰ ζῶα, καὶ πάντα τὰ φυτὰ συνθλάσαι· ὅϛης ἓν μικρότητος ὑπάρχϑσιν, ὥϛε ἔτω ταχέως φερόμενα, αἰσθητῶς ὅϛον πλήττϑσι τὰ λεπτὰ νημάτια τϑ ὀφθαλμϑ, μηδ' ἡντιναοῦν αὐτοῖς παρεμποιοῦντα ἐνόχλησιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ ἀπολύτϑ καὶ σχετικοῦ τῶν σωμάτων μεγέθϑς.

57. Α'πόλυτον μὲν μέγεθος τϑ σώματος καλεῖται, ὃ ἔχει αὐτὸ ἐν ἑαυτῷ· σχετικὸν δὲ, ὅταν πρὸς μέγεθος ἄλλϑ σώματος παραβάλληται· γνωσθήσεται δὲ μᾶλλον ἐκ τῶν ἑφεξῆς τὸ λεγόμενον.

58. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ι'δέαν μεγέθϑς τῶν σωμάτων ἀπολύτϑ οὐκ ἔχομεν.

ΔΕΙΞΙΣ. α'. Τὴν γὰρ ἰδέαν τοῦ τῶν σωμάτων μεγέθϑς διὰ τῆς ὁράσεως προσκτώμεθα· ἀλλ' αὕτη οὐκ ἀεὶ ἡ αὐτὴ παρίσταται· ἀπέχοντι γὰρ χιλίας ὀργιὰς οἰκοδο-

μήματός τινος, ὅσον ἄντις αὐτῷ προσεγγίζῃ, τοσούτῳ ἀεὶ μεῖζον ὀφθήσεται· ἔσι δὲ ἀεὶ τὸ αὐτὸ τὸ τοῦ οἰκοδομήματος ἀπόλυτον μέγεθος, ὡς δῆλον· ἄρα πᾶσαι αἱ ἐκ διαδοχῆς παρισάμεναι ἰδέαι τοῦ οἰκοδομήματος τὸ ἀπόλυτον αὐτοῦ μέγεθος ἐκ εἰκονίζουσι.

Πρὸς αὐτῷ δὲ γενομένοις τῷ οἰκοδομήματι, ᾧ τηλεσκοπίῳ χρησαμένοις, δι' οὗ μεγεθύνεται τὰ ὁρατὰ κατὰ λόγον 1 : 10, δέκατον μέρος τοῦ οἰκοδομήματος ἴσον δόξει αὐτῷ τῷ ὅλῳ οἰκοδομήματι.

Ἐν γένει δὲ, τὰ διὰ τῆς ὄψεως ὁρώμενα μεγέθη, ἀεὶ ἀνάλογα φαίνεται, ὡς δειχθήσεται, τῷ ὅλῳ χωρίῳ τοῦ ἀμφιβληστροειδοῦς χιτῶνος, πληγέντι ὑπὸ πάντων τῶν φωτοφυῶν κώνων, τῶν ἐκ διαφόρων ὁρατῶν σημείων τοῦ ὑποκειμένου προσβαλλόντων· ἀλλὰ τοῦτο τὸ χωρίον αἰσθητὸν ἀπείρως ποικίλλεται, κατὰ τὰ διάφορα ἀποσήματα, ἀφ' ὧν ὁρᾶται τὸ ὁρατὸν, ὥσπερ ψιλοῖς τε ὀφθαλμοῖς τούτου ἀποπειρωμένοις, ἢ τηλεσκοπίῳ μεγεθύνοντι, ἢ σμικρύνοντι τὰ ὁρατὰ, κατάδηλον γίνεται· δυνάμεθα ἄρα ἰδεῖν τὸ αὐτὸ σῶμα ἐν ἀπείρως ποικιλλομένοις μεγέθεσι, τοῦ ἀπολύτου μεγέθους ἀμεταποιήτου ὄντος· ἐντεῦθεν δῆλον ὡς ἰδέαν ἀπόλυτον τῶν κατὰ τὰ σώματα μεγεθῶν ἐκ ἔχομεν.

59. β'. Σκνίψ σκνίπα καθορῶν ἰδέαν ἔχει, οἵαν ἄνθρωπος, καθορῶν ἄλλον ἄνθρωπον· ἄνθρωπον ἓν ἰδὼν ὁ σκνίψ ἰδέαν τοῦ κατ' αὐτὸν μεγέθους εἰκονίσει 1000000000000 μείζω, ἢ ἄνθρωπος καθορῶν ἄνθρωπον· ζωΰφιον δ' ἄλλο ὑποχιλιαπλάσιον τοῦ σκνιπὸς κατόψεται τὸν ἄνθρωπον ἔτι μείζω, ἢ ἄνθρωπος ἄνθρωπον καθορᾷ, 1000000000000000· τὸ αὐτὸ ἄρα μέγεθος τοῦ ἀνθρώπου, καὶ τοῦ αὐτοῦ διασήματος, ψιλοῖς τοῖς ὀφθαλμοῖς ἐν τρισὶ διαφόροις εἰκονίζεται ἰδέαις· τίς ἓν αὐτῶν παρισᾷ τὸ ἀληθές; ἕκαστον

τῶν τριῶν ζώων, ἄνθρωπος, σκνίψ, ᾗ τὸ ἄλλο ζωΐφιον, ὃ καθορᾷ μέγεθος, ἀληθὲς οἴεται· ἐδὲν ἄρα τέτων τὸ ἀπόλυτον μέγεθος καθορᾷ. Ο. Ε. Δ.

60. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ χετικὸν μόνον τῶν σωμάτων μέγεθος γινώσκομεν.

α΄. Τῦ αὐτῦ σώματος τὸ μέγεθος, ἐκ διαφόρων ἀποσημάτων καθορωμένυ, ἐν ἀντισρόφῳ λόγῳ ἐσὶ τέτων τῶν ἀποσημάτων, εἴτ' ἓν ἐκ διπλῦ ἀποσήματος, ἥμισυ· ἐκ τριπλῦ, ὑποτριπλάσιον κτ.· τὸ φαινόμενον ἄρα μέγεθος ἐν ἀντισρόφῳ ἐσὶ λόγῳ τῶν ἀποσημάτων.

β΄. Ἐκ τῦ αὐτῦ ἀποσήματος τὰ μείζω τῶν μεγεθῶν μείζω, τάδ' ἐλάττω ἐλάττω καθορᾶται.

γ΄. Τηλεσκοπίῳ χρησάμενος ἐκ τῦ δοθέντος ἀποσήματος ὑποκείμενόν τι ὄψομαι μεῖζον, ἢ ὅσον ἂν εἶδον αὐτόθεν τὸ αὐτὸ ὀφθαλμοῖς γυμνοῖς· διπλασιαζομένυ δὲ τῦ διασήματος, ᾗ τηλεσκοπίῳ, ᾗ ὀφθαλμοῖς ψιλοῖς, ὑποδιπλάσιον φανήσεται τὸ μέγεθος.

Ὡσαύτως ὁ σκνὶψ, καίτοι μῆκος ποδιαῖον καθορᾷ τυχὸν ἐν λόγῳ 1000000000000 : 1 τῦ, ὃ καθορᾷ ἄνθρωπος, δύω μέντοι ποδῶν μέγεθος θεάσεται διπλῦν, εἴτ' ἓν ἐκεῖνο ὁρῶν ὡς 1000000000000, τὰ δύω ἅμα ὄψεται ὡς 2000000000000.

61. Ἐν γένει ἄρα τὰ ζῶα ἰδέαν μόνυ τῦ χετικῦ μεγέθυς ἔχει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ τῦ τῶν σωμάτων πορώδες.

62. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὅ"σα γινώσκομεν σώματα, πάντα εἰσὶ πορώδη.

ΔΕΙΞΙΣ. Ε'πείπερ, ὡς αὐτίκα φανήσεται, τὰ μόρια σώματός τινος μόρια ἄλλυ διαχωρεῖν ἐδύναντο, εἴτ' ἔν αὐτοῖς ἐνυπάρχειν· σῶμα διὰ σώματος ἐμὴ διελεύσεται, εἰμὴ θάτερον διασημάτιων κενῶν, εἴτ' ἔν πόρων ἐν ἑαυτῷ εὐμοιρίη· ἀλλὰ μὴν ἐδέν ἐσιν, ὧν γινώσκομεν σωμάτων, ἕ τὰ μόρια μὴ διΐασι μόρια ἄλλυ σώματος· πάνθ', ὅσα ἄρα γινώσκομεν σώματα, εἰσὶ πορώδη· ταῦτα δὲ ἐν διαφόροις ὑποδείγμασιν ἀναπτύξομεν.

α'. Διὰ τῦ ὕδατος δίεισι τὸ φῶς, τὸ πῦρ, πολλὰ μόρια τῦ ἀέρος, ϗ πολλὰ σωματων ϛερεῶν· τὸν ἀέρα διήκει τὸ φῶς, ἀτμοίτε ϗ ἀναθυμιάσεις τῆς γῆς παντοῖαι· τὸ πῦρ, ἡ φλὸξ φέρ' εἰπεῖν, ἔϛι διαφανές· δίεισιν ἄρα δι' αὐτῦ τὸ φῶς· παρὰ ταῦτα ὁ ἀὴρ ϗ τὸ πῦρ εἰσὶν ἐλασικώτατα· τὸ δὲ ἐλασικὰ εἶναι, ὡς ὀψόμεθα, προϋποτίθησι τὸ εἶναι πορώδη· τὴν γῆν διατρέχει τὸ ὕδωρ τὸ ὑπ' αὐτῆς ἀποῤῥοφώμενον, τὸ πῦρ, ὃ θερμαίνει τε ϗ ἀναφλέγει αὐτήν· ἔτως ἄρα τὰ τέσσαρα ϛοιχεῖα εἰσὶ πορώδη.

Τὰ ζωϊκὰ σώματα εἰσὶ πορώδη· δέχονται γὰρ ἐν ἑαυτοῖς μόρια ὑδατώδη, πυρώδη, ἀερώδη· ἄλλα δ' ἐλευθέρως ἐντεῦθεν ἔξεισι διά τε τῆς διαπνοῆς ϗ τῦ ἱδρῶτος. Ταὐτὸ ῥητέον ϗ περὶ τῶν φυτῶν· ϗ ταῦτα γὰρ ἐκ τῶν ἐκτὸς προσλαμβάνει ὕδωρ, ἀέρα, μόρια θρεπτικὰ,

ἃ ἔνδον κυκλοφορεῖ, ϗ διὰ τῆς διαπνοῆς αὖθις ἐξατμίζεται· ἀλλὰ καὶ τὸ πῦρ αὐτὰ ῥᾳδίως δίεισιν, ὡς ὕλας καυσάς.

Τὰ μέταλλα δίεισι τὸ πῦρ, ᾧ θερμαίνεταί τε ϗ τήκεται· ϗ ἔτι τὰ ἰσχυρὰ ϗ διαλυτικὰ ὕδατα.

Πάντα τὰ ὀρυκτὰ, ὡς λίθοι, μάρμαροι κτ. δίοδον παρέχουσι τῷ πυρὶ, ᾧ θερμαίνεται, ϗ ἀποτιτανοῦται πολλάκις, ἔτι δὲ ϗ τοῖς χρωματισικοῖς μορίοις· ϗ γὰρ ϗ χρωματίζονται κτ.

63. Εἰ ἓν τὰ βαρύτερα πάντων τῶν ἡμῖν γνωρίμων σωμάτων πόρων εὐμοιρεῖ, πάντα ἔχειν πόρους ῥᾳδίως συνάγεται· ἐπεὶ γὰρ ϗ τοῖς πόροις, τῇ δὲ ὕλῃ τὸ βάρος παρέπεται, τό,τε βάρος, ὡς ὀψόμεθα, ἀνάλογόν ἐσιν, ϗ τοῖς πόροις, ἀλλὰ τῇ ὕλῃ, ἐπάναγκες ἄρα τῶν ἰσοπαχῶν σωμάτων τὸ βαρύτερον ἐλάττους ἔχειν πόρους· ἀλλὰ τὸ πάντων βαρύτατόν ἐσιν ὁ χρυσὸς, ὃς ὅτι πορώδης ἐσὶ, καταφωρᾷ τὸ τῆκον αὐτὸν πῦρ· ἄρα ἐν γένει πάντα τὰ γνωσὰ ἡμῖν σώματα εἰσὶ πορώδη. Ο. Ε. Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ε'κ τοῦ πορώδους χεδὸν πᾶσαι ἐκπηγάζουσι τῶν σωμάτων αἱ ἰδιότητες, καθ' ἃς ἡμῖν χρήσιμα γίνεται· εἰ γὰρ τούτων ἡμοίρουν, οὐδ' ἐλατὰ ἂν εἶεν, οὐδὲ θραυσὰ, οὐδ' ἐλασικὰ, οὐδ' ἠλεκτρικά· εἰ τὰ φυτὰ πόρους οὐκ εἶχεν, οὐδ' ἤυξανον, οὐδὲ προῆγε καρπὸν οὐδένα· τοῦ δ' ἀέρος ἀπόρου ὄντος, οὐδὲ τὸ φῶς διϊὸν εἰς ἡμᾶς ἂν ἐξικνεῖτο, οὐδ' ὑετὸς ὁ ἀναγκαιότατος ἡμῖν κατέπιπτε.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Τὸ τῶν πόρων χῆμα διάφορόν ἐσιν ἐν σώμασιν ἑτεροειδέσι· τὸ γὰρ σῶμα συναποτελεῖται ἐκ πλειόνων μορίων ὁμογενῶν παρ' ἄλληλα κειμένων· ἀλλὰ τὰ μόρια διαφέρουσιν ἐν διαφόροις εἴδεσι σωμάτων

τό, τε σχῆμα καὶ τὸ μέγεθος· τὸ ἄρα κενὸν διασημάτιον, ὃ διακρίνει ἀλλήλων ταῦτα τὰ μόρια, ποικίλον ἔσεται τό, τε σχῆμα καὶ τὸ μέγεθος, κατὰ τὸ διάφορον σχῆμα καὶ τὸ μέγεθος τέτων τῶν μορίων.

ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'. Τῶν ἰσοπαχῶν σωμάτων τὸ κυφότερον πλείως περιέχει πόρως, ἢ γᾶν μείζονας, τῶν κατὰ τὸ βαρύτερον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τῆς τῶν σωμάτων ἀδιαχωρήτε.

64. Καταχρησικῶς σῶμα διὰ σώματος διήκειν λέγεται, ἡνίκα θατέρε τὰ μέρη εἴσισι τὰ θατέρε· καὶ κατὰ τῦτον τὸν λόγον, ἐπεὶ πάντα τὰ σώματα εἰσὶ πορώδη, ἔσονται καὶ διαχωρητά.

65. Κυρίως δὲ διαχωρεῖν σῶμα ἕτερον σῶμα, ἐνυπάρχειν ἐσὶ πραγματικῶς θατέρε τὰ μέρη τοῖς θατέρε.

66. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὰ σώματα εἰσὶν ἀδιαχώρητα.

ΔΕΙΞΙΣ. Εἰ ἀν σφαῖρα ἡ Α (χ. 85) ἑτέρᾳ τῇ Β προσβάλῃ, ἡ Β τῇ Α ἀντισήσεται· ἵνα δὲ ἡ Α ἐπὶ τὰ ἐφεξῆς κινηθῇ ἀνάγκη διαφθεῖραι τὴν τῆς Β ἀντίσασιν, καὶ ἀποκρῦσαι αὐτὴν εἰς τὰ ἔμπροσθεν· ἀλλ' ἐν τοῖς σώμασιν ἐδεμία μεταβολὴ ἀνάγκης ἄτερ γίνεται· εἰ ἄρα ἡ Α κινεῖσθαι συνεχῶς ἠδύνατο, μὴ ἐκτοπίζσα τὴν Β, μηδ' ἀποβάλλσά τι τῆς καθ' ἑαυτὴν κινήσεως, ὃ τῇ Β μεταδίδωσιν, εἶτ' ὢν εἰ εἶχε διαπεράσαι τὴν Β, ἀναγκαίως ἂν τῦτ' ἐποίει· δείκνυται ἄρα ἐντεῦθεν ἡ Β ἀδιαχώρητος ὑπὸ τῆς Α.

Εἰ γένει δὲ, ὁπόση ἄντις ἰσχύϊ συνβλίψειε τὸν ἀέ-

ρα, τὸ ὕδωρ, ῥευσὸν ἅπαν, ἢ ᾗ σερεὸν, ἐλαττώσει μὲν δήπε τὸν ὄγκον ἐνίων τῶν εἰρημένων σωμάτων, συσφιγγομένων τῶν μεταξὺ πόρων, ἀεὶ δὲ τὰ μόρια τῦ συνθλιβομένε σώματος, ἀλλήλων ἐκτὸς κείμενα φανήσονται. Ο. Ε. Δ.

67. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ ἄρα τῶν σωμάτων ἀδιαχώρητον γενικός ἐσι νόμος τῆς φύσεως.

68. Εἰσὶν ἆρ' ἀπολύτως, εἴτ' ἓν καθ' ἑαυτὰ, ἀδιαχώρητα τὰ σώματα; ἔσιν ὅτως ἀδύνατον ἡ σώματος διὰ σώματος διαχώρησις, ὡς ὰ δυνατὸν τὰς ἐν παντὶ τριγώνῳ τρεῖς γωνίας μὴ ἐξισῶσθαι δυσὶν ὀρθαῖς; ἀλλ' ἀγνοῦντες τὴν φύσιν, εἴτ' ἓν τὸ πρῶτον τῦ σώματος ὑποκείμενον, ἐθ' ὡς δύναται, ἐθ' ὡς ἀδυνατεῖ, μετὰ λόγε εἰπεῖν δυνάμεθα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τῦ κενῦ.

69. Κενόν ἐσι τόπος, ἢ μέρος τόπε, σωμάτων ἄνευ· πλῆρες δὲ τἐναντίον, τόπος, ἓ πάντα τὰ μέρη ὕλης μορίων γέμεσι.

70. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Οὐδὲν ἐπὶ τῆς γῆϊνης σφαίρας διάσημα πεπερασμένον ἀπολύτως ἐσὶ πλῆρες· ἐπεὶ γὰρ πόροι ὑπάρχεσι πᾶσι τοῖς γῆϊνοις σώμασιν, ἔσονται ἐξ ἀνάγκης μέρη τῦ διασήματος, οἷς μηδὲν ἐνυπάρχει μέρος ὕλης, εἴτ' ἓν πάντες, ἓς τὸ σῶμα ἐμπεριέχει, οἱ πόροι.

71. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ε'ν γένει ἐπὶ τῶν γῆϊνων σωμάτων πλεῖόν ἐσι τὸ κενὸν, ἢ τὸ πλῆρες· ὁ γὰρ χρυ-

σὸς ἀναμφηρίςως ἔχει πόρυς (63), ϗ ἐκ ἔςι πλῆρες ἀκριβῶς· ἔςω δὲ καθ' ὑπόθεσιν πόρων ἄνευ ὁ χρυσὸς, ϗ ἐξητάσθω δι' αὐτῦ ἡ ἐν τοῖς ἄλλοις τῶν σωμάτων πασότης τῦ κενῦ· ἐπεὶ τοίνυν τῷ διασήματι ἐδέν ἐςι βάρος, (17), τὸ τῶν σωμάτων βάρος ἐκ ἂν γένοιτο ἐκ τῶν πόρων, ἀλλ' ἐκ μόνων τῶν ὑλικῶν μορίων· ἕτως ἓν αὐτό τε καθ' ἑαυτὸ φαίνεται εἶναι, ϗ ἡμῖν εἶτα δειχθήσεται, τὸ βάρος ἀνάλογον ἔχειν, ἐ τῇ ἐκτάσει τῦ σώματος, ἀλλὰ τῇ ὕλῃ, εἴτ' ἓν τῷ ἀριθμῷ τῶν ἐμπεριεχομένων ςερεῶν μορίων· ἀλλὰ κυβικῦ δακτύλυ χρυσῦ τὸ βάρος πρὸς τὸ κυβικῦ δακτύλυ ὕδατος λόγον ἔχει ὃν 19 : 1· ὁ ἀριθμὸς ἄρα τῶν πόρων τῦ ὕδατος, εἴτ' ἓν τῶν κενῶν μερῶν πρὸς τὰ πλήρη αὐτῦ τῦ ὕδατος λόγον ἔχει, ὃν 19 : 1.

Δακτύλυ κυβικῦ ἀέρος ἐν τῷ ὁρίζοντι τὸ βάρος ἔςι περίπυ $\frac{1}{950}$ κυβικῦ δακτύλυ ὕδατος, ϗ ἑπομένως $\frac{1}{950 \times 19}$

$= \frac{1}{1805}$ δακτύλυ κυβικῦ χρυσῦ· ἔςιν ἓν ἀέρος πρὸς τὴν γῆν ὄντος, ϗ ἔτι, εἰς ἰσχυροτέραν τῦ λεγομένυ ἐμπέδωσιν, τῦ ἐν τῇ ὑπερτάτῃ ἀτμοσφαίρᾳ, τὰ κενὰ πρὸς τὰ πλήρη :: 1805 : 1.

72. Περὶ δὲ τῆς γῆς, εἰλήφθω ἡ μᾶλλον συμπαγὴς, ἡ ἄργιλλος, ἧς τὸ βάρος διπλάσιον ϗχεδόν ἐςι τῦ τῦ ὕδατος· βάρος ἓν ἀργίλλυ ποδὸς κυβικῦ πρὸς τοσῦτο χρυσῦ λόγον ἔχει, ὃν 1 : 9· τὰ τῆς ἀργίλλυ ἄρα κενὰ πρὸς τὰ πλήρη αὐτῆς ἐςιν ὡς 9 : 1· τῆς δὲ πυρίτιδος, ἐπεὶ τὸ βάρος ἔςι πρὸς τὸ τῦ ὕδατος $2\frac{1}{2} : 1$, λόγον ἔξει πρὸς τὸ τῦ χρυσῦ ὡς ϗχεδὸν 8 : 1· τύτυ ὂν τὰ κενὰ πρὸς τὰ πλήρη εἰσὶν ὡς 8 : 1.

Δῆλον ἄρα, ὡς, τῦ χρυσῦ ὡς ὅρυ συγκρίσεως λαμβανομένυ, ϗ πόρων ἀμοίρυ τιθεμένυ, ἔν τε τῇ γῇ κἂν τῇ ἀτμοσφαίρᾳ ἀσυγκριτως πλείω εἰσὶ τὰ κενὰ ἢ τὰ πλήρη· ἔχει μέντοι ϗ ὁ χρυσὸς αὐτὸς κενὰ, ϗ ταῦτα τυχὸν πλείω, ἢ τὰ πλήρη· ἀλλ' αὐτῦ τῶν πόρων τὴν δύναμιν εὑρεῖν ὐ δυνάμεθα, πρὶν περιτύχωμεν σώματι πόρων ἀμοιρῦντι, οἵῳ ἐς δεῦρο ὐ περιετύχομεν, πρὸς ὃ ἂν παραβάλοιμεν τὸ τῦ χρυσῦ βάρος.

73. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Οἱ περὶ Καρτέσιον ϗ τὲς πόρυς ὑποτίθενται πλήρεις ὕλης, ἀπολύτως μέντοι ἀβαρῆς· τυθ' ὅπερ ἐν τοῖς ἐφεξῆς ἀπελεγχθήσεται ἄτοπον.

74. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ὅτι ἀδυνάτως ἔχει ἡ τῦ πλήρυς ὑπόθεσις, τὸ δὲ κενὸν πάντως ὑπάρχει, περὶ τῦ φυσικῦ συσήματος τῦ κόσμυ διαλαμβάνοντες, ἐν γένει ἐπὶ τῶν γηίνων ϗ ὐρανίων σωμάτων ἀκριβέσερον ἀποδείξομεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τῆς τῶν σωμάτων πυκνότητος.

75. Μάζα τῦ σώματός ἐσι τὸ ἄθροισμα τῶν σεμῶν μορίων, ἀφ' ὧν συντίθεται τὸ σῶμα, εἴτ' ἔν ἡ ὁλικὴ αὐτῦ ὕλη, ἀφαιρυμένων τῶν πόρων. Ὄγκος δὲ σώματος, τὸ πάχος τῦ σώματος, ἢ τὸ, ὃ ἐπέχει, διάσημα· ἐντεῦθεν ἄρα ά. παντὸς σώματος πόρων ἀμαιρῦντος ἡ μάζα ἰσῦται τῷ ὄγκῳ· β΄. πάντων τῶν ἡμῖν γνωρίμων σωμάτων ἡ μάζα ἐλάττων ἐσὶ τῦ ὄγκυ.

Πυκνότης καλεῖται, ὅτετι σῶμα πλείω ἢ ἐλάττω μάζαν ἐν δεδομένῳ ὄγκῳ περιέχει· ἕτω φέρε πῶς

κυβικὸς χρυσῦ ἐννεακαιδεκαπλάσια περιέχει μόρια, ἢ πῦς κυβικὸς ὕδατος· φασὶν ὖν, ὡς τῦ χρυσῦ ἡ πυκνότης πρὸς τὴν τῦ ὕδατος ἔσιν ὡς 19 : 1.

76. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ μάζα τῶν σωμάτων ἴση ἐσὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ ὄγκυ ϗ τῆς πυκνότητος.

ΔΕΙΞΙΣ. Εἰλήφθωσαν τέσσαρες δάκτυλοι χρυσῦ ϗ εἷς ὕδατος· φημὶ ὖν, ὅτι, κληθείσης τῆς τῦ ὕδατος μάζης 1, δυνατὸν ἐκλαβεῖν αὐτὴν ὡς γινόμενον ὑπὸ τῦ ὄγκυ, ϗ τῆς 1 πυκνότητος· ἡ δὲ τῦ χρυσῦ μάζα ἔσαι = 4 × 19 = 76· ἐπεὶ γὰρ δάκτυλος χρυσῦ περιέχει μάζαν ἐννεακαιδεκαπλάσιον, ἢ δάκτυλος ὕδατος, τέσσαρες χρυσῦ δάκτυλοι περιέξυσι 4 × 19· ἔτως ἡ μάζα τῦ δακτύλυ τῦ ὕδατος ἔσεται 1 × 1, ἡ δὲ τῶν τεσσάρων χρυσῦ, 4 × 19, εἴτ' ὖν ἴση τῷ γινομένῳ ἐκ τῦ ὄγκυ ϗ τῆς πυκνότητος.

Δῆλον δὲ ἐν γένει, ὅτι, ὅσῳ μείζων ὁ ὄγκος ἐν τῇ αὐτῇ πυκνότητι, ϗ ὅσῳ ἡ πυκνότης μείζων ἐν τῷ αὐτῷ ὄγκῳ, τοσύτῳ μείζων ἔσαι ἡ μάζα· ἄρα ἔσιν ἡ μάζα ἴση τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ ὄγκυ ϗ τῆς πυκνότητος. Ο. Ε. Δ.

77. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἄρα αἱ δύω, ἢ πλειόνων σωμάτων, μάζαι ἐν λόγῳ εἰσὶ συνθέτῳ ὑπό τε τῶν ὄγκων, ϗ τῶν πυκνοτήτων· εἰσὶ γὰρ γινόμενα ἐκ τῶν ὄγκων ϗ τῶν πυκνοτήτων· τὰ δὲ, ἐν λόγῳ εἰσὶ συνθέτῳ τῷ ἐκ τῶν παραγόντων (Συμβ. Λογ. 291.)

78. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Αἱ μάζαι δύω σωμάτων, ὧν οἵτε ὄγκοι ϗ αἱ πυκνότητες ἴσαι, ἢ ὧν οἱ ὄγκοι ἀντιστρόφως ἔχυσιν ὡς αἱ πυκνότητες, εἰσὶν ἴσαι (Συμβ. Λογ. 301, 303)· δύω γὰρ δάκτυλοι ἀπέφθυ χρυσῦ εἰσὶν ἴσοι δυσὶ δακτύλοις ἀπέφθυ χρυσῦ· ϗ 38 δάκτυλοι ὕδατος τὴν αὐτὴν μάζαν ἔχυσι δυσὶ δακτύλοις χρυσῦ.

79. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Σωμάτων, ὧν οἱ ὄγκοι ἴσοι, αἱ μάζαι εἰσὶν ὡς αἱ αὐτῶν πυκνότητες, ὧν δὲ ἴσαι αἱ πυκνότητες, αἱ μάζαι εἰσὶν ὡς οἱ ὄγκοι (Συμβ. Λογ. 306. Τόμ. Α΄.).

80. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Σωμάτων, ὧν αἱ μάζαι ἴσαι, οἱ ὄγκοι ἐν λόγῳ εἰσὶν ἀντιθέτῳ τῶν αὐτῶν πυκνοτήτων· αἱ δὲ πυκνότητες, ἐν ἀντιθέτῳ λόγῳ τῶν ὄγκων (Συμβ. Λογ. 259. Τόμ. Α΄.).

81. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ε'κ τῶν τριῶν τέτων, μαζῶν, ὄγκων, κ᾽ πυκνοτήτων, δύω δοθέντων, ῥᾴσα τὸ τρίτον εὑρεθήσεται· ἐὰν γὰρ ὦσι γνωσὰ ὁ ὄγκος κ᾽ ἡ πυκνότης, τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον δηλώσει τὴν μάζαν (76)· ἐὰν δὲ ἡ μάζα κ᾽ ὁ ὄγκος, τὸ τῷ πρώτῳ διὰ τῷ δευτέρῳ διαιρεθέντος πηλίκον ἐμφανεῖ τὴν πυκνότητα· τέλος δὲ γνωσῶν ὄντων τῆς μάζης κ᾽ τῆς πυκνότητος, τὸ ἐκείνης διαιρεθείσης διὰ ταύτης πηλίκον σημανεῖ τὸν ὄγκον (Α᾽ρ. 108).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Περὶ ἀδρανείας τῶν σωμάτων.

82. Α᾽δράνεια τῶν σωμάτων ἐσὶ καθαράτις ἀδυναμία, καθ᾽ ἣν τὰ σώμτα αὐτὰ ἑαυτὰ προσδιορίσαθαι ἔτως ἢ ἐκείνως ἔχειν ὐ δύναται, ἔτ᾽ ἂν ὐδεμίαν σφίσιν αὐτοῖς ἐμποιῆσαι μεταβολήν.

83. Μενεῖ ἄρα ὡς ἔχον ἐσὶν, ἔστ᾽ ἂν ἐξωτερική τις αἰτία ἐμποιήσῃ αὐτῷ τινα μεταβολήν· αὕτη ἐν ἡ ἰδιότης, καθ᾽ ἣν τὰ σώματα διατηρεῖ, ἧς ἔτυχε, τὴν κατάσασιν, καλεῖται ἀδράνεια.

84. Ἐκ ταύτης ἓν ἀνθίσαται τὰ σώματα τοῖς τὴν, ἣν ἔχουσι, κατάσασιν ἀποθέσθαι αὐτὰ βιαζομένοις· ἐχ' ὅτι ἐπενεργεῖ ταῖς ἐξωτερικαῖς αἰτίαις· πῶς γὰρ ἡ καθαρὰ ἀδυναμία, ἢ μᾶλλον πάθος, ἢ δύναμις; ἀλλ' ὅτι ἐκ τῆς αἰτίας τὸ ἀδρανὲς ἀποβάλλει ἢ ῥᾴθυμον οἱονεὶ ἀναλόγως τῇ προσβαλλούσῃ αἰτίᾳ.

85. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ ἀδράνεια ἔσιν ἰδιότης καθολικὴ πάντων τῶν σωμάτων.

ΔΕΙΞΙΣ. Πάντα γὰρ τὰ σώματα καθαρῶς ἡμῖν παρίσαται παθητὰ, εἴτ' ἓν ἑαυτοῖς ἐμποιῆσαι μεταβολήν τινα μὴ δυνάμενα· πάντα ἄρα διατηρεῖν τὴν ἑαυτῶν κατάσασιν σπεύδουσι· πάντατε ἀντισήσεται τοῖς ἀπὸ τῆς πρὶν αὐτὰ καταστάσεως μετακινῆσαι πειρωμένοις· πάντα ἄρα τῆς ἀδρανείας εὐμοιρεῖ. Ο. Ε. Δ.

86. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Οὐδέποτε τοῖς σώμασι μεταβολήτις συμβαίνει ἀναίτιος.

87. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐν τοῖς σώμασι τὸ ἀποτέλεσμα ἔσιν ἀνάλογον τῇ αἰτίᾳ· ἢ γὰρ, ἐπεὶ ἔτε τὸ σῶμα τὸ ἐνεργεῖν, ἔτε τὸ σῶμα τὸ δεχόμενον τὴν ἐνέργειαν, ἐ δύνανται ἑαυτοῖς προσδιορίσαθαι τὸν βαθμὸν τὲ ἀποτελέσματος, ἡ αἰτία ἀναγκαίως παράξει ἅπαν τὸ ἀποτέλεσμα· ἄρα τὸ ἀποτέλεσμα ἀνάλογον ἔσαι τῇ δυνάμει τῆς αἰτίας.

88. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἡ ἀντίσασις, ἢ ἀντενέργησις, ἔσιν ἴση τῇ ἐνεργείᾳ· ἐὰν γὰρ ἡ δύναμις τῆς αἰτίας τοσαύτη ᾖ, ὅση παράγειν ἀποτέλεσμα βαθμῷ Α, ἢ βαθμῷ Β κτ., ἡ προαχθεῖσα μεταβολὴ ἰσωθήσεται τῇ δυνάμει τῆς αἰτίας, ἢ, εἰ δόξειεν, ἐκπενώσει τῆς δυνάμεως τὴν αἰτίαν.

89. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἡ ἀδράνεια ἀνάλογός ἐσι τῇ

μάζῃ τῶν σωμάτων· ἐπεὶ γὰρ ἕκασον σωμάτιον, ἀφ' ὧν σύγκειται τὸ ὅλον, τὴν ἑαυτῷ ἀδράνειαν ἔχον, ἀνθίσαται τῇ αἰτίᾳ, ἡ ὅλη ἀντίσασις ἔσαι διπλῇ, τριπλῇ κτ. τό,τε προαγόμενον ἐκ τῆς ἀντισάσεως ἀποτέλεσμα ἔσαι διπλᾶν, τριπλᾶν κτ.· ᾗ δὴ τῇ αἰτίᾳ δεήσει δυνάμεως διπλῆς, τριπλῆς κτ.· ἡ ἄρα ἀντίσασις, ἢ ἀδράνεια, ἀνάλογος ἔσαι τῆς μάζῃ.

90. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ἡ ἀδράνεια τῶν σωμάτων ἔστιν ἀνάλογος τῷ βάρει αὐτῶν· ἡ γὰρ ἀδράνεια ἀνάλογός ἐσι τῇ μάζῃ· ἀλλ', ὡς ὀψόμεθα, ᾗ τὸ βάρος ἔστιν ἀνάλογον τῇ μάζῃ· ἄρα κτ.

91. ΠΟΡΙΣΜΑ ς΄. Τὴν ἀδράνειαν μέντοι τῶν σωμάτων ἥκισα συγχυτέον τῷ βάρει· ἡ γὰρ ἀδράνεια σπουδή τις ἐσι τῶν σωμάτων, καθ' ἣν ἐναπομένειν ἐθέλουσι τῇ ἑαυτῶν κατασάσει, εἴτε ἠρεμίᾳ, εἴτε κινήσει, σχήματι τριγωνικῷ, τετραγωνικῷ, χρώματι ἐρυθρῷ, κυανῷ κτ.· ὅπερ ὡς δῆλον, ἕτερόν ἐσιν ἢ τὸ βάρος· β΄. σώματι πληγὲν, ὥσε κινηθῆναι ἐφ' ὁριζοντείᾳ ἐπιπέδῳ, ἀνθίσαται, ᾗ καταργεῖ πᾶσαν τὴν παρ' ἐμοῦ δύναμιν, δεχόμενον τὴν μεταβολὴν, ἢ τὴν ταχύτητα, ἣν ἡ ἐμὴ δύναμις αὐτῷ ἐνεργάζεται· ἀλλὰ δῆλον, ὡς αὕτη ἡ ἀντίσασις, ἐν γῷ τῇ ὁριζοντείῳ κινήσει, ᾗ ἥρτηται ἀπὸ τῆς βαρύτητος, εἴγε ἡ ὁριζόντιος κίνησις ἔτε ἀντίκειται, ἔτε ξυντελεῖτι τῇ βαρύτητι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ κινήσεως.

92. Ἡ ἐν γένει φυσικὴ ἐξετάζει ὡς εἴρηται (2) τὰς κοινῇ παντὶ σώματι προσούσας ἰδιότητας· τοιάδε εἰσὶ, προϋποτεθέντων τῶτε δίκην βάσεως προϋποβαλλομένω πρώτω ὑποκειμένω, εἴτ' ὂν τῆς οὐσίας, ἢ τῆς ὑπάρξεως τῶν σωμάτων, ἡ διαίρεσις, τὸ ἀδιαχώρητον, τὸ πορῶδες, ἡ κίνησις, ἢ ἡ βαρύτης· ἢ τὰ μὲν ἄλλα κοινῇ ἐνυπάρχοντα ἁπάσῃ ὕλῃ, οὐδὲν τοιῶτο περιέχουσιν, οἷον πολλῶν ἐπιδεῖσθαι εἰς ἀνάπτυξιν· διὸ ἢ συντόμως πάνυ διήνυσαι.

93. Ἡ δὲ κίνησις, ταὐτὸν δ' εἰπεῖν ἡ βαρύτης, ἥτις ἐσὶν ἐπιρρέπεια πρὸς κίνησιν, ἔσιν αἰτία πάντων τῶν ἀποτελεσμένων, ἢ φαινομένων ἐν τῇ φύσει, ἢ ὅτως εἰπεῖν ψυχὴ τῶν ἁπάντων· ἀνθ' ὅτω δὴ αἱ κατ' αὐτὴν ἰδιότητες ἐπιδεκτικαί εἰσι ἢ ἀκριβεσέρων δείξεων· ἔσι δὲ τῶτο τὸ μέρος τῆς Φυσικῆς, ᾗ ἀντιποιεῖται μάλισα ἡ Μαθηματικὴ, ἢ ὅπερ ἂν ἀξίως ἐγκαλλωπίζοιτο τῷ τῆς ἐπισήμης ὀνόματι.

94. Κίνησις ἔσι μετάβασις σώματος ἀπὸ τόπω εἰς τόπον· ἠρεμία δὲ σάσις τῦ σώματος ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ· διακρίνεται δὲ ἐπὶ τῆς κινήσεως μάλισα τέτταρα ταῦτα· κίνησις, φορὰ, ταχύτης, ἢ ποσότης τῆς κινήσεως.

95. Ἐκ τῆς τῶν σωμάτων ἀδρανείας, εἴτ' ὂν τῆς γενικῆς αὐτῶν ἰδιότητος, καθ' ἣν ἕκασα τῇ αὐτῶν καταστάσει ἐναπομένειν ἐθέλει (83), συναχθείη ἂν δίχα δείξεως ἄλλης τὰ ἑφεξῆς πορίσματα.

96. ά. Τὸ ἠρεμοῦν ἀεὶ καθηρεμήσει, ἔς τ' ἂν εἰς κίνησιν αὐτὸ τρέψῃ ἐξωτερικήτις αἰτία.

97. β΄. Τὸ κινούμενον ἀεὶ κινηθήσεται, ἔς τ' ἂν αἰτία ἐξωτερικὴ αὐτὸ σήσῃ.

98. γ΄. Τὸ κινούμενον διατηρήσει ἀεὶ τὴν αὐτὴν ταχυτῆτα, ἔς τ' ἂν αὐτὴν αἰτία ἐξωτερικὴ αὐξήσῃ, ἢ γοῦν ἐλαττώσῃ.

99. δ΄. Ἐντεῦθεν ἄρα, ἀφαιρεθέντων τῆς βαρυτῆτος, τῆς ἀντισάσεως τοῦ, δι' οὗ κινεῖται τὸ σῶμα, τῆς τριβῆς, καὶ ἄλλων κωλυμάτων, ἃ δύναται ἀναχαιτίσαι τὴν κίνησιν, τὸ περὶ τῆς ἀϊδίου κινήσεως πρόβλημα ἐπιλυθήσεται, εἴγε τῶν κωλυμάτων ἀρθέντων, ἀϊδίως τὸ κινεῖσθαι ἀρξάμενον κινηθήσεται.

100. Ἀλλὰ γὰρ εἰσὶν ἀεὶ τοιάδε ἐμπόδια τοῖς γηΐνοις σώμασι· καὶ ἡ ἀΐδιος κίνησις, ὑπὲρ γηΐνης τινὸς μηχανῆς, θεωρεῖται ὡς ἀδύνατος· ἐπεὶ ά. ἅπαν γήϊνον σῶμα ἐν τῷ ἀέρι κινεῖται· καὶ γὰρ καὶ ἐν αὐτῷ τῷ κενῷ τῆς πνευματικῆς ἀντλίας δοχείῳ, ἀναγκαίως λείπεταί τι ἀέρος, ὡς ὀψόμεθα· ὁ δὲ ἀὴρ ἀντίκειται τῇ κινήσει τῶν σωμάτων, καὶ ἀδιαλείπτως αὐτὴν ἐπιβραδύνει· β΄. ἀδύνατον ὅλως μηχανὴν κινεῖσθαι ἄνευ τινὸς οἱασοῦν τριβῆς· ἀλλ' ἡ τριβή, ὅσον ἂν ᾖ ἐλαχίση, ἐπιβραδύνει ἀεὶ τῆς μηχανῆς τὴν κίνησιν.

101. έ. Σῶμά τι κινούμενον τὴν αὐτὴν ἀεὶ φορὰν κινηθήσεται, μέχρις ἂν αἰτία ἐξωτερικὴ τῆς φορᾶς ταύτης παρεκτρέψῃ.

102. Ἐντεῦθεν ἄρα δῆλον, ὡς ἅπαν σῶμα κατ' εὐθεῖαν φέρεσθαι τείνει· εἴγε ἀεὶ τὴν αὐτὴν φορὰν τηρεῖν ἐπείγεται· πολλὰ δὲ σημεῖα ἐπὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς κείμενα συνιστῶσι τὴν εὐθεῖαν (Γεωμ. 12 Τόμ. Β΄.).

103. ς'. Ἡ φύσις τοῦ σώματος ἐπίσης ἐστὶν ἐπιδεκτικὴ τῆς τε κινήσεως καὶ τῆς ἠρεμίας· οὐ γὰρ ἀπαιτεῖ τὴν κίνησιν· ἢ οὐκ ἂν ἠρέμει· οὐδὲ τὴν ἠρεμίαν, εἴπερ ἀδύνατον ἦν κινηθῆναι· δέχεται ἄρα τήνδε κίνησιν καὶ τὴν ἠρεμίαν· ἐπειδὴ δὲ τὰ σώματα καθαρῶς εἰσὶ παθητικὰ, δυνατὸν ἐκ τούτου, ἤτοι καθηρεμεῖν, δύω ἐξῆς λεπτὰ μένον ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ, ἢ ἐν μὲν τῷ Α λεπτῷ κεῖσθαι καθ' ἕνα τόπον, ἐν δὲ τῷ Β κατ' ἄλλον, ὅ ἐστι κινεῖσθαί τι σῶμα.

104. Ἀλλ' ἔμπης ἡ ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ τῶν σωμάτων στάσις ἔστιν ἀεὶ, ἣν σπεύδει διατηρεῖν τὰ σώματα, μέχρις ἂν ἐπιγενομένη ἐξωτερική τις αἰτία τοῦ τόπου αὐτὰ μεταστήσῃ· ἄρα ἡ φυσικὴ τῶν σωμάτων κατάστασις ἔστιν ἡ ἠρεμία· εἴτι ἄρα κινεῖται, κἂν ἐρᾴνιον, κἂν ἐπίγειον, ἀπ' ἐξωτερικῆς ἠστινοσοῦν αἰτίας τὸ ἐνδύσιμον προσλαμβάνει τῆς κινήσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ ταχυτῆτος.

105. Χρόνος μὲν καλεῖται τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκαριαίων σημείων, ἐν οἷς τὸ σῶμα κινεῖται. Διάστημα δὲ, ὁ ἀριθμὸς τῶν μερῶν τοῦ τόπου, ὃν διανύει ἐν τούτῳ τῷ χρόνῳ τὸ κινούμενον. Ταχύτης δὲ, ὁ ἀριθμὸς τῶν τοῦ τόπου μερῶν, ἃ διανύει ἐν ὡρισμένῳ μέρει τοῦ χρόνου.

106. Ἰσομερῶς κινεῖσθαι τὰ σώματα λέγεται, ὅταν ἴσοις χρόνοις ἴσα διανύῃ διαστήματα· οἷον, εἰ ἐν λεπτῷ τῆς ὥρας διανύοι διάστημα ποδῶν 15, καὶ ἐν τῷ ἐξῆς

λεπτῷ ἄλλα 15, ἢ ἐν τέσσαρσι τυχὸν 60· ἡ μὲν ἓν κίνησις καλεῖται τηνικαῦτα ἰσομερὴς, τὴν δὲ ταχυτῆτα ἐμφανέσιν οἱ 15 πόδες.

107. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐν τῇ ἰσομερεῖ κινήσει τὸ διάστημα ἴσεται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τε χρόνε ἢ τῆς ταχυτῆτος.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπείπερ χρόνος ἐςὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπαριθμῶν σημείων, ἐν οἷς τὸ σῶμα κινεῖται, ταχυτὴς δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν τε τόπε μερῶν, ἃ τὸ κινέμενον διανύει ἐν ἑνὶ σημείῳ, ἡ δὲ ταχυτὴς ἀεὶ ἐν ἑκάςῳ σημείῳ ἔςιν ἡ αὐτὴ, τῆς κινήσεως ἰσομερῆς ἅσης· σαφές ἐςιν, ὅτι τὸ διάστημα ὁ ἀριθμός ἐςι τῶν σημείων, ἢ τε χρόνε, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὰ μέρη, εἴτ' ἓν τὴν ταχυτῆτα· ἕτως ἀνωτέρω τὸ διάστημα ποδῶν 60, ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ταχυτῆτος 15, ἢ τε χρόνε 4. Ο. Ε. Δ.

108. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐὰν ἓν, ἡ μὲν ταχυτὴς πληθῇ Τ, τὸ δὲ διάστημα Δ, ὁ δὲ χρόνος Χ, ἐπεὶ, ὡς δέδειπται, ἔςι $\Delta = T \cdot X$, ἄρα $T = \frac{\Delta}{X}$, ἢ $X = \frac{\Delta}{T}$ (Α'. ριθμ. 108), εἴτ' ἓν „ἡ μὲν ταχυτὴς ἐξισᾶται τῷ ἐκ τε „διασήματος διαιρεθέντος διὰ τε χρόνε προϊόντι πηλίκῳ, „ὁ δὲ χρόνος τῷ τε διασήματος, διὰ τῆς ταχυτῆτος.“

109. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Τὰ διανυόμενα διασήματα ἐν λόγῳ εἰσὶ συνθέτῳ τῷ ἐκ τῶν χρόνων ἢ τῶν ταχυτήτων· ἐξ αὐτῶν γὰρ παράγονται (Συμβ. Λογ. 291).

110. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐὰν ἄρα ὦσιν οἱ χρόνοι ἴσοι, τὰ διασήματα ἔσονται, ὡς αἱ ταχυτῆτες· ἐὰν δ' ἴσαι αἱ ταχυτῆτες, ὡς οἱ χρόνοι (Συμβ. Λογ. 367)· τέλος δὲ ἐὰν οἱ χρόνοι ἢ αἱ ταχυτῆτες ἴσα ὦσιν, ἡ γε ἐὰν οἱ χρόνοι ἐν ἀντιςρόφῳ λόγῳ ὦσι τῶν ταχυτήτων, τὰ διασήματα ἴσα ἔσονται (Συμβ. Λογ. 301, 303).

111. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Τῶν διαστημάτων ἴσων ὄντων, αἱ ταχυτῆτες ἔσονται ἀντιστρόφως ὡς οἱ χρόνοι, οἱ δὲ, ἀντιστρόφως ὡς ἐκεῖναι. (Συμβ. Λογ. 259).

112. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ἐν γένει δὲ, τὰ μὲν διαστήματα ἔσονται ἐν λόγῳ εὐθεῖ συνθέτῳ ἐκ τῶν χρόνων καὶ τῶν ταχυτήτων (Συμ. Λ. 291, 107)· αἱ δὲ ταχυτῆτες ἐν λόγῳ συνθέτῳ ἐκ τῇ εὐθέος μὲν τῶν διαστημάτων, ἀντιστρόφῳ δὲ τῶν χρόνων· οἱ δὲ, ἐκ τῇ εὐθέος μὲν τῶν διαστημάτων, ἀντιστρόφῳ δὲ τῶν ταχυτήτων.

113. ΠΟΡΙΣΜΑ ς΄. Ἐκ τῶν τριῶν, διαστήματος, χρόνῳ, καὶ ταχυτῆτος, δύο δοθέντων, δοθήσεται καὶ τὸ τρίτον· τὸ μὲν γὰρ γινόμενον ὑπὸ τῇ χρόνῳ καὶ τῆς ταχυτῆτος δίδωσι τὸ διάστημα (107)· τὸ δὲ διάστημα, διαιρεθὲν μὲν διὰ τῇ χρόνῳ, δίδωσι τὴν ταχυτῆτα, διαιρεθὲν δὲ διὰ τῆς ταχυτῆτος, τὸν χρόνον (Ἀριθμ. 108).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ ποσῇ τῆς κινήσεως.

114. Ἰσχὺς καλεῖται ἡ εἰς κίνησιν ἐπιῤῥέπεια σώματος, ὥστε ἀποτέλεσμα ἐμποιῆσαι ἑτέρῳ σώματι· ἐπεὶ ἄρα τὸ σῶμα ἀποτέλεσμα ἔδ' ὁ, τιῦν παράγει, εἰ μὴ διὰ κινήσεως, πᾶσα ἡ δύναμις τῶν σωμάτων ἐκ τῇ ποσῇ τῆς κινήσεως γίνεται, καὶ ταύτη ἐσὶν ἀνάλογος.

115. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ ποσότης τῆς κινήσεως σώματός τινος ἴση ἐσὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς μάζης καὶ τῆς ταχυτῆτος.

ΔΕΙΞΙΣ. Σῶμάτι, λιτρῶν 3 φέρε, διανύει ἐν λεπτῷ

δευτέρῳ ὀργυὰς 5· ἰσοδυναμήσει ἄρα σώμασι τρισὶν, ἑκάσῳ λίτρας μιᾶς, ὧν ἕκασον διανύει ὀργυὰς 5· ἀλλ' ἔστι σαφὲς, ὡς ἡ ἰσχὺς, εἴτ' ὢν ἡ ποσότης τῆς κινήσεως, ἣν κινεῖται τὸ τριῶν λιτρῶν σῶμα, ἔσεται πρὸς τὴν ποσότητα τῆς κινήσεως σώματος μιᾶς λίτρας, ὡς 15:5· ἢ ὡς ἡ ταχυτὴς 5 πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὴν μάζαν 3 πρὸς τὴν ταχυτῆτα 5 πολλαπλασιαζομένην ἐπὶ τὴν μάζαν 1.

Ε'ν γένει ἄρα ἡ ποσότης τῆς κινήσεως ἔστιν = MT, τῷ μὲν M τὴν μάζαν δηλοῦντος, τῷ δὲ T τὴν ταχυτῆτα Ο. Ε. Δ.

116. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Αἱ ποσότητες τῆς κινήσεως τῶν σωμάτων ἐν λόγῳ εἰσὶ συνθέτῳ τῷ ἔκτε τῶν μαζῶν καὶ τῶν ταχυτήτων (Συμβ. Λογ. 291).

117. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Δύω σώματα, ἢ πλείω, τὴν αὐτὴν ἔξουσι ποσότητα τῆς κινήσεως, ἤτοι ἡνίκα ὦσιν ἴσαι αἵτε μάζαι αὐτῶν, καὶ αἱ ταχυτῆτες, ἢ ἡνίκα αἱ μάζαι ἀντιστρόφως εἰσὶν, ὡς αἱ αὐτῶν ταχυτῆτες. (Συμβ. Λογ. 301, 303).

118. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ε'ντεῦθεν ἄρα σῶμα, ἴσον φέρε λίτρᾳ, τὰ αὐτὰ ἀποτελέσαι δυνήσεται, ἃ καὶ σῶμα, ἴσον τυχὸν λίτραις 1000, ἐὰν χιλιοπλασίῳ φέρηται ταχυτῆτι (117).

119. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Δεῖ ἄρα τῇ κινητικῇ αἰτίᾳ δυνάμεως ἴσης, ὥστε τῷ μιᾷ λίτρᾳ ἴσῳ σώματι ταχυτῆτα ἐμποιῆσαι, καθ' ἣν ἂν διανύσῃ χιλίας ὀργυιὰς ἐν ἐνὶ λεπτῷ, τῷ δὲ ἴσῳ λίτραις 1000, ὥστε διανύσαι ὀργυιάν.

120. ΣΧΟΛΙΟΝ. Α'εί ποτε γενικῶς θεωρῆντες τὰ περὶ κινήσεως, ὑποτιθέμεθα αὐτὴν, ὡς εἰ μηδὲν παρενεποδίζετο ἔθ' ὑπὸ τῆς τοῦ ἀέρος ἀντιτάσεως, ἐθ' ὑπὸ

τῆς τριβῆς, ἢ ἄλλων κωλυμάτων· καίτοι γὰρ σῶμα ἴσον λίτραις 1000 διανύει ἐν ἐνὶ λεπτῷ ὀργιὰν μίαν, τὸ μὲν ἴσον ὀργιᾷ μιᾷ τῇ αὐτῇ ἰχύϊ κινηθὲν ἐ διανύσει ὀργιὰς 1000 ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ, διά τε τὴν διάφορον τῶ ἀέρος ἀντίσασιν, ϗ τὴν διάφορον τριβὴν, ὡς φανήσεται ἐν τοῖς ἑξῆς.

121. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Τῶν μαζῶν ἴσων ὄντων, αἱ ποσότητες τῆς κινήσεως, ἔσονται ὡς αἱ ταχυτῆτες· τῶν δὲ ἴσων, αἱ ποσότητες τῆς κινήσεως ἔσονται ὡς αἱ μάζαι (Συμβ. Λογ. 306).

122. ΠΟΡΙΣΜΑ ς΄. Τῶν τῆς κινήσεως ποσοτήτων ἴσων, αἱ μάζαι ἔσονται ἀντιστρόφως ὡς αἱ ταχύτητες, αἱ δε ἀντιστρόφως ὡς αἱ μάζαι (Συμβ. Λογ. 250).

123. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Ε'κ τῶν τριῶν τούτων, ποσότητος τῆς κινήσεως, μάζης, ταχύτητος, δύο δοθέντων, ῥᾴδια ϗ τὸ τρίτον δοθήσεται· τὸ γὰρ γινόμενον ὑπὸ τῆς μάζης ϗ τῆς ταχυτῆτος ἐμφαίνει τὴν ποσότητα τῆς κινήσεως (115)· αὕτη δὲ διαιρεθεῖσα διὰ τῆς μάζης ἀποδίδωσι τὴν ταχύτητα, διὰ δὲ τῆς ταχυτῆτος τὴν μάζαν (Α'ριθμ. 108)· ἔστω γὰρ σῶμα ἴσον 10 λίτραις, δυνάμενον διανύσαι ἐν ἐνὶ λεπτῷ 20 ὀργιάς· ἐκεῖν 10 × 20 = 200 ἔστιν ἡ ποσότης τῆς κινήσεως· $\frac{200}{10} = 20$ ἐστὶν ἡ ταχυτής· $\frac{200}{20} = 10$, ἡ μάζα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ κινήσεως ἁπλῆς καὶ συνθέτου.

124. Δύναμις λέγεται πᾶν ὅ,τι ἕτερον εἰς κίνησιν ἀναγκάζει· ἀντίσασις δὲ, ὃ, τὴν δύναμιν λυμαινόμενον, ἥρεμον κατασῆσαι τὸ κινητὸν ἐπείγεται.

Κίνησις ἁπλῆ ἀκέει, ἡνίκα τὸ κινητὸν Α (χ. 86) κατὰ μίαν τινὰ φορὰν ΒΑ κινεῖσθαι καταναγκάζεται, εἴτε πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Ε, εἴτε πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Δ.

125. Ε'ὰν τὸ κινούμενον δύω κινῆται φορὰς ΒΓ, ΒΔ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς μὲν εὐθείας κειμένας, κατὰ μέντοι ἔννοιαν ἐναντίαν, εἰ μὲν ἐπίσης προσωθεῖται πρός τε τὸ Ε καὶ τὸ Δ, τὸ κινητὸν Α ἡρεμήσει· εἰ δ' ἀνίσως, τὸ Α ὑπὸ τῆς μείζονος καταναγκασθήσεται κινεῖσθαι δυνάμει ἴσῃ τῇ ὑπεροχῇ, ἣ ἡ μείζων ὑπερέχει τὴν ἐλάττονα· καὶ δὴ ἡ κίνησις ἔσαι οὐδὲν ἧττον ἁπλῆ.

126. Σύνθετος κίνησις καλεῖται, ὅταν τὸ κινούμενον Α (χ. 87) προσωθῆται κατὰ διαφόρους φορὰς, γωνίαν συνισώσας.

127. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Ο"ταν κινητόν τι τὸ Α κινηθῇ κατὰ δύω φορὰς ΑΕ καὶ ΑΔ, συνισώσας γωνίαν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΕΑΔ, κινηθήσεται κατὰ τὴν φορὰν τῆς διαγωνίου ΑΘ παραλληλογράμμου τοῦ ΑΕΘΔ, τοῦ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΕ, ΑΔ, τῶν ἐμφαινουσῶν τὰς φορὰς καὶ τὰς ταχυτῆτας τῶν δύω ἑλκουσῶν δυνάμεων.

ΔΕΙΞΙΣ. Ε'λκέσθω γὰρ τὸ κινούμενον Α πρὸς τὸ Δ δυνάμει, δι' ἧς ἂν διανύσῃ τὴν ΑΔ εὐθεῖαν ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ· ἑλκέσθω δὲ ἅμα καὶ πρὸς τὸ Ε δυνάμει, δι' ἧς

ἂν ἐν τῷ αὐτῷ δευτέρῳ λεπτῷ ἀφίκοιτο πρὸς τὸ Ε· τὸ ἄρα κινητὸν Α ἐγγὺς γενήσεται τῇ ΘΔ εὐθείᾳ, ἥτις ἐστὶ παράλληλος τῇ ΑΕ, ἀπέχουσα αὐτῆς κατὰ τὴν ΕΘ = ΑΔ, καὶ ἅμα τῇ ΕΘ, ἥτις ἐστὶ παράλληλος τῇ ΑΔ, ἀπέχουσα αὐτῆς κατὰ τὴν ΔΘ = ΑΔ· ἀλλ' οὐδὲν κωλύει αὐτὸ μεταβαῖνον ἐξ ἀριστερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΕΘ = ΑΔ μὴ κεντεῖσθαι κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΔΘ = ΑΕ· ἐπεὶ γὰρ ἐξ ἀριστερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ κίνησις οὐδ' ἀντίκειται, οὐδὲ συνεργεῖ τῇ ἐκ τῶν ἄνω ἐπὶ τὰ κάτω κινήσει, ἐκείνην χρὴ τὰ ἑαυτῆς ἀποτελεῖν, ὡς εἰ τὸ κινητὸν μηδόλως ἔλκοιτο παρὰ ταύτης, καὶ ἀντιστρόφως· ἵν' ἓν τὸ ἀποτέλεσμα ἀνάλογον ᾖ τῇ αἰτίᾳ, τὸ κινητὸν Α μεθ' ἓν λεπτὸν εὑρεθήσεται πρὸς δεξιὰν τῆς ΑΕ, ἀπέχον αὐτῆς τῇ εὐθείᾳ ΕΘ = ΑΔ, καὶ ἔνερθεν τῆς ΑΔ, ἀπέχον αὐτῆς τῇ εὐθείᾳ ΔΘ = ΑΕ· ἔστι δὲ ὁ τόπος οὗτος, ὡς δῆλον, τὸ Θ πέρας τῆς διαγωνίου ΑΘ· ἄρα τὸ κινητὸν Α μεθ' ἓν λεπτὸν ἀνάγκη ἀφικέσθαι πρὸς τὸ Θ.

Ἐπεὶ δὲ αἱ δύω δυνάμεις τῷ αὐτῷ κινητῷ Α ἐπηνέργησαν κατὰ συνέχειαν, ἀνάγκη ἄρα δι' ὅλου τοῦ λεπτοῦ κινηθῆναι τὴν φορὰν ΑΘ· εἴτ' οὖν τὴν τῆς διαγωνίου. ΟΕΔ.

128. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δυνατὸν ἄρα ἐκλαβεῖν εὐθεῖαν μίαν τὴν ΑΘ, ἣ κίνησιν ἁπλῆν ἐμφαίνει, ὡς ἔσαν σύνθετον ἐκ δύω δυνάμεων ΑΔ, ΑΕ, αἳ, γωνίαν ὀρθὴν περιέχουσαι, πλευραὶ γίνονται τῷ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ ΑΘ ἔσαι διαγώνιος· αὗται γὰρ αἱ δύω εἰσὶν ἴσαι μιᾷ τῇ κατὰ τὴν διαγώνιον ΑΘ (127).

129. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἐὰν τὸ κινητὸν ὑπὸ δύω ἐλκηται δυνάμεων, ὀξεῖαν ἢ ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν γωνίαν, καὶ αὖθις τὴν διαγώνιον διαγράψει παραλληλογράμμου τοῦ ἐπὶ τῶν δύω πλευρῶν τῶν δυνάμεων (κ. 88. 89).

ΔΕΙΞΙΣ. Η"χθω ἡ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς τῇ διαγωνίῳ ΒΡ, καὶ ἐκ τῶν Α, Γ γωνιῶν αἱ παράλληλοι ΑΔ, ΓΕ τῇ αὐτῇ διαγωνίῳ ΒΡ, καὶ αἱ κάθετοι ΑΟ, ΓΙ· ἐκ τῶν ἰσαλλήλων (*) τριγώνων ΒΓι, ΑΟΠ ἔσι ἄ. ΑΟ = ΓΙ, καὶ δὴ ΒΔ = ΒΕ, ἐντεῦθεν τὰ δύω ὀρθογώνια (Γεωμ. 229. Τόμ. Β) ΑΒΔΟ, ΒΓΕι· β΄. Βι=ΟΠ, καὶ δὴ Βι + ΒΟ = ΒΠ ἐπὶ τῆ 88 κ. καὶ Βι — ΒΟ = ΒΠ ἐπὶ τῆ 89 σχήμ.

130. Ε'ξειλήφθω ἤδη ἡ ΒΑ ὡς γινομένη ἐκ ΒΟ + ΒΔ (εἴτ' ἴν ὡς διαγώνιος τῆ ΑΔΒΟ παραλληλογράμμῳ τῇ συνισαμένῃ ἐπὶ τῶν δύω δυνάμεων, καὶ δύω φορῶν ΔΑ, ΒΔ) καὶ ΒΓ ὡς γινομένη ἐκ Βι + ΒΕ, καὶ αἱ δύω εὐθεῖαι ΒΑ, ΒΓ, ὡς γινόμεναι ἐκ τῶν τεσσάρων δυνάμεων ΒΟ, ΒΔ, Βι, ΒΕ· ἀλλ' αἱ δύω ἀντικείμεναι δυνάμεις ΒΔ, ΒΕ, ὡς ἴσαι, ἀλλήλας ἀφανίζεσι· λείπεται ἄρα τῇ ΒΑ μόνη ἡ πλευρὰ ΒΟ, ἣν τὸ κινέμενον οἰωθήσεται, καθ' ὃν χρόνον ἔδει διανύσαι τὴν ΒΑ· ὡσαύτως τῇ ΒΓ ἡ Βι μόνη καταλείπεται, ἣν τὸ κινέμενον διανύσει ἐν ᾧ ἔδει διανύσαι τὴν ΒΓ. ἔτω τὸ κινητὸν μετὰ τὰς δύω δυνάμεις, ΒΑ, ΒΓ διανύσει τὴν ΒΟ + Βι, ἐν ᾧ μόνον ὤφειλε διελθεῖν μόνην τὴν ΒΑ, ἢ μόνην τὴν ΒΓ, εἰμὴ

(*) Η' ὀρθὴ γωνία ι ἴσεται τῇ γωνίᾳ Ο· ἡ δὲ Π γωνίᾳ τοῦ ΑΟΠ τριγώνου ἴσεται τῇ Β γωνίᾳ τοῦ ΒΓι τριγώνου (Γεωμ. 133)· ἡ ἄρα Α γωνία τοῦ πρώτου τριγώνου ἴση ἐςὶ τῇ τοῦ δευτέρου γωνίᾳ Γ· ἀλλ' αἱ πλευραὶ ΑΠ, ΒΓ τοῦ ΑΠΒΓ παραλληλογράμμου εἰσὶν ἰσάλληλοι, ὡσαύτως καὶ αἱ κάθετοι ΑΟ, ιΓ ὡς ὕψη τῶν ἴσων τριγώνων (Γεωμ. 236) ΑΠΒ, ΒΠΓ (Γεωμ. 237)· τὰ ἄρα τρίγωνα ΑΠΟ, ΒΓι εἰσὶν ἰσάλληλα (Γεωμ. 221).

κεκίνητο ὑπὸ δύω δυνάμεων· ἐπὶ τούτοις δὲ ΒΟ ᾗ ΒΙ κατὰ τὴν αὐτὴν μὲν φορὰν ἴσαι ἐπὶ τῆ 88 σχήμ. συναπτέαι εἰσὶν ἀλλήλαις, ἐναντίας δ' ἐχουσῶν φορὰς ἐπὶ τῆ 89 σχήμ. ἀφαιρετέον τὴν ΒΟ τῆς ΒΙ· ὅθεν ἑκατέρως ἀποτελεῖται ἡ ΒΠ διαγώνιος· ἄρα ἐν γένει εἴτε ὀξεῖαν, εἴτε ἀμβλεῖαν συνιςῶσι γωνίαν αἱ δύω φοραὶ, τὸ κινούμενον οἰσθήσεται τὴν διαγώνιον τῆ παραλληλογράμμυ κτ. Ο.Ε.Δ.

131. ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΕΝΙΚΟΝ. Δῆλον ἐκ τῶν προειρημένων, ὡς ὅτε σῶμά τι ὑπὸ δύω δυνάμεων ἕλκεται γωνίαν ἡντιναοῦν περιεχουσῶν, κινεῖται τὴν διαγώνιον τῆ παραλληλογράμμυ τῆ ἐπὶ τῶν φορῶν τῶν δυνάμεων, διανύον αὐτὴν ἐν τοσούτῳ χρόνῳ, ἐν ὅσῳ ἂν διήνυε τὴν ἑτέραν τῶν πλευρῶν.

132. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὸ κινητὸν, εἰμὲν αἱ ἰσχῦς τῶν δυνάμεων ἴσαι ὦσι, ᾗ αἱ φοραὶ αὐτῶν περιέχωσι γωνίαν ὀρθὴν, διαδραμεῖται τὴν διαγώνιον τετραγώνυ τελείυ· εἰδὲ αἱ μὲν δυνάμεις ὦσιν ἄνισοι, ἡ δὲ γωνία ὀρθὴ, τὴν ὀρθογωνίυ ἐπιμήκης· εἰδὲ ὀξεῖα, τῶν δυνάμεων μὲν ὑσῶν ἴσων, τὴν ῥόμβυ μεγάλην διαγώνιον, ἀνίσων δὲ, τὴν ῥομβοειδῆς· τελευταῖον δὲ, εἰ ἀμβλεῖα ᾖ ἡ γωνία, διαδραμεῖται τὴν μικρὰν διαγώνιον τῆ ἤτοι ῥόμβυ, ἢ ῥομβοειδὲς, ὡς ἂν τύχωσιν ἔχουσαι ἰσότητος, ἢ ἀνισότητος, αἱ δυνάμεις.

133. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Α'εἰ ἐξέσαι τὰς φορὰς δύω δυνάμεων ΑΔ, ΑΕ (χ. 87), ἢ ΒΑ, ΒΓ (χ. 88.) εἰς μίαν μόνην ἀναγαγεῖν τὴν ΑΘ, ἢ ΒΠ, ἀγομένων μὲν εὐθειῶν δύω ὑπὸ γωνίαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν φορῶν λόγον ἐχουσῶν τὸν τῶν δυνάμεων, τῆ δὲ παραλληλογράμμυ πληρυμένυ, ᾗ τῆς διαγωνίυ ἐπιζευγνυμένης, ἥτις πάντως ἐκληφθῆναι δύναται ὡς ἐμφαντικὴ ἁπλῆς

κινήσεως, εἴτ' ἓν ἐνεργείας ϗ φορᾶς μιᾶς μόνης δυνάμεως, τουτέσι „πᾶσα κίνησις σύνθετος ἔχει ἐκληφθῆναι „ὡς ἁπλῆ, καὶ ἁπλῆ ὡσαύτως πᾶσα σύνθετος δύ„ναμις."

134. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἡ σύνθεσις τῆς κινήσεως μικρύνει ἀεὶ τὴν ποσότητα, ἢ, ὃ ταὐτὸν ἡ σύνθετος δύναμις, ϗ τὸ ἀπ' αὐτῆς ἀποτέλεσμα, ἐκ ἐξισοῦται ταῖς, ἀφ' ὧν σύγκειται, δυνάμεσι· ἡ γὰρ διαγώνιος ΑΘ, ἢ ΑΠ (χ. 87, 88) ἣν τὸ κινούμενον διατρέχει ἐν ἑνὶ φέρε λεπτῷ, ἐκ ἔστιν ἴση τῷ ἀθροίσματι ΑΔ + ΑΕ, ἢ ΑΒ + ΒΓ τῶν πλευρῶν, πρὸς ἃς εἰ ἑκατέρα τῶν δυνάμεων ἐν μέρει τὸ κινητὸν εἶλκεν, ἐν ἑνὶ λεπτῷ ἑκατέραν αὐτῶν τὸ κινητὸν διήνυεν ἄν.

135. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ὅσῳ ὀξυτέρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ (χ. 88.) γωνία, τοσούτῳ ἧττον σμικρυνεῖ τὴν ποσότητα τῆς κινήσεως ἡ σύνθεσις, ἢ γε μᾶλλον σπεύσει ἐξισωθῆναι τῷ ἀθροίσματι τῶν δύω, ἐξ ὧν σύγκειται, δυνάμεων· τηνικαῦτα γὰρ ἡ ἐν τῇ συνθέσει ἀπολλυμένη δύναμις ἐμφαίνεται τῷ ΒΔ + ΒΕ = 2ΒΔ (130)· ὅσῳ δὲ ἡ γωνία ὀξύνεται, τοσούτῳ τὸ 2ΒΔ μικρύνεται· τέλος δὲ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ οἱονεὶ ἀπειροσῆς γενομένης, αἱ δύω δυνάμεις ἐκληφθήσονται ὡς κατὰ μίαν φορὰν σύρεσαι τὸ κινητὸν, ϗ 2ΒΔ ἔσαι = 0, αἵτε δυνάμεις ἀποβαλοῦσιν ὐδέν.

136. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Τουναντίον δὲ, ὅσῳ ἀμβλυτέρα ἢ ἡ ὑπὸ τῶν φορῶν περιεχομένη γωνία (χ. 89), τοσούτῳ μᾶλλον ἡ σύνθεσις σμικρυνεῖ τὴν κίνησιν, ἢ, ὃ ταυτὸν, τοσούτῳ ἔλαττόν ἐσι τὸ ἀποτέλεσμα, παραβαλλόμενον πρὸς τὰς, ἀφ' ὧν σύγκειται, δυνάμεις· ὅσῳ γὰρ ἀμβλύνεται ἡ γωνία, τοσούτῳ αὔξει ἡ ἀποβαλλομένη ποσότης ΒΔ + ΒΕ· ἐὰν δὲ ἀπείρως ἀμβλεῖα

ὑποτεθῇ ἡ γωνία Β, εἴτ' ἴσν $= 180° - \frac{1}{\infty}$· αἱ δύω φοραὶ ΒΔ, ΒΕ ἀντίθετοι ἔσονται, ϗ τὸ πρὸς τὸ Π ἀποτέλεσμα ἔσεται = ο.

137. ΠΟΡΙΣΜΑ ς'. Δυνατὸν δὲ, ὅσας ἄντις βάληται, συνθέσθαι δυνάμεις, εἰ μόνον ἀλλήλας τέμνοιεν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἔσωσαν γὰρ τέσσαρες δυνάμεις (χ. 89 Α) ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ἀλλήλας τέμνεσαι κατὰ τὸ Α· ἑκὸν τὸ μὲν ἐκ τῶν δίω ΑΒ, ΑΓ ἀποτέλεσμα, συμπληρωθέντος ἐπ' αὐτῶν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΘ, ἔσαι ἡ διαγώνιος αὐτοῦ ΑΘ, ἧς ὡς ἁπλῆς ἐκληφθείσης δυνάμεως, ἐπ' αὐτῆς ϗ τῆς ἐφεξῆς ΑΔ συσαθέντος τοῦ παραλληλογράμμου ΑΘΔΗ, ἡ αὐτοῦ διαγώνιος ΑΗ τὴν ἐκ τῶν ΑΘ, ΑΔ, ϗ δὴ ἐκ τῶν τριῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ ἐμφανεῖ σύνθετον δύναμιν· ἡ δὲ ΑΤ τοῦ τρίτου παραλληλογράμμου ΑΗΕΤ σημανεῖ τὴν ἐκ τῶν τεσσάρων ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ συγκροτυμένην.

138. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ'. Τἐναντίον δὲ πᾶσαν ἁπλῆν δύναμιν, ϗ ἁπλῆν κίνησιν, θεωρεῖν δυνάμεθα ὡς σύνθετον ἐκ δύω δυνάμεων ϗ κινήσεων· ἔχω γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΒ (χ. 90.), ἐμφαίνουσα δύναμιν ϗ κίνησιν ἡντιναοῦν, ϗ ἐκ τοῦ κατ' αὐτὴν πέρατος ἤχθωσαν ὡς ἔτυχε δύω εὐθεῖαι, ὡς εἶναι δι' αὐτῶν παραλληλόγραμμον συμπληρῶσαι τὸ ΑΒΓΔ· ἑκὸν ἡ ΑΒ δύναμις ἀναλέλυται εἰς δύω τὴν ΑΓ, ϗ ΑΔ, ἃς ὡς συνθετικὰς τῆς ΑΒ ἐκλαβεῖν δυνάμεθα.

Ἐπεὶ δὲ ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ΑΒ μέγεθος ἔχουσα πεπερασμένον, ποδὸς φέρε, ἀπείρων παραλληλογράμμων διαγώνιος δύναται εἶναι, διαφόρων τήν τε γωνίαν Α, ϗ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ, ἑκ ἔξιν ἄρα

ἁπλῇ δύναμις ᾗ κίνησις ὡρισμένη, ἣν ἃ δυνάμεθα ἀπειραχῶς εἰς δύω ἀναλύσαι δυνάμεις.

139. ΠΟΡΙΣΜΑ Η΄. Η΄ ἀνάλυσις τῆς κινήσεως αὔξει τὴν ποσότητα· ὃ ἀναγκαίως ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι σμικρύνει αὐτήν, ὡς εἴδομεν, ἡ σύνθεσις· ἀναλυομένης γὰρ τῆς ΑΒ δυνάμεως, εὑρίσκονται δύω αἱ ΑΓ, ΑΔ ὧν τὸ ἄθροισμα ἔσι μεῖζον τῆς ΑΒ· ἐκ δὲ τῶν εἰρημένων (135) δῆλον, ὅτι τοσούτῳ μᾶλλον ἡ ἀνάλυσις αὔξει τὴν ποσότητα, ὅσῳ μείζων ἂν εἴη ἡ ὑπὸ τῶν φορῶν περιεχομένη γωνία Α.

140. ΣΧΟΛΙΟΝ. Η΄ θεωρία τῆς συνθέσεως καὶ ἀναλύσεως τῶν δυνάμεων χρησιμωτάτη ὑπάρχει τῇ Φυσικῇ, ἀδιαλείπτου ἔσης τῆς χρήσεως αὐτῆς ἐν τοῖς περί τε τῶν ἐρανίων, καὶ τῶν γηΐνων σωμάτων· φανήσεται γὰρ ἐν τοῖς ἑφεξῆς, ὅτι τὰ ἐράνια σώματα ἰδιότητι δύω δυνάμεων, τῆς μὲν ὠθούσης αὐτὰ πρὸς τὸ τῆς κινήσεως αὐτῶν κέντρον, τῆς δ' ἀπ' αὐτοῦ ἀποσπώσης, περιάγεται, ἀναγκαζόμενα ἕτω φέρεσθαι ἀεὶ τὴν διαγώνιον παραλληλογράμμου, συνισαμένου κατὰ τὸν λόγον τῶν δυνάμεων τούτων καὶ τῶν κατ' αὐτὰ φορῶν· ἡ γενικὴ ἀλλήλων συνεπίδρασις τῶν ἐρανίων σωμάτων, τελεμένη ἀεὶ πλαγίως τῷ ἐπιπέδῳ τῆς ὑπ' αὐτῶν καταγραφομένης καμπύλης, ἀεὶ ἀναλύεται· αἱ τῆς θαλάσσης παλίῤῥοιαι γίνονται μάλισα διὰ τῆς ἀναλύσεως τῆς κινήσεως· πάντα τὰ γήϊνα σώματα κατὰ μίαν τινὰ φορὰν προβαλλόμενα πλαγίως ἢ παραλλήλως τῷ ὁρίζοντι φέρονται ἀεὶ ὑπὸ δύω δυνάμεων, τῆς μὲν τῷ ὁρίζοντι ἴσης καθέτου, ἥ ἐσιν ἡ βαρύτης, τῆς δὲ πλαγίας ἢ παραλλήλου τῷ ὁρίζοντι, ἣ αὐτὰ καταναγκάζει εἰς κίνησιν, καὶ τοῦτο ἐν ἑκάσῳ ἀπαρεῖ γράφουσι διαγώνιον πα-

ραλληλογράμμυ συνισαμένυ ἐπ' αὐτῶν τῶν δύω δυνάμεων, ϗ τῶν κατ' αὐτὰς φορῶν.

141 Οὐκοῦν νηὸς πλεούσης ἐνεργείᾳ τῶν πνευμάτων κατὰ φορὰν ὁριζόντιον, ἐὰν ἐκ τῆς τοῦ ἱστοῦ κορυφῆς ναύτης ὀλισθήσας πέσῃ, οὐκ ἐν τῇ θαλάσσῃ καταβυθισθήσεται, ἀλλὰ πρὸς τῇ τοῦ ἱστοῦ βάσει καταπεσεῖται, διὰ τὸ διαδραμεῖν τὴν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμυ, τοῦ συνισαμένυ ἐπὶ τῶν φορῶν τῆς τε ὁριζοντίυ ϗ τῆς καθέτυ κινήσεως· ὑποτεθείσθω ἓν ὁ ναύτης πίπτων ἀφ' ὕψυς ποδῶν 60, ϗ δὴ μόνῃ τῇ οἰκείᾳ βαρύτητι καταφερόμενος, εἰ ἡ ναῦς ἠρεμοίη, καταπεσεῖται πρὸς τῇ τοῦ ἱστοῦ βάσει μετὰ δύω λεπτὰ δεύτερα, ὡς ὕστερον φανήσεται· ὑποτεθείσθω δὲ κινυμένη ἰσοταχῶς ϗ δυσὶ δευτέροις λεπτοῖς διανύυσα πόδας 100· εἰ ἓν ὁ ναύτης μόνῃ τῇ οἰκείᾳ ἑαυτοῦ δυνάμει κατεφέρετο, πάντως ἂν κατέπιπτεν ἐν τοῖς ὕδασι πόρρω τοῦ ἱστοῦ πόδας 100· ἐπεὶ δὲ πρὸς τῇ βάσει τοῦ ἱστοῦ καταπίπτει, ἀναγκαίως διατρέχει τὴν διαγώνιον ἐπιμήκυς ὀρθογωνίυ, οὗ ἡ μὲν ὁριζόντιος πλευρὰ τὴν τῆς κινήσεως ἐμφαίνει τοῦ ναύτυ δύναμιν τὴν τῇ νηῒ κοινὴν, δι' ἧς ἔσπευδε διανύσαι ἅμα τῇ νηῒ 100 πόδας ἐν δυσὶ δευτέροις λεπτοῖς, ἡ δὲ τῷ ὁρίζοντι κάθετος τὴν δύναμιν τῆς βαρύτητος, καθ' ἣν ὁ ναύτης ἔσπευδε διανύσαι διὰ καθέτυ κινήσεως 60 πόδας ἐν τῷ αὐτῷ χρονικῷ διαστήματι.

Οὐκοῦν θεατὴς ἱσάμενος ἐν νηῒ ἠρεμούσῃ ὄψεται τὸν ἐν τῇ κινυμένῃ νηῒ καταπίπτοντα ναύτην οὐχὶ πρὸς ὀρθὰς καταφερόμενον, ἀλλὰ κατὰ φορὰν πλαγίαν τῷ ὁρίζοντι, ϗ γράφοντα διαγώνιον παραλληλογράμμυ τοῦ ἐπί τε τῆς ὁριζοντείυ ϗ τῆς καθέτυ τῶν κινήσεων.

142. Η' ἐπὶ τοῦ ἐν νηῒ κινυμένῃ καταπίπτοντος ἀνάπτυξις ἐφαρμοσθῆναι δύναται πᾶσι τοῖς γηΐνοις σώμασι

τοῖς κινυμένοις κατὰ πᾶσαν ἄλλην φορὰν, ἢ κάθετον· ἐπεὶ γὰρ πάντα τὰ γήϊνα σώματα εἰσὶ βαρέα, ὡς δειχθήσεται, ἐάν τις δύναμις ἄλλη πλὴν τῆς βαρύτητος κινήσῃ αὐτὰ κατὰ φορὰν ἄλλην πλὴν τῆς καθέτυ, ἀχθήσονται ὑπὸ δύω δυνάμεων, ὧν αἱ φοραὶ γωνίαν περιέξυσι, ϗ κινηθήσονται τὴν διαγώνιον τῦ ἐπὶ τῶν δύω φορῶν παραλληλογράμμυ.

143. Ῥᾳδίως καταυοεῖται ἐκ τῶν εἰρημένων, δι' ὅ, τι πλοιάριον, ἑλκόμενον ἐκ θατέρυ χείλυς ποταμῦ ἐπὶ θάτερον, ὑ φέρεται πρὸς τὸν ἕλκοντα κατ' εὐθεῖαν· εἰσιὸν γὰρ εἰς τὸ ὕδωρ ἀναγκάζεται κινεῖσθαι πρὸς τὰ ῥεῖθρα ὑπ' αὐτῦ τῦ ὕδατος, ϗ ἅμα πρὸς τὸν ἕλκοντα αὐτὸ ἐκ θατέρυ χείλυς· διατρέχει ἓν τὴν διαγώνιον τὴν ἐπὶ τῶν φορῶν τῶν δύω τούτων δυνάμεων· ἐπεὶ δὲ ἡ κατὰ μῆκος κίνησις ἀεὶ ποικίλλεται, τόπυς ἀμείβυσα, ἡ δὲ κατὰ πλάτος τῦ ἕλκοντος ἀεί ἐσιν ἄτρεπτος, ἡ γωνία τῆς φορᾶς ἀεὶ ποικιλθήσεται, ϗ τὸ πλοιάριον, ἀεὶ νέαν διαγώνιον καταγράφειν ἀναγκαζόμενον, ἰχνογραφήσει καμπύλην διὰ τῆς ἑαυτῦ ὁλικῆς κινήσεως περὶ τὴν ἕλκυσαν χεῖρα.

144. Πάντα τὰ γήϊνα σώματα πλαγίως τῷ ὁρίζοντι κινύμενα, ἐπεὶ ἐν ἑκάςῳ ἀκαρεῖ ἡ βαρύτης αὐτῶν καταναγκάζει αὐτὰ πρὸς τὸ κέντρον τῆς γῆς, ὅ ἐσι μόνιμον, ποικιλῶσιν ἀεὶ τὴν γωνίαν τῆς φορᾶς, τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς βαρύτητος ϗ τῆς τῷ ὁρίζοντι πλαγίας κινήσεως· ἀεὶ ἄρχ παραβαλεῖν ἐξέσαι τὴν αὐτῶν κίνησιν τῇ τῦ, περὶ ὃ εἴπομεν, πλοιαρίυ· ϗ τὸ μὲν τῆς γῆς κέντρον ἀνάλογον ἔσαι πρὸς τὴν δύναμιν τῆς ἑλκύσης χειρὸς, ἡ δὲ δύναμις τῆς πλαγίας κινήσεως πρὸς τὸ ῥέον ὕδωρ· ῥᾷσα τοίνυν καταυοεῖται, δι' ὅ, τι τὰ ἐν τῷ ἀέρι

πλαγίως τῷ ὁρίζοντι κινέμενα σώματα γράφουσι καμπύλας, ὧν ἡ κοιλότης ἔσραπται πρὸς τὸ τῆς γῆς κέντρον.

145. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἐν τῇ συνθέτῳ κινήσει α΄. αἱ δύω συνθετικαὶ δυνάμεις ΤΒ, ΤΓ (χ. 91) εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ἀντιστρόφως ὥσπερ τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν ΒΤΣ, ΓΤΣ τῶν περιεχομένων ὑπ' αὐτῶν τῶν δυνάμεων, καὶ τῆς ἐξ αὐτῶν συντιθεμένης ΤΣ, εἴτ' ἔν ἔσι ΤΒ : ΤΓ : : ἡμ. ΓΤΣ : ἡμ. ΒΤΣ· β΄. ἑκάση τέτων τῶν δυνάμεων ἔσι πρὸς τὴν συντιθεμένην, ὥσπερ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας, τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ἑτέρας συνθετικῆς δυνάμεως καὶ τῆς συντιθεμένης, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς περιεχομένης ἐξ ἀμφοτέρων τῶν συνθετικῶν δυνάμεων, εἴτ' ἔν ΤΒ : ΤΣ : : ἡμ. ΓΤΣ : ἡμ. ΓΤΒ.

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. $TB : T\Gamma :: \frac{TB}{2} : \frac{T\Gamma}{2}$ (Συμ. Λογ. 234)· ἀλλ' ἐν τῷ ΒΤΣ τριγώνῳ, $\frac{TB}{2}$ ἔσιν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ΤΣΒ γωνίας (Γεωμ. 496), καὶ δὴ ἡμίτονον τῆς ἐντὸς ἐναλλὰξ ΓΤΣ, καὶ $\frac{B\Sigma}{2} = \frac{T\Gamma}{2}$ ἔσιν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ΒΤΣ γωνίας· ἄρα ΤΒ : ΤΓ : : ἡμ. ΓΤΣ : ἡμ. ΒΤΣ.

β΄. $TB : T\Sigma :: \frac{TB}{2} : \frac{T\Sigma}{2}$· ἀλλὰ ΤΒ ἔσιν ἡμίτονον τῆς ΒΣΤ, καὶ δὴ τῆς ἐντὸς ἐναλλὰξ ΓΤΣ, καὶ $\frac{T\Sigma}{2}$ ἔσιν ἡμίτονον τῆς Β, καὶ δὴ τῆς ὑπὸ ΓΤΒ, ἥτις ἐσὶ παραπλήρωμα τῆς Β (Γεωμ. 235)· ἄρα ΤΒ : ΤΣ : : ἡμ. ΓΤΣ : ἡμ. ΓΤΒ, Ο. Ε. Δ.

146. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐκ τῶν τεσσάρων τέτων,

δύω συνθετικῶν δυνάμεων, καὶ δύω γωνιῶν, περιεχομένων ὑπ' αὐτῶν καὶ τῆς συντιθεμένης, τριῶν δοθέντων ἐν ἀριθμοῖς, τὸ τέταρτον διὰ μεθόδου τῶν τριῶν ῥᾴδια εὑρίσκεται· ἐὰν γὰρ τυχὸν γνωσὰ ὦσιν ἡ ΤΒ, ἡ γωνία ΓΤΣ, καὶ ἡ γωνία ΣΤΒ, εὑρεθήσεται ἐν ἀριθμοῖς ἡ ΤΓ διὰ τῆς ἀναλογίας· ἡμ. ΓΤΣ : ἡμ. ΒΤΣ : : ΤΒ : χ = ΤΓ.

147. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ε'κ τῶν τεσσάρων τέτων, μιᾶς τῶν δύω συνθετικῶν δυνάμεων, τῆς συντιθεμένης, τῆς γωνίας, ἢ περιέχεται ὑπὸ τῆς ἑτέρας δυνάμεως καὶ τῆς συντιθεμένης, καὶ τῆς ἐξ ἀμφοτέρων τῶν δυνάμεων περιεχομένης γωνίας, τριῶν δοθέντων ἐν ἀριθμοῖς, διὰ τῆς μεθόδε τῶν τριῶν εὑρεθήσεται ἡ τετάρτη· ἐγνωσμένων μὲν γὰρ τῆς πλευρᾶς ΤΒ, τῆς γωνίας ΣΤΣ, καὶ τῆς ὅλης γωνίας ΓΤΒ, εὑρεθήσεται ἡ συντιθεμένη ΤΣ ἐκ τῆς ἀναλογίας, ἡμ. ΓΤΣ : ἡμ. ΓΤΒ : : ΤΒ : ΤΣ· τἀναντίον δὲ γνωσῶν ὄντων τῆς ΤΣ, τῆς ὑπὸ ΓΤΒ καὶ μιᾶς μερικῆς τῆς ΣΤΣ, εὑρεθήσεται ἡ ΤΒ ἐκ τῆς ἀναλογίας, ἡμ. ΓΤΒ : ἡμ. ΓΤΣ : : ΤΣ : ΤΒ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ ἰσοταχῆς κινήσεως.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἰσοταχὴς μέν ἡ κίνησις λέγεται, ὅταν τὸ κινητὸν ἐν ἑκάστῳ ἀκαρεῖ προσκτᾶται βαθμὸν ταχυτῆτος ἴσον, ἰσοβραδὴς δὲ, ὅταν ἐν ἑκάστῳ ἀκαρεῖ ἀποβάλῃ βαθμὸν ταχυτῆτος ἴσον.

148. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ε'ν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει, αἱ ταχυτῆτες αὔξεσιν, ὡς οἱ χρόνοι.

ΔΕΙΞΙΣ. Κληθέντος ἰ τε τῆς ταχυτῆτος βαθμε, ὃν ἐκτήσατο τὸ κινητὸν ἐν τῷ πρώτῳ ἀκαρεῖ, ἐν τῷ δευτέρῳ αὖθις προσκτήσεται 1· καὶ δὴ ἐν τῷ τέλει τε δευτέρυ ἔξει δύω ταχυτῆτος· ἐν δὲ τῷ τέλει τε τρίτυ προσκτήσεται ὡσαύτως ϗ ἕτερον 1· ϗ δὴ ἔσονται 3, ϗ ἕτως ἑξῆς· ἄρα αἱ ταχύτητες αὔξεσιν, ὡς οἱ χρόνοι· Ο. Ε. Δ.

149. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ε'ν τῇ ἰσοταχεῖ ἄρα κινήσει αἱ ταχυτῆτες αὔξεσι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν πρόοδον ÷ 1. 2. 3. 4. 5 κτ.

150. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ε'ν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει τὰ διατρεχόμενα ἐν ἑκάσῳ τελευτῶντι χρόνῳ διασήματα αὔξεσι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν ÷ 1. 3. 5. 7. 9. 11. κτ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ταχυνέτω τὸ κινητὸν τὴν ἑαυτε κίνησιν ἐν λεπτοῖς 6, ϗ ἐμφαινέτω τετον τὸν χρόνον ἡ εὐθεῖα AB (χ. 92) διηρημένη εἰς ἓξ ἰσάλληλα μέρη A1 = 12 = 23 κτ. ἀφ' ἑκάσης δὲ διαδοχῆς ἐσάωσαν κάθετοι 2α, 2β, 3γ κτ, ὡς τὴν μὲν 2β διπλῆν εἶναι τῆς 1α, τὴν 3γ τριπλῆν τῆς 1α κτ.· ὑκῶν ἐν τοῖς ἑξῆς κειμένοις τριγώνοις A1α, A2β, A3γ κτ. προφανῶς ὁμοίοις, ἔσιν A1 : 1α : : α2 : 2β, ἢ A2 : 2β : : A3 : 3γ καὶ ἕτως ἐφεξῆς.

Ε'ὰν ἓν ἤδη ὑποτεθῇ ἡ μονὰς τε πεπερασμένυ χρόνυ, τε λεπτε κατὰ τὸ ἤδη προτεθὲν, διηρημένη εἰς ἄπειρα ἀκαριαῖα λεπτὰ, ϗ δὴ ἡ ταύτην ἐμφαίνυσα εὐθεῖα A1 εἰς ἄπειρα μέρη ἀπειροσά· ϗ ἐπὶ τέτοις ἐπινοηθῶσι κάθετοι τῇ A1 ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως, παρισάνυσαι ἑκάσῃ τὴν ταχύτητα, ἣν ἐκτήσατο τὸ κινητὸν ἐν ἑκάσῳ χρονικῷ ἀκαριαίῳ σημείῳ, ἐξ ὧν σύγκειται

τὸ λεπτόν· ἡ μὲν πρώτη τέτων τῶν καθέτων, ἡ πρώτη ταχυτὴς, ἀπειροσὴ ὖσα, ἔσαι ἡ κορυφὴ τῦ Αια τριγώνυ· πᾶσαι δὲ αἱ ἄλλαι αὐξήσυσι κατὰ τὴν ἄπειρον ἀριθμητικὴν πρόοδον $\frac{\cdot}{\cdot}$ 1.2.3.4.5.... ∞, ἧς ὁ ἔσχατος ὅρος ∞ σημανθήσεται διὰ τῆς ια βάσεως τῦ Αια τριγώνυ, ὃ ἐμφαίνει τὴν ταχυτῆτα, ἣν ἐκτήσατο τὸ κινητὸν τελευτῶντος τῦ πρώτυ λεπτῦ· πᾶσαι δε αἱ κάθετοι καλύψυσι τὴν ἐπιφάνειαν Αια, ᾗ ἐμφανῆσι τὰς ταχυτῆτας, ἃς τὸ κινητὸν προσεκτήσατο ἐν πᾶσι τοῖς ἀκαριαίοις λεπτοῖς, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ λεπτὸν, ᾗ δὴ πάντα τὰ διασήματα, ἃ διήνυσεν ἐν τῷ πρώτῳ λεπτῷ (110).

Α᾽λλ᾽ ἐρεῖτις τυχόν· ἐκάσης τῶν ἐφεξῆς εὐθειῶν ὑποτιθεμένης μείζονος, ἢ ἡ πρὸ αὐτῆς, εἶτ᾽ ἂν ἡ ἐμφαίνυσα τὴν ἀκαριαίαν ταχύτητα, ἐναπολειφθήσεται διασημάτιόν τι τριγωνικὸν ἀκάλυπτον ταῖς εἰρημέναις εὐθείαις· ὑποτιθέμεναι, φέρ᾽ εἰπεῖν, αἱ ια, 2β ἀπείρως ἀλλήλων ἐγγίζυσαι, καταλείψυσι τὸ αχβ διασημάτιον ὅλως ἀκάλυπτον, ᾗ δὴ τὸ ἄθροισμα πασῶν τέτων τῶν εὐθειῶν ἐ καλύψει πᾶσαν τὴν ἐπιφάνειαν τῦ τριγώνυ Αια· ἀλλὰ ά. ἐν τῷ Αια τριγώνῳ ἧ τὸ ὕψος Αι διήρηται εἰς ἄπειρα μέρη, ἡ πρώτη ταχυτὴς, ἣν ἐμφαίνει τὸ βχ, ἔσιν ἀπειροσή· β΄. τὸ ὕψος αχ ᾗ αὐτό ἐσιν ἀπειροσὸν, τῶν ια, 2β προσεχεξάτων ὑποτεθεισῶν· ἐκῆν τὸ αβχ τρίγωνον γινόμενον ἐκ τῦ ἀπειροσῦ βχ, ᾗ τῦ ἀπειροσῦ $\frac{\alpha\chi}{2}$ (Γεωμ. 285 Τόμ. Β΄.) ἔσαι ἀπειροσὸν δευτεροταγὲς (Συμβ. Λογ. 527 Τόμ. Β΄.), ὃ ὡς ἐδὲν λογίζεται πρὸς τὸ πρωτοταγὲς ἀπειροσὸν ὃ καλύπτυσιν αἱ δύω εὐθεῖαι ια, 2β (Συμβ. Λογ. 529)· δυνατὸν ἄρα εἰπεῖν ὡς πᾶσαι αἱ ταχυτῆτες, ᾗ δὴ πάντα τὰ διανυόμενα διασήμα-

τα, ἐν ἐκάςῳ ἀκαρεῖ, καὶ ἐν ὅλῳ τῷ λεπτῷ, παρίςανται ἀκριβῶς διὰ τῆς ἐπιφανείας τοῦ Αια τριγώνου.

Ε'ὰν δὲ ὡσαύτως διαιρεθῇ καὶ τὸ δεύτερον λεπτὸν, καὶ δὴ τὸ μέρος 12 τῆς ΑΒ, καὶ ἐπ' αὐτοῦ ἐγερθῶσι προσεχέςαται κάθετοι, καὶ αὔξουσαι πᾶσαι ἐκ διαδοχῆς τῷ ἀπειροςῷ ποσῷ, ὃ παρίςατο κατὰ τὸ Α, εἶτ' ἐν τῇ πρώτῃ ἀπειροςῇ ταχυτῆτι, αὗται καλύψουσιν ἀκριβῶς τὸ τραπέζιον 1α2β· ἡ δ' ἐπιφάνεια τοῦδε τοῦ τραπεζίου ἐμφανεῖ ἀκριβῶς τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ταχυτήτων, ἃς ἐκτήσατο τὸ κινητὸν ἐν τῷ ἐφεξῆς λεπτῷ, καὶ δὴ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν διανυσθέντων διαςημάτων (143). Κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ τραπέζιον 23βγ παριςᾷ πάσας τὰς ταχυτῆτας, καὶ δὴ τὰ διανυσθέντα διαςήματα τοῦ τρίτου λεπτοῦ, καὶ ἕτως ἑξῆς.

Ε'ὰν ἓν ἤδη ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι αΔ, βη κτ. παράλληλοι τῇ Αζ, πάντα τὰ τριγωνίδια 1αχ, κτ. ἴσα ἔσονται τῷ τριγώνῳ Αια, ἔξουσι γὰρ ἕκαςον τὰς ἑαυτοῦ πλευρὰς ἴσας ἑκάςῃ ἑκάςῃ τῶν ἐν τῷ Αια, καὶ δὴ ἰσάλληλα ἔσονται· τοῦ ἓν τριγώνου Αια παριςῶντος τὸ ἐν τῷ πρώτῳ λεπτῷ διανυσθὲν διάςημα, τὸ τραπέζιον 1α2β παραςήσει τρία τέτων τῶν τριγώνων, καὶ δὴ διαςήματα 3 ἴσα ἕκαςον τῷ πρώτῳ, διανυσθέντα ἐν τῷ ἐφεξῆς πρώτῳ λεπτῷ· τὸ δὲ 23βγ τραπέζιον ἐμφαίνει τὸ ἐν τῷ τρίτῳ λεπτῷ διανυσθὲν διάςημα ὂν 5, καὶ ἑξῆς ὡσαύτως· ἄρα ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει τὰ διανυόμενα διαςήματα ἐν χρόνοις πεπερασμένοις αὔξουσι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν ÷ 1.3.5.7.9. κτ. Ο.Ε.Δ.

151. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Τὰ διανυόμενα διαςήματα τελευτώντων τῶν χρόνων, εἰσὶν ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων τῶν δαπανηθέντων· ἐν γὰρ τῷ 92 χήμ.

τὸ μὲν πρῶτον λεπτὸν ὁρίζεται παρὰ τῆ τριγώνῳ Α ια· τὸ δ' ἐπὶ τῆ τέλῳς τῆ ἐφεξῆς λεπτῆ διανυσθὲν διάσημα ἐμφαίνεται ὑπὸ 4 ἴσων τριγώνων· τὸ δ' ἐς τέλος τῆ τρίτῳ, ὑπὸ 9 τριγώνων, ἢ ἐφεξῆς ἔτως· τὰ διανυόμενα ἄρα διαστήματα εἰσὶν ὡς τὰ τετράγωνα 1, 4, 9, 16, 25 κτ. τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων 1, 2, 3, 4, 5 κτ.

152. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Τὰ διανυόμενα διαστήματα εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ταχυτήτων τετράγωνα· ἐν γὰρ τῆ ἰσοταχεῖ κινήσει αἱ ταχύτητες εἰσὶν ὡς οἱ χρόνοι (148)· τὰ δὲ διαστήματα εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων τετράγωνα· εἰσὶν ἄρα καὶ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ταχυτήτων (Συμβ. Λογ. 263)· ἐὰν ἓν κληθῶσι δύω τινὰ διαστήματα δ, Δ ἐν δυσὶ χρόνοις διανυόμενα τοῖς χ, Χ, ἔσαι δ : Δ :: χ^2 : X^2 :: τ^2 : T^2.

153. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἐντεῦθεν ἄρα χ : Χ :: $\sqrt{\delta}$: $\sqrt{\Delta}$ :: τ : Τ, εἴτ' ἓν οἱ χρόνοι, ἢ αἱ ταχυτῆτες, ἔσονται ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν διανυομένων διαστημάτων. κληθείσης γὰρ 1 τῆς ταχυτῆτος 1α, τῆς προσκτηθείσης ἐν τῷ τέλει τῆ πρώτῳ λεπτῆ, ἡ προσγενομένη ταχυτὴς ἐν τῷ τέλει τῆ ἐφεξῆς λεπτῆ, ἥτις ἐσὶ 2β διπλῆ τῆς 1α, κληθήσεται 2, ἢ 3γ κληθήσεται 3, ἢ ἔτως ἐφεξῆς· ἀλλ' ὕπερθεν μὲν τῆς εὐθείας 1α οὐδέν ἐσι μόνον τρίγωνον, τέσσαρα δὲ ὕπερθεν τῆς δευτέρας, 9 ὕπερθεν τῆς τρίτης κτ.· οἱ χρόνοι ἄρα, ἢ αἱ ταχυτῆτες 1, 2, 3 εἰσὶν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν διανυομένων διαστημάτων 1, 4, 9 κτ.

154. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἵν' ἓν εὑρεθῆ τὸ διανυσθὲν διάσημα δεδομένῳ τινὸς χρόνῳ τελευτῶντος τετάρτῳ τυχὸν λεπτῷ, ληπτέον τὸν ἀπ' αὐτῷ τετράγωνον ἀριθμὸν, εἴτ' ἓν τὸν 16, ἢ ἑξῆς ὁμοίως.

155. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Τὸ ὁλικὸν διάσημα, ὃ διανύει σῶμα ἰσοταχῶς κινέμενον ἐν χρόνῳ ὡρισμένῳ, ἥμισυ μέν ἐσι τοῦ διανυομένου ὑπὸ σώματος ἰσομερῶς κινουμένου ἰσχύει ἴσῃ τῇ, ἣν τὸ ἰσοταχῶς κινέμενον προσκτᾶται ἐν τῷ τέλει τοῦδε τοῦ χρόνου· εἰ γὰρ τὸ κινητὸν ἐν 6 λεπτοῖς εἶχε τὴν ἰσομερῆ ταχύτητα τὴν ἐμφαινομένην ὑπὸ τῆς εὐθείας 6ζ, ἣν ἐκτήσατο ἐν τῷ τέλει τοῦ ἕκτου λεπτοῦ, πᾶσαι ὁμοῦ αἱ ταχύτητες, ἢ τὰ διανυόμενα διαστήματα, συνισαῖεν ἂν τὸ ἐντελὲς τετράγωνον Α6πζ, ὃ προφανῶς ἐσι διπλοῦν τοῦ τριγώνου Α6ζ.

156. ΠΟΡΙΣΜΑ ς΄. Ἐν τῇ ἰσοβραδεῖ κινήσει αἱ τοῦ κινητοῦ ταχυτῆτες μεθ' ἕκασον λεπτὸν μειοῦνται, κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν μειουμένην πρόοδον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ÷ 6.5.4.3.2.1· ἐμφανομένης γὰρ τῆς ἐν τῷ πρώτῳ λεπτῷ ταχυτῆτος διὰ 6ζ, ἡ ἐφεξῆς ταχυτὴς τοῦ ἑπομένου λεπτοῦ ἔσαι 5ε, ἢ 5, ἡ δὲ τρίτη, 4, κτ, ἡ δὲ μετὰ τὸ ἕκτον λεπτὸν, ἔσαι 1α = 1.

157. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Ἐν τῇ ἰσοβραδεῖ κινήσει τὰ ἐν ἑκάστῳ λεπτῷ διανυόμενα διαστήματα μειοῦνται, κατὰ τὴν μειουμένην ἀριθμητικὴν πρόοδον τῶν περιττῶν ἀριθμῶν ÷ 11.9.7.5.3.1· ὑποτιθεμένης γὰρ ἀεὶ τῆς πρώτης ταχυτῆτος 6ζ, τὸ ἐν τῷ πρώτῳ λεπτῷ διανυόμενον διάστημα ἐμφανεῖσιν 11 τρίγωνα, ἐμπεριεχόμενα τῷ τραπεζίῳ 6ζ5ε· τὸ δὲ διανυόμενον ἐν τῷ ἐφεξῆς, τὰ ἐν τῷ 5ε4β τραπεζίῳ 9 τρίγωνα, ᾗ ἔτως ἐφεξῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ κινήσεως τῶν βαρέων.

158. Βάρος σώματος γηΐνε ἔσιν ἰδιότης, καθ' ἣν τὸ σῶμα ἐπείγεται πρὸς τὸ κέντρον τῆς γῆς· φανήσεται δὲ ἐν τοῖς ἐφεξῆς, ὡς ἔσιν ἀνάλογον τῇ μάζῃ τε σώματος· αἱ φωναὶ δὲ βάρος καὶ βαρύτης σχεδόντι συνωνυμέσι, παρ' ὅσον, ἡ μὲν βαρύτης τὴν ῥοπὴν ἁπλῶς ἐμφαίνει τε κατιόντος σώματος, τὸ δὲ βάρος τὸ ἄθροισμα τῶν βαρυτήτων τῶν μορίων, ἐξ ὧν συντίθεται ἡ μάζα τε σώματος.

159. Σταθμὸς ἡ δύναμίς ἐσιν ἡ ἀντιτιθεμένη σώματι βαρεῖ, ἐφ' ᾧ κωλύσει αὐτε τὴν κάθοδον· λέγεται ἔτω σώματι σταθμὸν ἔλκειν λίτρας τυχὸν, ὅταν ἐν θατέρᾳ πλάσιγγι αὐτε τιθεμένε, ἐν θατέρᾳ δέῃ μάζαν λίτρας μιᾶς ἀντιθέσθαι, ἵν' εἶεν ἰσόσταθμα.

160. Βαρύτης εἰδικὴ σώματος ἔσιν ἡ ἐν τῷ αὐτῷ ὄγκῳ σωμάτων διαφόρων ὁλικὴ σταθμῶν διαφέρεσα (75)· ἔτω δάκτυλος κυβικὸς χρυσε βάρος ἕλκει, λόγον ἔχον πρὸς βάρος δακτύλε κυβικε ὕδατος ὃν 19 : 1· ἡ ἄρα εἰδικὴ βαρύτης ἀνάλογός ἐσι τῇ μάζῃ τῇ ἐν τῷ αὐτῷ ὄγκῳ περιεχομένῃ.

161. Ἀλλὰ γὰρ ἡ τῶν σωμάτων πυκνότης ἐν τέτῳ, ὡς εἴδομεν (75), κεῖται, ἐν τῷ περιέχειν αὐτὰ πλείω ἢ ἐλάττω μάζαν ἐν τῷ αὐτῷ ὄγκῳ, ᾧ ἔσιν ἀνάλογος τῇ μάζῃ, ἄρα ἡ εἰδικὴ βαρύτης ἀνάλογός ἐσι τῇ πυκνότητι (Γεωμ. 327).

162. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἀρθείσης τῆς τῶν μέσων

ἀντιςάσεως, πάντα τὰ βαρέα ἐν ἴσῃ ταχυτῆτι κατενεχθήσονται.

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. Ἐν γὰρ τῷ κενῷ τῆς πνευματικῆς ἀντλίας τὰ κεφότατα σώματα ἀφιέμενα, οἷον πτερὰ, πάμβαξ κτ, ϗ τὰ βαρύτατα δὲ ἅμα, οἷον μόλυβδος, χρυσὸς κτ, ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ εἰς τὴν βάσιν τοῦ δοχείου ἀφικνοῦνται, ϗ δὴ κατίασι ταχυτῆτι ἴσῃ.

β΄. Κείσθω δὲ τὸ βάρος τοῦ μολύβδου ἔχειν πρὸς τὸ τοῦ πάμβακος, ὡς 10 : 1, ἔξει ἄν ϗ ἡ μάζα πρὸς τὴν μάζαν ὡς 10 : 1· δυνατὸν τοίνυν κατ' ἐπίνοιαν διελεῖν τὸν μόλυβδον εἰς 10 μόρια ἰσάλληλα, ϗ δὴ ἴσα τῇ μάζῃ τοῦ πάμβακος· ἰδὲ δὴ 11 μόρια ὕλης, 10 μὲν μολύβδου, 1 δὲ πάμβακος, ἅμα ἀφίενται ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ δοχείου· ἐπεὶ δὲ ἡ μάζα τοῦ πάμβακος τοσοῦτον ἔλκει ῥαθμὸν, ὅσον ἓν δεκατημόριον τοῦ μολύβδου, ἡ βαρύτης τὴν αὐτὴν ταχυτῆτα ἐμποιήσει ἀμφοτέροις· ἀκεῖν ἡ βαρύτης ἐπίσης ἀμφοτέροις ἐπενεργήσει, ϗ ἕκαστον δεκατημόριον τοῦ μολύβδου, ἔτε βράδιον, ἔτε τάχιον, κατενεχθήσεται τῆς τοῦ πάμβακος μάζης· ἀλλ' ὅλος ὁ μόλυβδος ἀ δύναται κατιέναι τάχιον ἑκάστου τῶν αὐτοῦ μορίων· ἄρα, ἀφαιρεθείσης τῆς ἀντιςάσεως τῶν μέσων, ὁ μόλυβδος ἔτε τάχιον ἔτε βράδιον κάτεισι τοῦ πάμβακος. Ο. Ε. Δ.

163. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὸ βάρος τῶν σωμάτων ἔςιν ἀνάλογον τῇ μάζῃ· ἐν ἴσῳ γὰρ χρόνῳ κάτισι τά τε βαρύτερα ϗ τὰ ἡττοβαρῆ, ἴσον ὄγκον ἔχοντα, ἀρθείσης τῆς ἀντιςάσεως (ἀνωτ.)· ἀλλ' ὁ μόλυβδος, δεκαπλῆν ἔχων μάζαν ὕδατος ἐν τῇ αὐτῇ ταχυτῆτι ἕξει ποσότητα κινήσεως δεκαπλῆν τοῦ ὕδατος· τοῦ γὰρ ὕδατος ἡ ποσότης τῆς κινήσεως ἔσαι 1 μάζα πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ ταχυτῆτα 1, ἴση 1 (115), τοῦ μολύβδου τῆς κατὰ τὴν κίνη-

σιν ποσότητος ἴσης 10 × 1, ὕλης ἀμέλει ἐπὶ ταχυτῆτα = 10· ἐντεῦθεν ἄρα, ἡ ποσότης τῆς κινήσεως τῦ μολύβδυ καὶ τῦ ὕδατος ἀποτέλεσμά εἰσι τῦ ἀυτῶν βάρυς· ἀλλ' ἡ ποσότης τῆς κινήσεως τῦ μολύβδυ πρὸς τὴν τῦ ὕδατος ἔσιν ὡς 10 : 1· ἄρα τὸ βάρος τῦ μολύβδυ ἔσι δεκαπλάσιον τῦ κατὰ τὸ ὕδωρ τὸ δεκαπλῶν· ἐπεὶ ὃν ἐκεῖνο πρὸς τῦτο ἔσιν ὡς 10 : 1· ἄρα εἰσὶν ἀνάλογα ταῖς μάζαις.

164. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Η σώματος βαρέος ταχυτὴς ἐκ ἔσιν ἀνάλογος τῇ μάζῃ ἢ τῷ βάρει τῦ δε τῦ σώματος· ᾗ γὰρ τῶν μέσων ἀρθέντων, τὸ 100 λιτρῶν, φέρ' εἰπεῖν, μάζαν ἔχον, ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ πεσεῖται, ᾗ σῶμα, ἓ μάζα λίτρας μιᾶς (162).

Α'λλ' ἔσω τῇ μάζῃ ἀνάλογος· ἐκῦν ἡ ταχύτης τῦ 100 λίτρας ἕλκοντος πρὸς τὴν τῦ 1 ἕσαι ὡς 100 : 1· 100 δὲ μόρια μάζης πολλαπλασιαζόμενα ἐπὶ 100 ταχυτῆτος ποιῦσι 10000 ποσότητος κινήσεως σώματος 100 λιτρῶν, ὅτε 1 μάζης ἐπὶ ἓν ταχύτητος ποιεῖ 1 ποσότητος κινήσεως σώματος μιᾶς λίτρας· ἀλλὰ τὸ ἀποτέλεσμα ἀνάλογον εἶναι ὀφείλει τῇ αἰτίᾳ· ἐπεὶ ἓν τὸ βάρος αὐτῶν ἔσιν ἡ αἰτία τῆς κατὰ κίνησιν αὐτῶν ποσότητος, τῶν βάρεων ὄντων ὡς 100 : 1, ᾗ αἱ ποσότητες τῶν κατ' αὐτὰ κινήσεων ἀναγκαίως ἔσονται ὡς 100 : 1, ἐχὶ δὲ ὡς 10000 : 1· ἡ ἄρα ταχυτὴς τῶν σωμάτων τῇ μάζῃ ἐκ ἔσιν ἀνάλογος.

165. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Δῆλον ἄρα ἐντεῦθεν, ὡς ἡ ταχυτὴς τῶν βαρέων ἐδόλως ἐξῆπται τῆς αὐτῶν μάζης.

166. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ε'πεὶ σῶμα μεῖον ἑτέρυ, κόκκος φέρε ψάμμυ παραβαλλόμενος πρὸς ὅλον λίθον, ᾗ σῶμα εἰδικῶς ἑτέρυ κυφότερον, πάμβακος φέρε μέρος

πρὸς σφαιρίδιον μολυβδῦν παραβαλλόμενον, ὀφείλυσι πίπτειν κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα, ϗ ἐνεργείᾳ πίπτυσιν ἐν τῷ κενῷ δοχείῳ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον· ἐὰν ἄρα ὁρῶμεν σῶμα παχύτερον καταπίπτον τάχιον ἢ σῶμα λεπτότερον, ἰσοβαρῆ ἄμφω εἰδικῶς, ϗ σῶμα εἰδικῶς βαρύτερον ἄλλυ, λίθον φέρε τάχιον πίπτοντα, ἢ κόκκον ψάμμυ, ϗ σφαῖραν μολυβδίνην τάχιον, ἢ μέρος πάμβακος· τὴν διαφορὰν ταύτην ἀποδοτέον τῇ διαφόρῳ ἀντισχέσει τῶν μέσων, δι' ὧν κινῦνται, φέρ' εἰπεῖν, τῷ ἀέρι.

167 ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἡ βαρύτης τῶν σωμάτων ἔσιν ἡ αὐτὴ ἀπὸ διαφόρων ὑψῶν ἰσοδιεσώτων τῦ ἐξισωτῦ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔ"ςωσαν δύω χῶροι, ὧν ἄτερος θατέρυ εἴη ὑψηλότερος κατὰ τὸ χιλιαπλῦν, εἴτ' ἓν ὀργυὰς 1000· λίθος ἓν ἄφετος ἀφ' ἑκατέρων τῶν ὑψωμάτων διανύει, ἐν ἑνὶ τυχὸν λεπτῷ, τὸ αὐτὸ αἰσθητῶς διάσημα, δὸς εἰπεῖν πόδας 15· τῆς δὲ ἑκάςυ ἀτόμυ, ἐξ ὧν ὁ λίθος σύγκειται, βαρύτητος ἐμποιούσης αὐτῷ ταχυτῆτα αἰσθητῶς τὴν αὐτὴν ἐν τοῖς δυσὶ χώροις, ἡ βαρύτης τῦ λίθυ ἐκληφθήσεται αἰσθητῶς ἡ αὐτή.

Παρὰ ταῦτα δέ· ἐπεί περ, ὡς ἐν τοῖς ἐφεξῆς ὀψόμεθα, ἡ βαρύτης πάντων τῶν τε γηΐνων ϗ τῶν ἐρανίων σωμάτων τῶν ἡμῖν γνωρίμων ἐν λόγῳ ἐσὶν ἀντιςρόφῳ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ἀποσημάτων, ἃ ἀπέχει τὸ σῶμα τῦ τῆς βαρύτητος κέντρυ, τυτέσι σῶμα τῦ κέντρυ ἀπέχον ὡς 2 βαρύτητα ἔχει ἐλαττυμένην ὡς 4, ἀπέχον δὲ ὡς 3, ὡς 9, ϗ ἕτως ἑξῆς· κέντρον δὲ τῶν βαρέων, ὡς ὀψόμεθα, ἔσιν ἐπὶ τῆς γῆς, αὐτὸ τὸ τῆς γῆς κέντρον περίπυ· ὁ δὲ ταπεινότερος χῶρος, ὃν εἰρήκαμεν, ἀπέχει τῦ κέντρυ τῆς γῆς ἀκτῖνα μίαν γηΐνην, εἴτ' ἓν λέυγας 1432 ½· ἐπεὶ τοίνυν εἰσὶ χίλιαι ὀργυαὶ περίπυ ἴσαι ἡμι-

λευγίῳ, ὁ ὑψηλότερος χῶρος ἀπέχων ἔσαι τῦ κέντρυ τῆς γῆς λεύγας 1433· ἄρα ἡ βαρύτης τῦ λίθυ ἐν τῷ ὑψηλοτέρῳ χώρῳ πρὸς τὴν τῦ αὐτῦ ἐν τῷ ταπεινοτέρῳ

$\overline{\quad}^2$ $\overline{\quad}^2$

ἔσαι ὡς $1432\frac{1}{2}$: 1433 :: $2052056\frac{1}{4}$: 2053489· ἐπεὶ δὲ ἡ μεταξὺ τέτων τῶν δύω ποσοτήτων διαφορὰ ἔσιν $\frac{1}{1432}$, ἡ ἐν τῷ ὑψηλοτέρῳ χώρῳ βαρύτης τῦ λίθυ τῆς τῦ ἐν τῷ ταπεινοτέρῳ ἐλάττων ἔσαι τῷ $\frac{1}{1432}$, ἡ δὲ διαφορὰ αὕτη ἔτι βραχυτέρα ἔσαι, διενθυμηθεῖσιν, ὡς τῦ ἀέρος πυκνοτέρυ ὄντος ἐν τῷ ταπεινοτέρῳ χώρῳ, ἐνταῦθα πλεῖον ἀπόλλυσι τῆς ἑαυτῦ βαρύτητος ὁ λίθος, ἵνα ἰσόσαθμος ᾖ τῷ ἀέρι, ἐν δὲ τῷ ὑψηλοτέρῳ ἔλαττον διὰ τῶν ἐναντίον λόγον· ὁ ἄρα λίθος ἑκατέρως τῇ αὐτῇ πεσεῖται ταχυτῆτι. Ο. Ε. Δ.

168. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ε'ν δυσὶ χώροις τῆς γῆς, ὧν ἡ διαφορὰ τῆς ἀπὸ τῦ ἰσωτῦ ἀποσάσεως μὴ ἦ λίαν μεγάλη, ἡ βαρύτης τῦ σώματος ἔσαι ἡ αὐτή.

ΔΕΙΞΙΣ. Ε'κ γὰρ πείρας εἰ λίθος ἐν Παρισίοις διατρέχει πόδας 15 ἐφ' ἑνὸς λεπτῦ δευτέρυ, ὡσαύτως τὸ αὐτὸ διάσημα διανύσει αἰσθητῶς ἐν ἑνὶ δευτέρῳ λεπτῷ λεύγας τινὰς ἄπο τῶν Παρισίων, εἴτε πρὸς τὸν ἰσωτήν, εἴτε πρὸς τὸν πόλον· ἀνάγκη δὲ τὸ τοιῦτο ἕτως ἔχειν· εἰ γὰρ σφαῖρα ἀκριβὴς εἴη ἡ γῆ, μηδὲ περιάγοιτο περὶ τὸν ἑαυτῆς ἄξονα, ἡ βαρύτης τῶν σωμάτων εἴη ἂν ἡ αὐτὴ ἐν ἅπαντι σημείῳ τῆς γῆς· ἀλλὰ ταῦτα ἀμφότερα ποικίλλυσι τὴν βαρύτητα, ὡς ὀψόμεθα, ϗ κυρίως εἰπεῖν ἡ βαρύτης τῦ αὐτῦ σώματος ἐν διαφόροις ἀποσήμασι τῦ ἐξισωτῦ ἐδέ ποτε ἔσιν ἡ αὐτή· ἐπεὶ ἓν ἥτε γῆ ἐλλείπει τι τῦ εἶναι ἀκριβὴς σφαῖρα, ϗ δύω χῶροι προσεχεῖς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς περισρέφονται περὶ τὸν τῆς σφαί-

ρας ἄξονα, ταῦτ' ἄμφω ἐπὶ σωμάτων βραχύτι ἀπεχόντων τῷ ἰσωτῷ ἐδ' αὔξεσι ἐδὲ σμικρύνεσι τὴν βαρύτητα τῶν σωμάτων ποσότητος ὡρισμένης. Ο. Ε. Δ.

169. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ε'ν ἄρα τῇ Μηχανικῇ ὑποθετέον ἀδεῶς σῶμάτι, ἐν διαφόροις μέρεσιν ὂν τῆς μηχανῆς, τὴν αὐτὴν ἔχειν ἀεὶ βαρύτητα, καί τοι κείμενον ὑψηλότερον, ἢ ταπεινότερον, προσεχέτερον, ἢ ἀπέχον μᾶλλον τῷ ἰσωτῷ.

170. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Η' βαρύτης τῶν γηΐνων σωμάτων πάντων κατεπείγει αὐτὰ μονονὲ πρὸς τὸ τῆς γῆς κέντρον.

ΔΕΙΞΙΣ. Τὰ γὰρ σώματα τῆς γῆς ἀεὶ διὰ τῆς ἐαυτῶν βαρύτητος φέρονται τὴν κάθετον τῷ ὁρίζοντι φοράν· εἴπερ ἓν ἀκριβὴς ἦν σφαῖρα ἡ γῆ, ἐπεὶ αἱ τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτῆς κάθετοι εὐθεῖαι ἀκτῖνές εἰσιν αὐτῆς προεκβεβλημέναι, συνιοῦσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ κέντρον, πάντα τὰ βαρέα ἐφέροντ' ἂν ἀκριβῶς πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· ἀλλ' ἡ γῆ παρὰ βραχὺ ἔσι σφαῖρα, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς δῆλον ἔσαι· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

171. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ φοραὶ τῶν βραχύτι ἀλλήλων ἀπεχόντων βαρέων, αἱ φοραὶ φέρε δύω σπαρτίων, ὧν ἑκατέρᾳ τῷ πέρατι βάρη προσήρτηνται, ὀργυὰν ἀπεχόντων, ἢ δύω κιόνων οἰκοδομήματος, ὡς παράλληλοι εἰσὶν ἐκληπτέαι· τοιαῦτα γὰρ δύω σπαρτία ἐχέτωσαν μῆκος ὀργυᾶς μιᾶς· ἵν' ἓν ἀλλήλοις συμπέσωσιν, ἐξαδενῶσαι δεῖ τὸ μεταξὺ ὀργυᾶς ἀπόσημα, προαχθέντων ἐς τὸ κέντρον τῆς γῆς, εἴτ' ἓν λεύγας $1432\frac{1}{2}$ = ὀργ. 3268965· τῶν ἓν σπαρτίων, ἢ τῶν κιόνων, ὀργυᾶς μήκος ἐχόντων, τὰ δύω αὐτῶν κατωτέρω πέρατα ἐκ' ἔσονται προσεχέτερα τῶν ὑπερτέρων περάτων, ὅτι μὴ τῷ

$\frac{3}{2}\frac{2}{8}\frac{8}{9}\frac{1}{8}\frac{5}{5}$ ὀργυᾶς· διὰ τᾶυτ' ἄρα ἐν τῇ Μηχανικῇ ἐκλιπτέον τὰς φορὰς τῶν δύω βαρέων ὡς παραλλήλως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τῆς ταχυνομένης κινήσεως τῶν βαρέων.

172. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Τὰ βαρέα κατίασι διὰ κινήσεως ταχυνομένης.

ΔΕΙΞΙΣ. Ὅσῳ ἀφ' ὑψηλοτέρων λίθος πίπτει, ᾧ δὴ ὅσῳ πλείω χρόνον ἀναλίσκει κατιὼν, τοσούτῳ ἰσχυρότερον πλήττει πεσών· ἀλλ' εἴπερ ἡ ταχύτης μὴ ἤυξανεν ἐν τῇ καθόδῳ, ἐκ ἂν ἔπλητττεν ὁ λίθος ἰσχυρότερον πίπτων ἀφ' ὕψους ὀργυῶν 100, ἢ ὕψους μιᾶς· ᾧ γὰρ, ἐπεὶ ἡ τοῦ λίθου βαρύτης ἡ αὐτή ἐσιν ἔντε τῷ 100 ὀργυῶν ὕψει, καὶ ἐν τῷ μιᾶς (167), ἡ ταχυτὴς αὐτοῦ προαγομένη ὑπὸ τῆς βαρύτητος ἡ αὐτή ἐσιν ἔντε τῇ ἀρχῇ τῶν 100, ᾧ ἐν τῇ τῆς μιᾶς ὀργυᾶς· εἰ ἄρα μὴ ηὔξανε κατιόντος, ἔμενεν ἂν ἔτι ἡ αὐτὴ ᾧ ἐν τῇ πτώσει τοῦ λίθου ἀφ' ἑκατέρου ὕψους· ἀλλ' εἴπερ ὁ λίθος τὴν αὐτὴν ἔχων μάζαν, τὴν αὐτὴν ἔχει ᾧ ἰσχὺν ᾧ ταχύτητα, ἡ ποσότης τῆς αὐτοῦ κινήσεως ἣν ἂν ἡ αὐτὴ (115)· ᾧ πλήττειν ἄρα ἔδει τῇ αὐτῇ ἰσχύϊ ἀπό τε τῶν μετεωροτάτων καταφερόνον, ᾧ τῶν ὅσον ἐκ ἀπεχόντων τῆς ἐφανείας· ἀντίκειται δὲ τοῦτο τῇ καθ' ἡμέραν πείρᾳ, ἀναγκαίως ἄρα συνάγειν δεῖ, ὅτι τὰ βαρέα κατιόντα ἄυξησιν αὐτῶν τὴν ταχύτητα. Ο. Ε. Δ.

173. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Αἱ κίνησις τῶν διὰ τῆς ἑαυτῶν βαρύτητος κινωμένων ἔσιν ἰσοταχής.

ΔΕΙΞΙΣ. Ὁ Γαλιλαῖος τὸ πρῶτον ἀπεκάλυψε διὰ

πολλῶν πειραμάτων, ὅτι τὰ βαρέα διανύσι διὰ πολλῶν ἐξῆς δευτέρων λεπτῶν διασήματα κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον ÷ 1 . 3 . 5 . 7 κτ, ϗ δὴ τὰ διανυόμενα διασήματα ἐκ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεως μέχρι τέλυς αὐτῆς εἶεν ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων· τὰ αὐτὰ πειράματα εἶτα ϗ ὑπ' ἄλλων Φυσικῶν ἐπαναληφθέντα τὰ αὐτὰ ἀεὶ ἀπετέλεσαν· ἀλλ' ἐν τῷ 92 χήματι τὰ ἑκάσυ χρόνυ διασήματα ὰ δύναται αὔξειν κατὰ τὰς περιττὰς ἀριθμὰς 1, 3, 5 κτ., ϗ τὰ ἀθροίσματα τῶν διασημάτων ὰ δύνανται πρὸς ἄλληλα ἔχειν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων διασήματα, εἰμὴ τὰ ϛοιχεῖα τῦ ὅλυ τριγώνυ ΑΒζ, ἃ παρισῶσι τὰς προσγινομένας ταχυτῆτας, αὔξωσιν ἰσοταχῶς· εἰ μὴ γὰρ αἱ ἰσοδιεξῶσαι κάθετοι 1α, 2β, 3γ, αὔξωσιν ἅπασαι ἐπίσης, ὰ δύνανται ὁριωθῆναι ὑπὸ τῆς Αζ εὐθείας ἀκριβῶς, καλύψαντα τὸ τριγωνικὸν διάσημα ΑΒζ· ἄρα αἱ ταχύτητες τῶν βαρέων αὔξυσιν ἰσοταχῶς. Ο. Ε. Δ.

174. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πάνθ', ἃ γενικῶς δέδεικται περὶ τῆς ἰσοταχῦς ϗ ἰσοβραδῦς τῶν κινήσεων, λοιπὸν ἂν εἴη δεῖξαι περὶ τῆς κινήσεως τῶν βαρέων σωμάτων, ἀνιόντων, ἢ κατιόντων.

175. α' Αἱ ταχύτητες, ἀρθέντος παντὸς κωλύματος, ἃς κτᾶται τὸ κινούμενον μεθ' ἕκασον ἐξῆς λεπτὸν, αὔξυσι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ÷ 1 . 2 . 3 . 4 κτ. (149).

176. β'. Τὸ ὁλικὸν διάσημα, ὃ διανύει σῶμα κατιὸν, τελευτῶντος τινὸς χρόνυ, ἥμισύ ἐσι τῦ διανυομένυ διὰ κινήσεως ἰσομερῦς, ϗ ἴσης τῇ προσγινομένῃ τελευτῶντος τῦδε τῦ χρόνυ (155).

Τοιάδε γάρ ἐσιν ἡ ταχύτης βαρέος τινὸς, λίθυ φέρ' εἰπεῖν, διανύοντος πόδας περίπυ 15 ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέ-

ρω· ἀλλ' ἐν τέτῳ ἐκτήσατο ταχύτητα, δι' ἧς ἂν διανύσειε 2 × 15 πόδας = 30 ἐν ἑνὶ δευτέρῳ, εἰ ἐκινεῖτο ἰσομερῶς κατὰ ταύτην τὴν ταχύτητα· ἐὰν δὲ καλέσωμεν 1 τὴν ταχύτητα, δι' ἧς διανύει πόδας 30 ἐν ἑνὶ δευτέρῳ, αὕτη γενήσεται 2 τελευτῶντος τοῦ δευτέρου, 3 τοῦ τρίτου, καὶ ἕτως ἐφεξῆς· ἕτως ἡ ταχύτης, ἣν ἐκτήσατο τὸ σῶμα τελευτῶντος τοῦ δευτέρου λεπτοῦ, ἔσι τοιαύτη, δι' ἧς ἂν διανύσειεν ἰσομερῶς ἐν δευτέρῳ κινούμενον 2 × 30 = 60 πόδας, καὶ ἐν γένει, ἵν' εὕρωμεν τὴν προσγενομένην ταχύτητα τελευτῶντος τινὸς χρόνου, τουτέσι τὸν ἀριθμὸν τῶν ποδῶν, ἃς διανύει τὸ σῶμα κινούμενον ἰσομερῶς κατὰ ταύτην τὴν ταχύτητα ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ, πολλαπλασιάσεον 30 ἐπὶ τοῦτον τὸν χρόνον· τῆς ἓν προσγενομένης ταχυτῆτος τελευτῶντος δεκάτου λεπτοῦ ἴσης 10, τὸ διάσημα τὸ διανυόμενον ὑπὸ τοῦ κινητοῦ κατὰ τὴν αὐτὴν ταχύτητα ἔσαι ποδῶν 30 × 10 = 300.

177. γ'. Τὰ διανυόμενα διαστήματα ἐν ἑκάστῳ ἀλληλοδιαδόχῳ πεπερασμένῳ χρόνῳ αὔξησι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον τῶν περιττῶν ἀριθμῶν ÷ 1.3.5.7. κτ. (150)· σῶμα γὰρ διανύον ἐν τῷ πρώτῳ λεπτῷ πόδας 15, διανύσει ἐν τῷ δευτέρῳ 3 × 15 = 45· καὶ γὰρ διὰ τῆς ταχύτητος, ἧς ἐκτήσατο τὸ σῶμα τελευτῶντος τοῦ πρώτου λεπτοῦ, διανύσει ἐν τῷ ἐφεξῆς λεπτῷ πόδας 30. (176)· ἐπεὶ δὲ συνεχῶς ἡ βαρύτης ἐπενεργεῖ τῷ σώματι ἐπὶ τοῦ δευτέρου λεπτοῦ, ἐμποιοῦσα αὐτῷ ταχύτητα, δι' ἧς διανύσει καὶ ἐν τῷ δευτέρῳ λεπτῷ, ὃ διήνυσε διάσημα ἐν τῷ πρώτῳ, εἶτ' ἓν πόδας 15, συναπτομένων τῶν 15 τοῖς 30, ἀποτελοῦνται 45· ὡταύτως καὶ ἐπὶ τοῦ τρίτου λεπτοῦ· ἐπείπερ ἰσοταχῶς κινούμενον τὸ σῶμα ἐκτήσατο ἐν δυσὶ τοῖς προτέροις λεπτοῖς ταχύτητα ὡς δύω

εἴτ' ἓν ποδῶν 60, τούτοις προσιθεμένων τῶν 15 διὰ τὴν ἐν τῷ τρίτῳ λεπτῷ ἐνέργειαν τῆς βαρύτητος, ἔσονται πόδες 75· ϗ ἔτως ἐφεξῆς.

178. δ'. Ἐν τῇ καθόδῳ τῶν σωμάτων τὰ διανυόμενα διαστήματα εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν χρόνων τετράγωνα (151)· γνωσθέντος ἓν ἅπαξ τοῦ διανυσθέντος διαστήματος ἐν τῷ πρώτῳ χρόνῳ, δυνατὸν, ἤτοι, χρόνου ἄλλου δοθέντος, εὑρεῖν τὸ ἐν αὐτῷ διανυσθησόμενον διάστημα, ἢ, διαστήματος δοθέντος, εὑρεῖν τὸν ἀπαιτούμενον χρόνον εἰς διάνυσιν αὐτοῦ, ἢ τέλος, χρόνου ὡρισμένου δοθέντος, εὑρεῖν τὸ ἰδιαίτερον διάστημα, τὸ ἐν ἑκάστῳ μέρει τοῦ χρόνου διανυσθέν.

179. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΝ ΤΗ Α'. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙ. Πόσον διάστημα διανύσει ἐν τέσσαρσι λεπτοῖς δευτέροις λίθος ἄφετος; φημὶ δή· τὸ ἀπὸ 1 δευτέρου λεπτοῦ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ 4, ὡς 15 ποδῶν διάστημα διανυόμενον ἐν ἑνὶ δευτέρῳ λεπτῷ πρὸς χ, εἴτ' ἓν 1 : 16 :: 15 : χ = 240· εἰς εὕρεσιν ἄρα τῶν τοῦ διαστήματος ποδῶν πολλαπλασιαστέον 15 ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ χρόνου τετράγωνον.

180. Ἐντεῦθεν ἀρύεται ἡ λύσις τοῦ ἐφεξῆς προβλήματος· σφαῖρα μολυβδίνη ἀφ' ὕψους πύργου κατηνέχθη πρὸς τὴν γῆν ἐν τρισὶ λεπτοῖς δευτέροις· πόσον ἄρ' ἔστι τὸ τοῦ πύργου ὕψος; ἢ $15 = 3^2$ (= 9) = 135 ποσί.

181. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΝ ΤΗ Β'. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙ. Λίθος ἀφ' ὕψους ποδῶν 375 καταφερόμενος τῷ ὁρίζοντι πρὸς ὀρθὰς, πόσον διαπανήσει χρόνον, ἐς τ' ἂν ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ὁρίζοντος γένηται; ἐπεὶ ἓν 15 : 375 :: 1^2 : χ^2 = 5· λίθος ἐν τῷ κατιέναι διαπανήσει 5 λεπτά.

182. ΕΤΕΡΟΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Νεύτων ἔδειξεν, ὡς ἡ τῆς σελήνης βαρύτης, ἣν φέρεται ἐπὶ τὴν γῆν, τοσαύτη ἐστὶν, ὡς ἀφεθεῖσαν ἐν λεπτῷ τῷ πρώτῳ κατελ-

θεῖν πρὸς τὴν γῆν πόδας 15· τῷ δὲ μεταξὺ γῆς ϗ σελήνης διαςήματος ὄντος λευγῶν 84000, πόσον ἂν χρόνον ἀφεθεῖσα ἡ σελήνη δαπανήσειεν, ἔς τ' ἂν τὸ ἐκείνης κέντρον τῷ ταύτης ἐξ ὑποθέσεως συμπέσῃ; ἀναχθεισῶν τῶν λευγῶν εἰς πόδας, ἔσι 15 ποδ. : 1150128000 ποδ. :: 1^2 : $\chi^2 = 766752^{00}$· ἄρα $\chi = 8756,44$· ἡ ἄρα σελήνη πεσεῖται ἐπὶ τῆς γῆς ἐν λεπτοῖς 8756,44 = 6 ἡμ. 56 λεπ. 26 δευτ. ὡς ἔγγισα.

183. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΝ ΤΗι Γ'. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙ. Σῶμάτι διανύσαν ἐν 5 δευτέροις λεπτοῖς πόδας 375, πόσας ἐν ἑκάςῳ λεπτῷ διήνυσε; τῷ ὁλικῷ διαςήματος, τῷ ἐν 5 δευτέρ. λεπ. διανυσθέντος, ὀφείλοντος εἶναι $= 15 \times 5^2$, ἀφαιρετέον τῷ 375 τὸ $15 \times 4^2 =$ 240· τὸ κατάλοιπον 135 ἔσαι τὸ διανυσθὲν ἐν τῷ πέμπτῳ λεπτῷ· ἀπὸ δὲ 240 ἀφαιρεθέντος τῷ $15 \times 3^2 =$ 135, τὸ κατάλοιπον ἔσαι τὸ διανυσθὲν ἐν τῷ τετάρτῳ λεπ. ϗ ὕτως ἐφεξῆς.

184. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν χρόνων ᾖ μέγας, πρὸς εὐμάρειαν χρηςέον τῇ ἑξῆς ἰδιότητι τῆς ἀριθμητικῆς προόδ. ἕκασος αὐτῆς ὅρος ἴσος ἐςὶ τῷ πρώτῳ σὺν τῷ παραγομένῳ ὑπὸ τῆς διαφορᾶς, ϗ τῷ τῶν ἡγησαμένων αὐτῷ ὅρων ἀριθμῷ (Συμβ. Λογ. 212)· ἐὰν δὲ φέρ' εἰπεῖν ᾖ βυλομένοις εἰδέναι, ἥτις ἐςὶν ἡ ταχύτης τῆς σελήνης ἐν τῷ $8756^{ῳ}$· λεπτῷ, εἴτ' ἓν τῷ ἑκάτῳ τῶν τῆς ὑποτιθεμένης ἐπὶ τὴν γῆν καθόδυ αὐτῆς· ἕτος ἓν ὁ ὅρος ὀφείλει εἶναι $= \overline{1+2} \times 8755$· ἀλλ' ὁ πρῶτος ὅρος ἐπὶ ταύτης τῆς ὑποθέσεως ἔσι πόδες 15, ϗ δὴ ἡ διαφορὰ αὐτῶν 30· ἄρα ἡ ταχυτὴς τῆς σελήνης ἐν τῷ ἑκάτῳ λεπτῷ ἔσαι $\overline{15+30} \times 8755 = 262665$ ποσί.

185. έ. Οἱ χρόνοι, ἢ αἱ ταχυτῆτες, εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν διασημάτων (153)· γινωσκομένου ἓν τῷ διανυσθέντος ἐν τῷ πρώτῳ χρόνῳ διαστήματος, καὶ ἑτέρου διαστήματός δοθέντος, εὑρεῖν δυνήσομαι, ἥτις ἐστὶν ἡ ταχύτης, ἣν τὸ σῶμα ἕξει τελευτῶντος τοῦ δευτέρου διαστήματος, ἢ, δοθείσης τῆς ταχυτῆτος, γνωσθήσεται τὸ διάστημα, εἴτ' ἓν ἀφ' ὅσου ὕψους ἔδει κατελθεῖν τὸ σῶμα, ἵνα ταύτην ἂν ἐκτήσατο τὴν ταχύτητα.

186. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΝ ΤΗι Β΄. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙ. Ἀφ' ὅσου ὕψους κατελθεῖν δεῖ σῶμα, ἵνα κτήσηται ταχύτητα, δι' ἧς ἰσομερῶς κινούμενον διανύσειεν ἂν πόδας 20 ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ; εἰδότες ἓν ὡς τὸ σῶμα προσκτᾶται ταχύτητα ὡς διανύσαι πόδας 30, κατερχόμενον ἐξ ὕψους ποδῶν 15, λύσομεν ῥᾷστα τὸ πρόβλημα· 30 : 20 :: $\sqrt{15} : \sqrt{\chi}$· ἐπεὶ δὲ $\sqrt{15} = 3,8,3$ ὡς ἔγγιστα, ἄρα ἔσαι $\sqrt{\chi} = 2,582 = 6,66$ ποσὶ περίπου, ᾗ δὴ ἀπὸ τοσούτου ὕψους κατιὸν τὸ σῶμα κτήσεται ταχύτητα τὴν ζητουμένην, ἵνα δι' αὐτῆς ἰσομερῶς κινούμενον διανύσῃ ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ πόδας 20.

187. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ. ά. Ἐπείπερ ἅπαν ἔγνωσαι ἐν ταῖς ταχύτησι τῶν βαρέων, ἐξέσαι ταύταις χρήσασθαι ὡς ὅροις παραθέσεως ἐν ἄλλαις ταχύτησιν· οἷον ἐξέσαι εἰπεῖν, ὅτι ταχύτης 30 ποδῶν ἐν λεπτῷ δευτέρῳ κινήσεως ἰσομεροῦς ἴση ἐστὶ τῇ, ἣν κτᾶται λίθος καταφερόμενος ἀφ' ὕψους ποδῶν 15, καὶ ἐπὶ ἄλλων ὡσαύτως· β΄. εἴτις βούλοιτο κινητῷ τινι ταχύτητα ἐμποιῆσαι, μεθ' ἧς ἂν ἐν χρόνῳ ὡρισμένῳ διάστημα δοθὲν διανύσειε, τεύξεται τοῦτο ῥᾷστα, εἰ σώματι βαρὺ κατιὸν ἀφ' ὕψους, ὃ τὴν ζητουμένην ταχύτητα ἐμποιῆσαι δύναται, μεταδῷ τῷ κινητῷ τούτῳ ἁπάσης τῆς ἑαυτοῦ ταχυτῆτος.

188. ς΄. Αἱ ταχύτητες τῶν ἀνιόντων σωμάτων φθίνυσι κατὰ τὰς φυσικὰς ἀριθμὰς ÷ 6.5.4.3.2.1 (156), ἐκ πείρας.

189. Ἀλλὰ καὶ ἔτως ἔχειν ἀνάγκη τὸ πρᾶγμα· ἐπεὶ γὰρ ἡ κίνησις τῶν κατιόντων ἔσιν ἰσοταχὴς διὰ τὴν βαρύτητα, προσεπιτιθεμένων ἀεὶ νέων ταχυτήτων ἐν ἑκάςῳ λεπτῷ ἴσων· ἀνιόντων ἄρα, ἀφαιρεῖσθαι ἀνάγκη ἀεὶ βαθμὰς ἰσαλλήλας ταχύτητος· ἔτως ἄρα αἱ ταχύτητες τῶν ἀνιόντων ἀπομειωθήσονται κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν φθίνυσαν πρόοδον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ÷ 6.5.4.3.2.1.

190. Ἐντεῦθεν ἄρα ά. ἡ βαρύτης βραδύνει τὰ βαρέα ἀνιόντα, ὅσον αὐτὰ ἐπιταχύνει κατιόντα· β΄. σῶμα κατιὸν κτᾶται ταχύτητα, ὅσης ἐπιδεῖται, ἵν' ἀνέλθῃ εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος, ἐξ ὗ κατῆλθεν· γ΄. πάντα τὰ εἰρημένα περὶ τε λόγε τῶν ταχυτήτων, τῶν διασημάτων, ἢ τῶν χρόνων ἢ τε, καθ' ὃν τρόπον ταῦτα λογίζεσθαι δεῖ περὶ σώματος βαρέος κατιόντος, τὰ αὐτὰ νοητέον ἢ περὶ σώματος ἀνιόντος, ἀρχομένοις ἐκ ἀπὸ τῆς ἐλαχίσης ταχυτήτος, ὡς ἤδη ἐποιεῦμεν, ἀπὸ δὲ τῆς μεγίσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΙΚΟΣΤΟΝ.

Περὶ καθόδε τῶν σωμάτων διὰ κεκλιμένε ἐπιπέδε.

191. Βαρύτης καλεῖται ἀπόλυτος, ἣν ἔχει τὸ σῶμα ἐν ἑαυτῷ, μηδόλως παρεμποδιζόμενον ὑπὸ τῶν μέσων· βαρύτης δὲ χετικὴ ἡ ἐναπολειπομένη ἀπὸ τῆς τῶν κωλυμάτων ἐπηρείας· σῶμα τοίνυν βαρὺ, ἐν μὲν τῷ

κενῷ κάτεισι κατὰ τὴν ἀπόλυτον βαρύτητα ἑαυτῦ· κείμενον δὲ ἐν μέσῳ, ὃ ϗ αὐτό ἐςι βαρὺ, οἷος ὁ ἀὴρ, ἀπόλυσιν, ὡς ὀψόμεθα, μέρος τῆς ἑαυτῦ βαρύτητος ἴσον τῇ τῦ μέσυ βαρύτητι· τὸ δὲ περιὸν τῆς ἀπολύτυ βαρύτητος, ὀνομάζεται βαρύτης χ ε τ ι κ ή· ὡσαύτως βαρὺ σῶμα τεθὲν ἐπὶ τραπέζης τυχὸν κεκλιμένης τῷ ὁρίζοντι, μὴ δυνάμενον πρὸς ὀρθὰς κατελθεῖν, ὥσπερ διὰ τῆς ἀπολύτυ ἑαυτῦ βαρύτητος, ἀλλὰ πλαγίως, ἀπόλυσιν, ὡς δείκνυται διὰ πείρας, μέρος τῆς ἑαυτῦ βαρύτητος· τὸ δὲ κατάλοιπον, β α ρ ύ τ η ς ἤκυσε χ ε τ ι κ ή.

192. Ἔ″σω ὁριζόντειος εὐθεῖα (χ. 93) ἡ ΖΘ ϗ ἡ ΕΘ, κεκλιμένη ἐπὶ τῆς πρώτης, εἴτ' ἓν τῦ ὁρίζοντος, ἔσω, ὃ καλεῖται κ ε κ λ ι μ έ ν ο ν ἐ π ί π ε δ ο ν, ἡ ἓν ΕΘ μ ή κ ο ς καλεῖται τῦ κεκλιμένυ ἐπιπέδυ, ϗ ἡ ΕΖ κάθετος τῷ ὁρίζοντι, ὕ ψ ο ς τῦ κεκλιμένυ ἐπιπέδυ.

193. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἡ ἀπόλυτος βαρύτης τῦ Μ τῦ ἐπὶ τῦ κεκλιμένυ ἐπιπέδυ ΕΘ πρὸς τὴν αὐτῦ χ ε τ ι κ ὴ ν λόγον ἔχει, ὃν ΕΘ πρὸς ΕΖ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἤ″χθω ἐκ τῦ κέντρυ Κ τῦ σώματος Μ ἡ τῷ ΕΘ ὁρίζοντι κάθετος ΚΤ, ϗ ἡ Κα κάθετος τῷ ἐπιπέδῳ ΕΘ, ϗ π ε π λ η ρ ώ σ θ ω τὸ παραλληλόγραμμον αΚνβ· ἐκῦν ἡ εὐθεῖα Κβ, ἧ ἐμφαίνει τὴν φορὰν τῦ Μ σώματος πρὸς τὸ τῆς γῆς κέντρον, ϗ συναντᾷ κατὰ τὸ β τῷ ἐπιπέδῳ ΕΘ, ἐφ' ἓ ἔςι πλαγία, ἀναλυθῆναι δύναται εἰς δύω δυνάμεις, τήν τε αΚ κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ, δι' ἧς τὸ κινητὸν ἐπιδρᾷ τῷ ἐπιπέδῳ, ϗ τὴν Κν, καθ' ἣν ἡ δύναμις Κβ σπεύδει μετακινεῖν τὸ Μ πρὸς τὸ ἐπίπεδον (138)· ἀλλ' ἡ αΚ πᾶσα ἀφανίζεται, καταβλίβοντος τῦ Μ τὸ ΕΘ ἐπίπεδον, ἢ, ὃ ταὐτὸν, τὸ ΕΘ ἐπίπεδον αἴρει πᾶσαν ταύτην τὴν βαρύτητα· καταλείπεται ἄρα τῷ κινητῷ,

ἵνα κινηθῇ ἐπὶ τῆ ἐπιπέδυ, μόνη ἡ ἰσχὺς Κν = αβ· ἄρα Κβ μὲν ἐμφαίνει τὴν ἀπόλυτον τῆ Μ βαρύτητα, αβ δὲ τὴν σχετικήν· ἀλλὰ τὰ Κνβ, βΤΘ τρίγωνα εἰσὶν ὅμοια· παρὰ γὰρ τὰς ὀρθὰς ν, Τ, αἱ δύω ὑπὸ ΤιΘ, βΓν ὡς ἀντίσοιχοι εἰσὶν ἴσαι· ἄρα Κβ : Κν :: βΚ : βΤ, ἐπεὶ δὲ καὶ τὰ βΤΘ, ΕΖΘ τρίγωνα ὅμοια, ἄρα Κβ : Κν :: ΕΘ : ΕΖ. Ο. Ε. Δ.

194. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἡ ταχύτης τῆ κινητῆ κατιόντος διὰ τῆ κεκλιμένυ ἐπιπέδυ πρὸς τὴν αὐτῆ τύτυ κατιόντος πρὸς ὀρθὰς τῷ ὁρίζοντι λόγον ἔχει, ὃν τὸ τῆ ἐπιπέδυ ὕψος ΕΖ πρὸς τὸ μῆκος ΕΘ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ε'ὰν τὸ μῆκος ΕΘ διπλῆν ᾖ τῆ ὕψυς ΕΖ, τὸ κινητὸν διασώσει τὸ ἥμισυ τῆς ἑαυτῆ βαρύτητος· ἐὰν δὲ τριπλῆν, ἓν τριτημόριον, καὶ ἕτως ἑξῆς.

195. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἡ ἀπόλυτος βαρύτης πρὸς τὴν σχετικὴν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἡμίτονον τῆς ὀρθῆς γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς κλίσεως· καὶ γὰρ Κβ : Κν :: ΕΘ : ΕΖ :: $\frac{ΕΘ}{2} : \frac{ΕΖ}{2}$· ἀλλὰ $\frac{ΕΘ}{2}$ ἔστιν ἡμίτονον τῆς ὀρθῆς γωνίας Ζ, καὶ $\frac{ΕΖ}{2}$ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς κλίσεως (Γεωμ. 482)· ἄρα κτ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ὅσον ἡ ὑπὸ ΕΘΖ γωνία τῆς κλίσεως ἐστὶ ποσὸν πεπερασμένον, τύτ' ἔστιν ὅσον ἡ ΕΘ δύναται ἐκληφθῆναι ὡς παράλληλος τῇ ΖΘ, τὸ ἡμίτονον τῆς Θ γωνίας ἕξει λόγον πεπερασμένον πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, ἥτε σχετικὴ βαρύτης ἔσαι μέρος πεπερασμένον τῆς ἀπολίτυ· ἄρα ἀεὶ βαρύτι, τιθέμενον ἐπὶ κεκλιμένυ ἐπιπέδυ, κατιέναι ὀφείλει, ἥτις ποτ' ἂν ᾖ ἡ ἔγκλισις· ἐὰν ἓν συχνάκις συμβαίνῃ βάρος τι, τιθέμενον ἐπὶ κεκλιμέ-

νε ἐπιπέδε, μὴ κατιέναι, ἀπ' ἐξωτερικῆς τινος αἰτίας τετὶ γίνεται, οἵα ἡ τριβὴ, ἣν ἀφανίσαι ὀφείλει τὸ βάρος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ϗ ἡ τε περιέχοντος ἀέρος ἀντίςασις.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ χετικαὶ βαρύτητες τῶ αὐτῶ σώματος, κειμένε ἐπὶ διαφόρως κεκλιμένων ἐπιπέδων, εἰσὶν ὡς τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν τῶν ἐγκλίσεων.

196. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἡ κίνησις σώματος, ἐπὶ κεκλιμένον ἐπίπεδον κειμένε, ἔσιν ἰσοταχής

ΔΕΙΞΙΣ. Ὅσον ἂν τὸ ἐπίπεδον ἐπικεκλιμένον ἢ τῷ ὁρίζοντι, ἀεὶ καταλείπεταί τι βαρύτητος ὠθέσης τὸ Μ σῶμα πρὸς τὴν ΕΘ· τετὶ τὸ μέρος τῆς ἀπολύτε βαρύτητος, εἴτ' ἔν ἡ χετικὴ βαρύτης, ἥτις ἐπενεργεῖ τῷ Μ κατὰ τὸ β, ϗ ἐμποιεῖ αὐτῷ ταχύτητα Κν = αβ, ἐν τῷ ἐφεξῆς λεπτῷ προωθήσει αὐτῷ ταχυτῆτα ἴσην τῷ αβ, ὥσπερ ϗ ἡ ἀπόλυτος βαρύτης ἐμποιήσειεν ἂν τῷ Μ καινὴν ταχυτῆτα ἴσην τῷ βΚ, εἴγε ἡ χετικὴ βαρύτης παραμένει τῷ κεκλιμένῳ ἐπιπέδῳ ΕΘ, ὡς ἡ ἀπόλυτος τῷ καθέτῳ ΕΖ· αὕτη δὲ ἡ δευτέρα ταχύτης συναπτομένη τῇ πρώτῃ, ϗ ἰσεμένη αὐτῇ, τελευτῶντος τε δευτέρε λεπτε, διπλῆ γίνεται τῆς πρώτης· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ ταχύτης, τελευτῶντος τε τρίτε λεπτε, ἔσεται τριπλῆ τῆς πρώτης, ϗ ἕτως ἑξῆς. Ο. Ε. Δ.

197. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Λοιπὸν ἓν ἐςιν, ἃ δέδεικται περὶ τῶν κατὰ κάθετον κατιόντων σωμάτων, ἀποδεῖξαι ϗ περὶ τῶν διὰ κεκλιμένε ἐπιπέδε καταβαινόντων.

Οὐκεῦν ἐν ταύτῃ τῇ κινήσει, α΄. αἱ ταχύτητες αὔξεσιν ὡς οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1. 2. 3. 4 κτ· β΄. τὰ διανυόμενα διασήματα ἐν ἑκάςῳ λεπτῷ πεπερασμένῳ ἔσονται ὡς οἱ περιττοὶ ἀριθμοὶ 1. 3. 5. 7 κτ· γ΄. τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα τῶν διανυομένων διασημάτων τελευτώντων τῶν

χρόνων ἔσαι ὡς τὸ ἀπὸ τῶν χρόνων τέτων τετράγωνον· ἢ ἕτως ἐξῆς.

198. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Η΄ ταχύτης, ἣν κτᾶται σῶμα τὸ Μ, κατιὸν ἐν δεδομένῳ χρόνῳ, ἐν 3 φέρε δευτέροις λεπτοῖς, διὰ τῆ κεκλιμένυ ἐπιπέδυ ΕΘ, πρὸς τὴν ταχύτητα, ἣν κτᾶται τὸ αὐτὸ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ, κατιὸν κατὰ τὴν κάθετον ΕΖ, λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὕψος ΕΖ πρὸς τὸ ΕΘ μῆκος τῆ ἐπιπέδυ· ἐπεὶ ἑκάση ταχύτης ἀπειροσὴ, ἣν ποιεῖ ἡ ἀπόλυτος βαρύτης ἐν ἑκάσῳ ἀπειροσῷ λεπτῷ ἰὸν κατὰ τὴν ΕΘ, ἔσαι πρὸς ἑκάσην ἀπειροσὴν ταχύτητα, ἣν ποιεῖ κατὰ τὴν κάθετον ΕΖ, ὡς ΕΖ : ΕΘ· ἡ γὰρ σχετικὴ βαρύτης πρὸς τὴν ἀπόλυτον ἔσιν ὡς ΕΖ : ΕΘ (193)· ἄρα τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἀπειροσῶν ταχυτήτων, εἴτ' ἓν ἡ ὁλικὴ κατὰ τὴν ΕΘ ταχύτης, ἡ ἐκ τῆς σχετικῆς βαρύτητος ἐγγινομένη πρὸς τὴν ὁλικὴν ταχυτῆτα τὴν κατὰ τὴν ΕΖ ἔσαι ὡς ΕΖ : ΕΘ.

Η΄ πρώτη ἄρα ταχύτης πρὸς τὴν δευτέραν, ὥσπερ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς ἐγκλίσεως, εἴτ' ἓν $\frac{ΕΖ}{2}$ πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὀρθῆς γωνίας, εἴτ' ἓν $\frac{ΕΘ}{2}$· ἐν γὰρ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΕΖΘ, ἡμίτονον μὲν τῆς κατὰ τὴν ἔγκλισιν γωνίας ἐσὶ τὸ $\frac{ΕΖ}{2}$, ἡμίτονον δὲ τῆς ὀρθῆς γωνίας τὸ $\frac{ΕΘ}{2}$ (Γεωμ. 482).

199. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Οὕτως ἄρα (110) τὸ διανυόμενον διάσημα ἐν τῷ κεκλιμένῳ ἐπιπέδῳ, πρὸς τὸ διάσημα τὸ κατὰ κάθετον διανυόμενον ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ,

ἔσιν ὡς EZ : EΘ· ἐὰν ᾖ, ἐν ᾧ σῶμάτι κάτεισι τὴν κάθετον AB (χ. 94)· δύω ἕτερα σώματα κατίωσιν ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διὰ τῶν κεκλιμένων ἐπιπέδων AΘ, AZ, ᾗ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας B ἀχθῶσι κάθετοι αἱ BΓ, βξ, αὐτοῖς τοῖς ἐπιπέδοις, τὰ δύω ἕτερα σώματα ἐφίξονται, τὸ μὲν τῷ Γ σημείῳ, θάτερον δὲ τῷ ξ, ἐν ᾧ χρόνῳ τὸ πρῶτον ἐφίξεται τῷ B· διὰ γὰρ τὰς ταῖς ὑποτεινούσαις AΘ, AZ καθέτους BΓ, Bξ, α΄. ἐκ τῶν δύω ὁμοίων τριγώνων ABΘ, ABΓ (Γεωμ. 340), ἔσαι AΓ : AB : : AB : AΘ· β΄. ἐκ τῶν ἄλλων δύω ὁμοίων τριγώνων ABZ, ABξ, ἔσαι Aξ : AB : : AB : AZ· εἴτ' ἓν τὸ διανυόμενον διάσημα ἐπὶ τῷ κεκλιμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς τὸ κατὰ κάθετον ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διανυόμενον λόγον ἔχει, ὃν ἡ κάθετος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον.

200. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ε'ὰν δύω σώματα ἅμα πίπτωσιν ἀπὸ τοῦ σημείου E (χ. 95), τὸ μὲν πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον EΘ, θάτερον δὲ τὴν EZ κάθετον, δυνατὸν προσδιορίσαθαι, εἰς ὃ σημεῖον τῷ κεκλιμένῳ ἐπιπέδῳ ἀφίξεται τὸ πρῶτον, ὅταν τὸ δεύτερον γένηται ἐπί τινος δεδομένου σημείου I τῆς καθέτου· ᾗ γὰρ ἀχθείσης τῆς It καθέτου τῇ EΘ, τὸ σημεῖον τ, καθ' ὃ αὕτη συμβάλλει τῷ ἐπιπέδῳ, ἔσαι τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἀφίξεται τὸ πρῶτον, ὅταν ἀφίκηται τὸ δεύτερον ἐπὶ τοῦ I· διὰ γὰρ τὰ ὅμοια τρίγωνα EtI, EΘZ, ἔσιν Et : EI : : EZ : EΘ· ἄρα τὸ διανυσθὲν διάσημα ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου πρὸς τὸ διανυσθὲν κατὰ κάθετον ἔσιν ὡς ἡ κάθετος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον.

201. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Πᾶν σῶμα ἴσοις χρόνοις διέρχεται ἐκάσην τῶν χορδῶν, ᾗ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου· τῷ γὰρ K μέσῳ σημείῳ τῆς AB (χ. 96), ὡς κέντρῳ,

καὶ διαστήματι τῷ ΑΚ, γεγράφθω κύκλος ὁ ΑΔΒΖ, καὶ ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΒΔ, Βτ, τοῖς κεκλιμένοις ἐπιπέδοις ΑΘ, ΑΗ· λέγω δὴ σῶμα ἅπαν διερχόμενον τὴν διάμετρον ΑΒ, καὶ τὰς χορδὰς ΑΔ, Ατ, ἴσοις χρόνοις ἑκάστην αὐτῶν διανύσει· αἱ γὰρ γωνίαι ΒΔΑ, ΒτΑ, ὡς βεβηκυῖαι ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἔσονται ὀρθαὶ ἐγγεγραμμέναι, καὶ δὴ αἱ ΑΔ, Ατ, χορδαὶ τοῦ κύκλου· ἄρα ἴσοις χρόνοις ἅπαν σῶμα διελεύσεται τήν τε διάμετρον καὶ ἑκάστην χορδήν.

202. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ὁ χρόνος, ὃν δαπανᾷ τὸ κινητὸν, ἵνα διέλθῃ ἅπαν τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον ΑΘ (κ. 97), πρὸς ὃν δαπανᾷ, ἵνα διέλθῃ τὴν κάθετον ΑΒ, λόγον ἔχει, ὃν τὸ μῆκος ΑΘ τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ αὐτοῦ ὕψος ΑΒ.

ΔΕΙΞΙΣ. Τὸ γὰρ σῶμα, διανύον ἅπαν τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον ΑΘ, κάτεισι τῷ ὄντι πᾶσαν τὴν κάθετον ΑΒ, ἐν ᾧ χρόνῳ διελεύσεται ὁριζοντίως τὴν παράλληλον ΘΒ = Αν· ἀλλὰ τὸ μέρος τῆς ΑΒ ἐπὶ τῆς ΑΘ διατρεχόμενον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ, τὸ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διανυόμενον, λόγον ἔχει, ὃν ἡ σχετικὴ βαρύτης πρὸς τὴν ἀπόλυτον (199)· ἐὰν ἄρα ΑΘ διπλῆ ᾖ τῆς ΑΒ, τὸ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διανυσθὲν μέρος τῆς ΑΘ, ἥμισυ ἔσαι τοῦ διανυσθέντος μέρους τῆς ΑΒ· δεήσει ἄρα αὐτῷ χρόνου διπλοῦ, ἵνα διέλθῃ ὅλην τὴν ΑΒ ἐπὶ τῆς ΑΘ, ἐὰν ᾖ ΑΘ = 2ΒΑ· ὡσαύτως δεήσει χρόνου τριπλοῦ, ἐὰν ᾖ ΑΘ = 3ΑΒ· καὶ ἐν γένει ὁ χρόνος, ὃν δαπανᾷ τὸ κινητὸν, ἵνα διανύσῃ τῆς ΑΘ μέρος ἴσον τῷ ὕψει ΑΒ, πρὸς τὸν χρόνον, ὃν δαπανᾷ κατὰ κάθετον αὐτὸ τὸ ΑΒ, ἔσιν ὡς τὸ μῆκος τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ αὐτοῦ ὕψος. Ο.Ε.Δ.

203. ΠΟΡΙΣΜΑ. Οἱ δαπανώμενοι χρόνοι μέχρις ἂν τὸ σῶμα ἀφίκηται ἐπὶ τῆς ὁριζοντίου διὰ διαφόρων

ἐπιπέδων ΑΘ, ΑΗ, κτ. (χ. 96) τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΒ ἐχόντων, ἔσονται ὡς τὰ ἐπίπεδα.

204. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ἡ ταχύτης τῦ κινητῦ ἔσεται ἡ αὐτὴ, τό, τε κεκλιμένον ἐπίπεδον ΑΘ διελθόντος, καὶ τὴν ΑΒ κατελθόντος κάθετον.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ προσκτηθεῖσα ταχύτης ἐπὶ τῦ ΑΘ ἐν ἑκάστῳ λεπτῷ ἔσι τυχὸν ὑποτριπλάσιος τῆς ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἣν ἡ ΑΘ = 3ΑΒ (198)· ἄρα ἐν ὡρισμένῳ τινὶ χρόνῳ τὸ ἄθροισμα τῶν προσκτηθεισῶν ταχυτήτων ἐπὶ τῆς ΑΘ ὑποτριπλάσιον ἔσαι τῦ ἀθροίσματος τῶν ἐν τῇ ΑΒ ταχυτήτων· ἀλλ' ὡσαύτως ὁ ἐπὶ τῆς ΑΘ χρόνος ἔσι τριπλάσιος τῦ ἐπὶ τῆς ΑΒ (202)· ἐπεὶ δὲ ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει αἱ ταχύτητες εἰσὶν ὡς οἱ χρόνοι (148)· τὸ ἄρα πρῶτον ἄθροισμα τῶν ταχυτήτων, ὃ ἦν ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ $\frac{1}{3}$ τῦ δευτέρυ, ἰσωθήσεται αὐτῷ ἐν χρόνῳ τριπλασίῳ· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

205. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ε'ἀν σώματα κατίωσιν ἐξ ἐπιπέδων κεκλιμένων (χ. 98), τῶν ΑΓ, ΑΔ, ΑΖ, τὸ αὐτὸ ὕψος ἐχόντων· α΄. ἴσην ἕξυσι ταχύτητα καταβάντα κατὰ τὰ Δ, Γ, Ζ· β΄. ἴσην ἕξυσι ταχύτητα ἐν τοῖς σημείοις π, ξ, ρ, τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων τοῖς ἀντιξοιχῦσι τῷ αὐτῷ ὕψει Ατ.

206. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Α'παν σῶμα κατιὸν διὰ πολλῶν κεκλιμένων ἐπιπέδων ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ (χ. 99), κατὰ τὸ Ε γενόμενον, τὴν αὐτὴν ἕξει ταχύτητα, ἣν ἂν ᾖ κατελθὸν εἰς τὸ Β διὰ τῆς καθέτυ ΑΒ· ἐν γὰρ τῷ Γ τὴν αὐτὴν ἕξει ταχύτητα, ἣν ἐν τῷ Ζ, ἐν δὲ τῷ Δ, ἣν ἐν τῷ Θ, τέλος δὲ ἐν τῷ Ε, ἣν ἐν τῷ Β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΙΚΟΣΤΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τῆς διὰ καμπύλων κινήσεως.

207. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Πᾶν σῶμα, τὰ κοῖλα φερόμενον παντὸς πολυγώνυ, ἐν τῷ συναντᾷν ἑκάσῃ πλευρᾷ ἀπολέσει ποσότητα κινήσεως, ἐμφαινομένην ὑπὸ τῆ πλαγίᾳ ἡμιτόνυ τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπὸ τῶν δύω πλευρῶν.

ΔΕΙΞΙΣ. Κεκτήσθω γὰρ τὸ σῶμα, μετὰ τὸ τὴν AB (χ. 100) πλευρὰν διελθεῖν, δύναμιν ἡντιναῦν, ἣν ἐμφαινέτω ἡ ΒΓ, μέρος ἴσα τῆς AB προεκβεβλημένης· ἐν ᾧ ἓν τὸ κινητὸν συμβάλῃ τῇ BZ πλευρᾷ κατὰ τὸ B, ἡ δύναμις ΒΓ, ἅτε πλαγία τῇ BZ, ἐκληφθῆναι δύναται ὡς συγκειμένη ἐκ τῆς δυνάμεως BE, παραλλήλυ τῇ BZ, καὶ τῆς ΓΕ, καθέτυ τῇ BZ (138)· ἀπολέσει ἓν ἀναγκαίως πᾶσαν τὴν δύναμιν ΓΕ, διὰ τὴν ἀντίσασιν τῆ ἐπιπέδυ BZ, καὶ μόνη περιέσαι αὐτῷ ἡ BE· ἐὰν ἓν, κέντρῳ μὲν τῷ B, διασήματι δὲ τῷ ΒΓ, γραφῇ τόξον τὸ ΓΤ, ἡ ΕΤ ὑπεροχὴ ἔσαι τῆς ΒΓ ὑπὲρ τὴν BE· ἐμφανεῖ ἄρα αὕτη, ὃ ἀπώλεσε τὸ κινητὸν, προσβαλὸν τῇ BZ πλευρᾷ· ἀλλὰ τὸ ΕΤ ἔσι πλάγιον ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ΓΒΖ γωνίας (Γεωμ. 492)· ἄρα. Ο. Ε. Δ.

208. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐς ὃ ἂν ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία εἴη πεπερασμένη, ἡ διαφορὰ ΕΤ, ἣ διαφέρει ἡ ΒΓ τῆς BE, ἢ τὸ πλάγιον ἡμίτονον ταύτης τῆς γωνίας, ἔσαι ποσότης πεπερασμένη· ὡκῦν τὸ σῶμα, ἁπάντων ἑκάσῃ πλευρᾷ, ἀπόλυσιν ἀεὶ ποσὸν πεπερασμένον τῆς ἑαυτῦ κινήσεως.

209. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ε᾽ὰν δὲ ὑποτεθῇ ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία ἀπειροσὴ, τὸ πλάγιον ἡμίτονον ἔσαι ἀπειροξὸν δευτεροταγές (*). τὸ ἄρα σῶμα ἀπολέσει μέρος τῆς ἐαυτῦ κινήσεως, ὃ ἔσαι $\frac{1}{\infty}$ δευτεροταγές· ἄρα ἡ κίνησις μενεῖ ἡ αὐτή (Συμβ. Λογ. 528).

210. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ε᾽ν καμπύλῃ πᾶν σῶμα, ἀφαιρυμένης αὐτῦ τῆς βαρύτητος, τὴν αὐτὴν ταχύτητα ἕξει ἐν ἑκάσῳ σημείῳ τῆς καμπύλης, ϗ μετὰ πᾶσαν τὴν περιαγωγήν· ἡ γὰρ καμπύλη νοεῖται ὡς πολύγωνον κανονικὸν, ἐξ ἀπειραρίθμων πλευρῶν ϗ γωνιῶν ἀπειροσῶν συγκροτύμενον (Γεωμ. 172)· τὸ σῶμα ἄρα ἐν ἑκάσῃ γωνίᾳ ἀπολέσει τῆς ἐαυτῦ κινήσεως ἀπειροσὸν δευτεροταγές· τὸ δὲ ἄθροισμα πασῶν ἔσαι $\infty \cdot \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$, ἀπειροσὸν πρωτοταγές· ἡ ἄρα κίνησις ἔσαι ἡ αὐτὴ, ϗ δὴ ϗ ἡ ταχύτης ἐν ἑκάσῳ σημείῳ τῆς καμπύλης, ϗ μετὰ πᾶσαν τὴν περιαγωγήν.

211. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Πᾶν σῶμα, κατὰ τὴν ἐαυτῦ βαρύτητα διελθὸν καμπύλην πᾶσαν τὴν ΑΒΓ (χ. 101), ἕξει τὴν αὐτὴν ταχύτητα, ἣν ἂν ἐκτήσατο, κατελθὸν ἐκ τῦ αὐτῦ ὕψους τὴν κάθετον ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ. Κατερχέσθω γὰρ πρῶτον τὴν κοίλην καμπύλην ΑΒ· νοείσθω δὲ συγκειμένη ἐξ ἐλαχίστων ἐπιπέ-

---

(*) Ε᾽σι μὲν γὰρ κύτῦ τύπος ὁ $\frac{uu}{2\alpha}$ (Υ΄ψ. Γ. 238)· ἐπεὶ δὲ, τῦ τόξυ ἀπειροσῦ ὄντος, ὐδὲν ἧττόν ἐσιν, ἢ δῆλον, ἀπειροσὴ ϗ ἡ u· ἄρα $u = \frac{1}{\infty}$, ϗ $u^2 = \frac{1}{\infty^2}$, ϗ $\frac{uu}{2\alpha} = \frac{\frac{1}{\infty^2}}{2\alpha} = \frac{1}{\infty^2} : \frac{2\alpha}{1} = \frac{1}{\infty^2} \times \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha\infty^2}$· ἄρα κτλ.

δων κεκλιμένων ἀπειραριθμων τῶν Αμ, μν, κτ. διελ-
θὸν γὰρ τὴν Αμ, κτήσεται τὴν αὐτὴν ταχύτητα, ἣν κτή-
σαιτ' ἄν, διελθὸν τὴν Αχ (204). διελθὸν δὲ τὴν μν ἕ-
ξει καινὴν ταχύτητα ἴσην τῇ χτ = μο, ᾗ ἓξῆς ἄτως.
κατελθὸν ἄρα εἰς τὸ Β ἕξει τὴν αὐτὴν ταχύτητα, ἣν ἂν
κτήσαιτο κατελθὸν τὴν κάθετον ΑΔ. ἐντεῦθεν ἓν κατερ-
χέωθω αὖθις τὰ κοῖλα τῆς ΒΓ. διελθὸν τοίνυν τὴν Βς,
κτήσεται ταχύτητα, ἣν ᾗ τὴν Δξ = ΒΠ. ἀλλὰ τῶν
γωνιῶν τῆς καμπύλης ἐσῶν ἀπειροσῶν, ἡ ταχύτης τὸ
κινητὸ ἥκιστα ἐλαττωθήσεται (210). ἕξει ἄρα τὴν αὐ-
τὴν ταχύτητα διελθὸν τὴν ΒΓ, ἣν ἐκτήσατ' ἄν, διελθὸν
τὴν ΔΓ. ἄρα τὸ κινητὸν κτ. Ο. Ε. Δ.

212. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Πᾶν σῶμα, κατερχόμενον διὰ
καμπύλης τῆς ΑΒΓ, ἕξει κατὰ τὴν ἑαυτῷ βαρύτητα το-
σαύτην ταχύτητα, ὅσην ἀπολέσει, ἀνερχόμενον μέχρι τῷ
Α διὰ τῆς καμπύλης ΓΘΑ, εἴγε ἡ βαρύτης ἐπιβραδυ-
νεῖ τοσοῦτον τὴν ταχύτητα ἐκ τῷ Γ ἐπὶ τὸ Α, ὅσον αὐ-
τὴν ἐπαύξει ἐκ τῷ Α ἐπὶ τὸ Γ (190). ἄρα, ἀφαιρεθείσης
ἁπάσης ἄλλης αἰτίας, πᾶν σῶμα, κατελθὸν ἐκ τῷ Α
ἐπὶ τὸ Γ διὰ τῆς ἑαυτῷ βαρύτητος, ἀνελεύσεται αὖθις
ἐκ τῷ Γ ἐπὶ τὸ Α, ᾗ ἐπαναλήψεται ἄτω τὰς ἐκυτῷ
περιόδους ἐπ' ἄπειρον.

213. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ε' ἀν ληφθῶσι πρὸς τὸ δοκοῦν
ἀντικείμενα σημεῖα μ, μ', ν, ν', κτ. τὸ κινητὸν ἐν
τοῖς ἀντιθέτοις σημείοις τὴν αὐτὴν ἕξει ταχύτητα. ὅσῳ
γὰρ αὐξήσει ἡ βαρύτης τὴν ταχύτητα ἐκ τῷ μ μέχρι
τῷ Γ, τοσούτῳ αὐτὴν ἐλαττώσει ἐκ τῷ Γ μέχρι τῷ μ.

214. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Α'φ' ὁτινοσοῦν σημείῳ τὸ σῶ-
μα πέσῃ, τῷ Β φέρε, ά. ἕξει τὴν αὐτὴν ταχυτῆτα μέ-

χρι τῦ Γ, ἣν ἂν χοίη πεσὸν ἐκ τῦ Δ ἐπὶ τῦ Γ· β΄. ἀνελεύσεται εἰς τὸ αὐτὸ ἀντίσοιχον ὕψος υ.

215. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ε᾽ἀν σῶμα κινόμενον καταγράψη τόξον ὅ,τι δήποτε τὸ νΒ, ἕξει τὴν αὐτὴν ταχύτητα, ἣν ἐκτήσατ᾽ ἄν, διελθὸν τὸ ἀντίσοιχον τῆς καθέτυ μέρος τΔ.

216. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ε᾽ἀν σῶμα ἐκ τῦ Α κατέρχηται διὰ τῆς καμπύλης ΑΒΓ, αἱ αὐτῦ ἀλληλοδιάδοχοι ταχυτῆτες ἐν δυσὶ σημείοις Β, Γ, ἔσονται ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ὕψεων ΑΔ, ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ. Εἰ γὰρ τὸ σῶμα κατήρχετο διὰ τῆς ΑΓ, ἡ αὐτῦ ταχύτης ἐν τῷ Δ πρὸς τὴν αὐτῦ ἐν τῷ Γ, εἴη ἂν ὡς √ΑΔ : √ΑΓ (153)· ἀλλὰ κατερχομένυ διὰ τῆς καμπύλης ΑΒΓ, αἱ ταχύτητες αὐτῦ ἐν δυσὶ σημείοις Β, Γ, ἔσονται αἱ αὐταὶ ταῖς ἐν τοῖς Δ, Γ, εἰ κατήρχετο διὰ τῆς ΑΓ καθέτυ (214)· ἄρα αἱ ταχύτητες ἐν τοῖς Β, Γ, ἔσονται ὡς √ΑΔ : √ΑΓ. Ο.Ε.Δ.

217. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἡ ταχύτης, ἣν κτᾶται πᾶν σῶμα, κατιὸν διὰ διαφόρων τόξων, εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν κατ᾽ αὐτὰ ὕψεων.

218. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ι᾽ν᾽ ἓν σώματι ἐνεγείρωμεν ταχυτῆτα τὴν ζητυμένην ἐν ἀριθμοῖς, ἵνα φέρε διέλθῃ πόδας 2 ἐπὶ λεπ. δευτ. ἑνός· α΄. ζητείσθω, καθ᾽ ὃν εἴρηται τρόπον, τὸ ὕψος, ἀφ᾽ ἧ κατελθεῖν ἀνάγκη εἰς πρόσκτησιν ταχυτῆτος 2 ποδῶν (186)· β΄. ἐπὶ καθέτυ τινὸς μετηνέχθω τῦτο τὸ ὕψος, ὃ ἔσω τὸ ΔΓ· γ΄. ἐξαρτηθὲν τὸ σῶμα χυίνυ προσδεδεμένυ τῷ Α, ὑψούσθω ἕως τῦ Β πέρατος τῆ τόξυ ΒΓ· πίπτον δ᾽ ἓν ἐκ τῦ Β ἐπὶ τὸ Γ, κτήσεται τὴν ζητυμένην ταχύτητα.

219. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ε᾽πὶ δύω ὁμοίων χημάτων

ΑΒΓ, αβγ, αἱ ἀθροιζόμεναι ταχύτητες ἐν τόξων ὁμοίων εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν διαμέτρων.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν γὰρ τῷ ΑΒΓ, ἡ ἐπὶ τῆ Β ταχύτης πρὸς τὴν ἐν τῷ Γ ἔσιν ὡς √ΑΔ : √ΑΓ· ἀλλ' ἐν τῷ αβγ, ἡ ἐν τῷ β ταχύτης πρὸς τὴν ἐν τῷ γ ἔσιν ὡς √αβ : √αγ· ἄρα ἡ ἐν τῷ Β ταχύτης πρὸς τὴν ἐν τῷ β ὡς √ΑΔ : √αδ (Γεωμ. 327)· ἀλλαμὴν ΑΔ : αδ :: ΑΓ : αγ (Γεωμ. 382)· ἄρα ἡ ἐν τῷ Β ταχύτης πρὸς τὴν ἐν τῷ β, ὡς √ΑΓ : √αγ. Ο.Ε.Δ.

220. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐν δυσὶν ὁμοίοις κυκλικοῖς τόξοις, αἱ ταχύτητες εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀκτίνων, ἢ τῶν διαμέτρων.

221. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐν τῇ ἰσοταχεῖ κινήσει οἱ χρόνοι εἰσὶν ὡς αἱ ταχύτητες (185)· ἄρα ἐν τοῖς κυκλικοῖς ὁμοίοις τόξοις οἱ χρόνοι εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀκτίνων.

222. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐπεὶ τὰ ὅμοια τόξα ὁμοίων χημάτων πρὸς ἄλληλα εἰσὶν ὡς τὰ ὅλα χήματα· ἄρα αἱ ταχύτητες, καὶ δὴ καὶ οἱ χρόνοι, γενικῶς μὲν ἐπὶ πάντων τῶν ὁμοίων χημάτων, εἰδικώτερον δὲ ἐπὶ τῶν κύκλων, εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀκτίνων, ἢ τῶν διαμέτρων· καὶ ἐν ὁμοίοις τόξοις, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν τόξων. (Γεωμ. 398)

223. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὸν χρόνον τῆς καθόδου σώματος τῇ βαρύτητι κατιόντος δι' ὑτινοσῦν κυκλοειδοῦς τόξου τοῦ κΑ (χ. 102).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθω ἡ ηΔ κάθετος τῇ ΒΑ διχμέτρῳ τοῦ γεννήτορος κύκλου, καὶ ἐπὶ διαμέτρου τῆς ΑΔ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΔΝΑ, καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν ἐν τῷ χήματι καταφαινομένων ἄλλων εὐθειῶν, γενέσθω ἡ διάμετρος ΑΒ = 2α, καὶ ΔΑ = 2ρ, καὶ ΔΠ = χ, καὶ ἐπομέ-

νως ΑΠ = 2ρ — χ, καὶ Ππ = δχ = ζμ, καὶ ὁ χρόνος, ὃν δαπανήσει τὸ σῶμα, ἵνα διέλθῃ τὸ ἀδιόριστον τόξον MA, = κ, ὁ δὲ, ὃν δαπανήσει, ἵνα διέλθῃ τὸ Mμ, = δκ· ἡ δὲ ταχυτὴς, ἣν κτᾶται τὸ σῶμα, κατιὸν τὸ τόξον ηM, ἴσα ὡς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῆ ΔΠ (217), ἔσιν = √χ· ἐπεὶ δὲ ἡ τῆς κυκλοειδοῦς ἀπτομένη παράλληλός ἐσι τῇ χορδῇ AZ (Τ'ψ. Γ. 335. Τόμ. Γ'.)· τὰ τρίγωνα Mζμ, ΠZA εἰσὶν ὅμοια (Γεωμ. 220. Πόρισμ. Γ'. Τόμ. Β'.)· ὅθεν ἡ ἀναλογία Mμ : μζ :: ZA : ΠA· ἀλλ' ἔσι διὰ τὴν τῆ κύκλῳ ἰδιότητα AB : AZ :: AZ : AΠ (Γεωμ. 552. Τόμ. Γ'.) ἄρα AB : ZA, ἢ ZA : AΠ :: √AB : √AΠ (Συμβ. Λογ. 270. Τόμ. Α'.)· ἄρα Mμ : μζ :: √2α : √(2ρ — χ)· ἄρα $M\mu = \frac{\delta\chi\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{(2\rho-\chi)}}$, ἀντικαθισαμένης τῆς κατὰ τὴν μζ δυνάμεως, ἀλλὰ τῆ μὲν χρόνῳ, καθ' ὃν διελεύσεται τὸ σῶμα τὸ Mμ, ἐμφαινομένῳ διὰ δκ, τῆς δὲ ταχύτητος διὰ √χ, ἔσαι Mμ = δκ √χ (107), ἢ $\delta\kappa = \frac{M\mu}{\sqrt{\chi}}$· ἀντικαθισαμένης ἄρα τῆς τῆ Mμ δυνάμεως, $\delta\chi = \frac{\delta\chi\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{(2\rho\chi-\chi\chi)}} =$ $\frac{2\rho\cdot\delta\chi\sqrt{2\alpha}}{2\rho\cdot\sqrt{(2\rho\chi-\chi\chi)}}$· ἀλλὰ τὸ τῆ τόξῳ ΔN ἀπειροσὸν Nν ἔσιν = $\frac{\rho\delta\chi}{\sqrt{(2\rho\chi-\chi\chi)}}$ (Α'πειρ. 256)· ἄρα δκ = $\frac{\delta\cdot\Delta N\cdot 2\sqrt{2\alpha}}{2\rho}$, ἧ τὸ ἰλόκληρον ἔσι κ = $\frac{\Delta N\cdot 2\sqrt{2\alpha}}{2\rho}$, τύπος τῆ ζητουμένῳ χρόνῳ, ὃν τὸ σῶμα δαπανήσει ἐν τῷ διατρέχειν τὸ τόξον κM.

224. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ε᾽ὰν κ σημαίνῃ τὸν χρόνον τὸν δαπανηθησόμενον ἐν τῷ τόξῳ ηΑ, τὸ τόξον ΔΝ ἀποκαθίσαται ἡμιπεριφέρεια ΔΝΑ, ᾧ τηνικαῦτα ἔσαι κ = $\frac{\Delta NA \cdot 2\sqrt{2a}}{2\rho}$. ἐπεὶ τοίνυν $2\sqrt{2a}$ ἔσι ποσότης ἀμετάτρεπτος, ὁ χρόνος κ ἔσαι ἐν τῷ λόγῳ $\frac{\Delta NA}{2\rho} = \frac{\Delta NA}{\Delta A}$. ὡσαύτως ὁ χρόνος ὁ δαπανηθησόμενος ἐν τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΓΑ ἔσαι ὡς $\frac{BZA}{BA}$. τοιγαρῦν οἱ χρόνοι οἱ δαπανώμενοι ἐν τῇ κινήσει σωμάτων φερομένων διὰ παντοίων κυκλοειδῶς τόξων εἰσὶν ἐν λόγῳ, ὃν ἔχει κυκλικὴ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ἑαυτῆς διάμετρον· εἰσὶν ἄρα ἰσάλληλοι, τοῦτ᾽ ἔσι, πᾶν σῶμα, φερόμενον διὰ κυκλοειδοῦς δυνάμει τῆς ἑαυτοῦ βαρύτητος ἐν μέσῳ ἀμοιροῦντι ἐνσάσεως, ἀφικνεῖται εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον Α, κἂν ἐκ τοῦ Γ, κἂν ἐκ τοῦ Μ, κινεῖσθαι ἄρξηται.

225. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ε᾽πειδὴ ὁ τῆς διὰ τοῦ τόξου κΑ καθόδου χρόνος ἔσι κ = $\frac{\Delta NA \cdot 2\sqrt{2a}}{2\rho}$, ἔσαι 2ρ : ΔΝΑ :: 2 . $\sqrt{2a}$: κ· ἀλλὰ 2 $\sqrt{2a} = \frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{2a}}$ (*)· ἀ-

---

(*) Ε᾽σι γὰρ $\frac{2a}{\frac{1}{2}\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2a} \times \sqrt{2a}}{\frac{1}{2}\sqrt{a}} =$

$\frac{\sqrt{2a} \times \sqrt{2a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2a} \times \sqrt{2a}}{1} : \frac{\sqrt{a}}{2} = \frac{\sqrt{2a} \times \sqrt{2a}}{1} \times$

$\frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2a} \times \sqrt{2a}}{\sqrt{a}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2x}}{1} = 2 \cdot \sqrt{a}$.

ρα 2ρ : ΔΝΑ :: $\frac{2\alpha}{\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}}$: κ· ἐπεὶ δὲ τὸ $\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}$ ἐμφαίνει τὸ ἥμισυ τῆς ταχυτῆτος, ἣν σῶμα κτήσαιτ' ἂν καταβαῖνον τὴν διάμετρον ΒΑ (153)· ἐὰν ἄρα πᾶσα ἡ ταχυτὴς, ἣ ὁ χρόνος (153) κληθῇ Κ, πορισθήσεται $2\alpha = K.\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}$, καὶ $K = \frac{2\alpha}{\frac{1}{2}\sqrt{2\alpha}}$· ἄρα ἡ ἤδη ἐκτεθειμένη ἀναλογία ἀντικατασάσει ἔσαι 2ρ : ΔΝΑ :: Κ : κ, εἴτ' ἦν „ὁ χρόνος ὁ δαπανώμενος διὰ παντὸς τόξου κυκλοειδοῦς πρὸς τὸν διὰ τῆς διαμέτρου τοῦ γεννήτορος κύκλου, „ἔσιν ὡς κυκλικὴ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ἑαυτῆς διάμε„τρον·" τοιγαροῦν οἱ χρόνοι ὅτοι εἰσὶν ἐν ἀμεταπτώλόγῳ· τοῦθ' ὅπερ, εἰ μὴ προήδειμεν, ὑπεδήλωσεν ἄν, ὡς ἅπαντα τὰ τόξα τῆς κυκλοειδοῦς τὰ ἀπὸ τοῦ Α ἀρχόμενα διανύονται ἐν ἴσοις χρόνοις.

226. ΟΡΙΣΜΟΣ. Καμπύλαι ταυτόχρονοι καλοῦνται, ὧν τὰ τόξα τάτε μεγάλα καὶ τὰ μικρὰ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ ὑπὸ τῶν τῇ ἰδία βαρύτητι ἐν μέσῳ ἐνσάσεως ἀμοίρῳ φερομένων σωμάτων διανύονται· ἡ ἄρα κυκλοειδὴς ἔσι καμπύλη ταυτόχρονος.

227. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὴν καμπύλην τῆς ταχίσης καθόδου, εἴτ' ἦν τὴν ὀλιγισόχρονον ΑΜ (κ. 103), δι' ἧς σῶμα τὸ Α ἐκ τοῦ Α κάτεισιν εἰς τὸ Μ, ἐν ὅσον οἱόντε βραχυτάτῳ χρόνῳ, τοῦ μέσου ἀμοιροῦντος ἐνσάσεως.

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθωσαν ἀλλήλαις προσεχέσαται αἱ τεταγμέναι ΠΜ, πμ, Νν, καὶ αἱ ἄλλαι γραμμαὶ, ἃς τὸ χῆμα παρίσησι· καὶ ἔσω ΑΠ = χ, καὶ ΠΜ = υ· ἐκεῖν

$\Pi\pi = M\rho = \mu\zeta = \nu Z = \delta\chi$, καὶ $\mu\rho = \delta\upsilon$, ϗ $M\mu = \sqrt{(\delta\upsilon^2 + \delta\chi^2)}$· ἔσω ϗ $\rho Z = \beta$· ὠκῦν ἔσαι $\mu Z = \beta - \delta\upsilon$, ϗ $\mu\nu = \sqrt{(\beta - \delta\upsilon)^2 + \delta\chi^2}$· ἡ δὲ ταχύτης, δ' ἧς ἂν τὸ σῶμα διέλθοι τὸ ἀπειροσὸν τόξον $M\mu$, ὡς ἰσομερὴς ἐκληφθῆναι δυναμένη, ϗ ὡς ἰσομέτη τῇ, ἣν ἂν κτήσαιτο κατελθὸν ἀπὸ τοῦ Α εἰς τὸ Π (211), ὑποτεθείσθω $= \gamma$, ϗ ἔσω $= \Gamma$ ἡ ταχύτης, δι' ἧς ἂν διανυσθείη τὸ τόξον μν· ἔσω δὲ κ ὁ χρόνος, ὃν ἐδαπάνησεν, ἵνα διέλθοι τὸ τόξον ΑΜ· ὠκῦν ὁ χρόνος, ὃν ἐδαπάνησεν, ἵνα διέλθοι τὸ $M\mu$, ἔσαι $\delta\kappa$· ϗ ἐπειδὴ ἐν τῇ ἰσομερεῖ κινήσει τὰ διαστήματα εἰσὶν ἐν χρόνῳ συνθέτῳ ἔκ τε τῶν χρόνων ϗ τῶν ταχυτήτων (216), ἔσαι $M\mu = \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)} = \gamma\delta\kappa$, ϗ $\mu\nu = \sqrt{[(\beta - \delta\upsilon)^2 + \delta\chi^2]} = \Gamma\delta\kappa$· ὁ ἄρα ἐν τῷ τόξῳ $M\nu$ δαπανηθεὶς χρόνος ἔσιν $=$

$$\varepsilon\delta\kappa = \frac{\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}}{\gamma} + \frac{\sqrt{(\beta\beta - 2\beta\delta\upsilon + \delta\upsilon^2 + \delta\chi^2)}}{\Gamma}.$$

ἀλλ' ἡ Αν καμπύλη τοιαύτη ζητεῖται τὴν φύσιν εἶναι, δι' ἧς σῶμα κατιὸν ἐκ τοῦ M εἰς τὸ ν δαπανήσειεν ἂν ὡς οἷόντε ἐλάχισον χρόνον· ἄρα ὁ χρόνος $2\delta\kappa$ ἔσιν ἐλάχισον·

$$\text{ἄρα } 2\delta\delta\kappa = \frac{\delta\upsilon\delta\delta\upsilon}{\gamma\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}} + \frac{\delta\upsilon\delta\delta\upsilon - \beta\delta\delta\upsilon}{\Gamma\sqrt{(\beta\beta - 2\beta\delta\upsilon + \delta\upsilon^2 + \delta\chi^2)}}$$

$= 0$, ἀτρέπτου ὑποτιθεμένου τοῦ $\delta\chi$ (Ἀπειρ. 32)· διαιρέσει δὲ διὰ $\delta\delta\upsilon$, ϗ μεταθέσει, $\frac{\delta\upsilon}{\gamma\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}} =$

$$\frac{\beta - \delta\upsilon}{\Gamma\sqrt{(\beta\beta - 2\beta\delta\upsilon + \delta\upsilon^2 + \delta\chi^2)}}, \text{ τοῦτ' ἔσι } \frac{\rho\mu}{\gamma \cdot M\mu} =$$

$$\frac{\mu Z}{\Gamma \cdot \mu\nu}, \text{ ἢ } \frac{\gamma \cdot M\mu}{\rho\mu} = \frac{\Gamma \cdot \mu\nu}{\mu Z} = \frac{\Gamma \cdot \mu\nu}{\zeta\nu}.$$ ἐπεὶ τοίνυν ἡ μὲν

ταχυτὴς γ ἔσιν ὡς √ΑΠ, ἡ δὲ ταχυτὴς Γ ὡς √Απ, τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς κατὰ τὴν ἀποτετμημένην ῥίζης καὶ τῆ κατὰ τὸ ἀντιστοιχῆν τόξον στοιχείω, διαιρεθὲν διὰ τῆ κατὰ τὴν τεταγμένην ἀπειροστῆ, δίδωσιν ἀεὶ ποσὸν ἀμετάβλητον, ὅπερ ὑποτεθείσθω = √α, ἵν' εἴη $\frac{\sqrt{\text{ΑΠ}}.\text{Μν}}{\rho\mu} =$ $\frac{\sqrt{\chi}.\text{Μν}}{\delta\upsilon} = \sqrt{\alpha}$, ἢ $\frac{\sqrt{\chi}.\sqrt{(\delta\chi^2+\delta\upsilon^2)}}{\delta\upsilon} = \sqrt{\alpha}$, ἢ $\chi(\delta\chi^2+\delta\upsilon^2) = \alpha\delta\upsilon^2$, ὅθεν πρόεισι $\delta\upsilon^2 = \frac{\chi\delta\chi^2}{\alpha-\chi}$ (*)

καὶ $\delta\upsilon = \frac{\sqrt{\chi\delta\chi^2}}{\sqrt{\alpha-\chi}} = \frac{\sqrt{\chi}.\delta\chi}{\sqrt{\alpha-\chi}} = \frac{\chi\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}$ (**)

$= \frac{\alpha\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}} - [\frac{\alpha\delta\chi-2\chi\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}]$· ὁλοκληρώσει ἄρα καὶ προφθέσει ποσοῦ ἀμεταβλήτου, $\upsilon + \Gamma =$ Ο $\frac{\alpha\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}} - \sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}$ (***)· ἐὰν ἓν ὑποτεθῆ ΑΒ = α διάμετρος τοῦ ἡμικυκλίου ΑΞΒ, ἡ τεταγ-

---

(*) $\chi.(\delta\chi^2+\delta\upsilon^2) = \alpha\delta\upsilon^2$, εἶτ' ἓν $\chi\delta\chi^2+\chi\delta\upsilon^2 = \alpha\delta\upsilon^2$, καὶ μεταθέσει, $\chi\delta\chi^2 = \alpha\delta\upsilon^2 - \chi\delta\upsilon^2$, καὶ διαιρέσει διὰ $\alpha-\chi$, $\upsilon^2 = \frac{\chi\delta\chi^2}{\alpha-\chi}$.

(**) $\frac{\sqrt{\chi}.\delta\chi}{\sqrt{\alpha-\chi}} = \frac{\sqrt{\chi}.\sqrt{\chi}.\delta\chi}{\sqrt{\chi}.\sqrt{\alpha-\chi}} = \frac{\chi\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}$.

(***) Εἰσὶ γὰρ· Ο$(\frac{\alpha\delta\chi-2\chi\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\chi-\chi\chi)}}) =$ $\frac{\text{Ο}(\alpha\delta\chi-2\chi\delta\chi)}{\sqrt{(4\alpha\chi-4\chi\chi)}}$ (Συμβ. Λογ. 167. Τόμ. Α'.) = Ο$(\alpha\delta\chi$

γμένη ΞΠ ἔσαι $= \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}$, ϗ $0 \frac{\alpha\delta\chi}{2\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}$

$= 0 . \frac{\frac{1}{2}\alpha\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}$, τύπος τῦ τόξυ ΑΞ (Ἀπειρ. 256)· ἄρα $\upsilon + \Gamma =$ ΑΞ — ΞΠ· ἀλλ' ὅταν ἡ $\upsilon = 0$, τό,τε τόξον ΑΞ ϗ ἡ τεταγμένη ΞΠ γίνονται $= 0$· ἄρα $\Gamma = 0$, ϗ $\upsilon =$ ΑΞ — ΞΠ, τῦτ' ἔσιν „ἡ τεταγμένη τῆς ζητυ„μένης καμπύλης ἴσῦται τῷ τόξῳ τῦ ἀντισοίχυ κύκλυ, „ἧ διάμετρος $= \alpha$, πλὴν τῦ κατ' αὐτὸ ἡμιτόνυ."

Ἐν ἑνὶ τῆ ἡμικλοειδεῖ ΓΑ (χ. 102) ἡ τεταγμένη ΖΜ ἴσῦται τῷ τόξῳ ΖΑ· ἐὰν δὲ τχχθῆ ἐπὶ τὴν ΒΑ διάμετρον, ἡ τεταγμένη ΜΠ ἴσῦται τῷ τόξῳ ΖΑ σὺν τῷ αὐτῦ ἡμιτόνῳ ΖΠ· ὑκῦν ἔσαι ΚΜ + ΜΖ + ΖΠ = ΓΒ = ΒΖ + ΖΑ· ἀφαιρυμένων ἓν ἔνθεν μὲν τῦ ΜΖ, ἔνθεν δὲ τῦ ΖΑ, ἔσαι ΚΜ + ΖΠ = ΖΒ· ἄρα ΚΜ = ΒΖ — ΖΠ, εἴτ' ἓν ΚΜ ἴσῦται τῷ τόξῳ ΒΖ πλὴν τῦ κατ' αὐτὸ ἡμιτόνυ ΖΠ· διόπερ, ἐὰν ὑποτεθῆ ΒΑ $= \alpha$, ϗ ΓΚ ὑποτεθῆ ἡ ἐπὶ τῦ 103 χήματος εὐθεῖα ΑΠ, τὸ Μ σημεῖον τῦ 103 χήματος παρασαθήσεται διὰ τῦ Μ σημείυ

$- 2\chi\delta\chi)\,(4\alpha\chi - 4\chi\chi)^{-\frac{1}{2}} \cdot =$ (Ἀπειρ. 206, 216) $=$

$$\frac{(\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi) \cdot (4\alpha\chi - 4\chi\chi)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(4\alpha\delta\chi - 8\chi\delta\chi)} =$$

$$\frac{(\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi) \cdot (4\alpha\chi - 4\chi\chi)^{\frac{1}{2}}}{2\alpha\delta\chi - 4\chi\delta\chi} =$$

$$\frac{(\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi) \cdot (4\alpha\chi - 4\chi\chi)^{\frac{1}{2}}}{2\,(\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi)} = \frac{(4\alpha\chi - 4\chi\chi)^{\frac{1}{2}}}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{(4\alpha\chi - 4\chi\chi)}}{2} = \frac{2\sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}}{2} = \sqrt{(\alpha\chi - \chi\chi)}.$$

τῆ ἐν τῷ 102 χήματι· ἡ ζητεμένη ἄρα καμπύλη ἔς κυκλοειδὴς, ἧς τῆ γεννήτορος κύκλε ἡ διάμετρος ἔσιν = α.

Ἵνα δὲ διοριωθῇ ἡ τῆ γεννήτορος κύκλε διάμετρος α, ἰσέον, ὡς αἱ κυκλοειδεῖς, γεννώμεναι ἐκ περιεκκυλίσεως κύκλων (οἵτινες ὅμοιαι καμπύλαι ὑπάρχεσι (Υ'ψ. Γ. 256)) διὰ νόμε ἀμεταθέτε, εἰσὶν ἀναγκαίως ὅμοιαι καμπύλαι· τέτε τεθέντος, ἔςω Α σημεῖον, ἀφ' ᾧ τὸ σῶμα κινεῖωαι ἄρχεται (χ 104), Μ δὲ, εἰς ὃ ἀφικνεῖται κατὰ τὸν ὅσον οἷόν τε ἐλάχισον χρόνον· ἵν' ἓν διοριωθῇ ἡ ΒΓ διάμετρος = α τῆ γενήτορος κύκλε τῆς ἡμικυκλοειδῆς ΑΜΒ, ἐπεζεύχθω ἡ ΑΜ, καὶ τέρματος ἄνευ ἤχθω ἡ ὁριζόντιος ΑμΓ, ἥπερ διὰ τῆ Μ κατήχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ Μμ· καὶ ἐπὶ τῆς Αμ ληφθείσης ὡς ἡμιβάσεως γεγράθω ἡμικυκλοειδὴς ἡ Ανβ, ἐν ᾗ γινώσκεται ἡ ἡμιπεριφέρεια Αμ τῆ γεννήτορος κύκλε· ὅθεν δυνατὸν εὑρεῖν ὡς ἔγγισα τὴν αὐτῆ διάμετρον μβ (Γεωμ. 375. Τόμ. Β'.) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ νμ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΓ· ταιγαρῆν ἡ ΑΓ ἔσαι ἡμίσεια βάσις τῆς ζητεμένης κυκλοειδῆς ΑΜΒ· αἱ γὰρ νΑ, ΜΑ ἴσον κεκλιμέναι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑμΓ εἰσὶν εὐθεῖαι ὁμόλογοι τῶν ἡμικυκλοειδῶν Αβ, ΑΒ· ἀλλαμὴν τῶν τριγώνων Ανμ, ΑΜΓ ὁμοίων ὄντων (Γεωμ. 318. Τόμ. Β'.) ἔσιν Αν : ΑΜ :: Αμ : ΑΓ· ἄρα καὶ Αμ, ΑΓ εἰσὶν εὐθεῖαι ὁμόλογοι τῶν δύω ἡμικυκλοειδῶν· ἀλλαμὴν Αμ ἐσὶ βάσις τῆς Αβ· ἄρα ΑΓ ἔσι βάσις τῆς ζητεμένης ἡμικυκλοειδῆς ΑΜΒ, καὶ ΓΒ ἔσιν ἡ διάμετρος α τῆ κύκλε, ᾗ ἡμιπεριφέρεια ἔσιν = ΑΓ.

228. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Διορίσαι τὴν φύσιν τῆς ἰσοχρόνε καμπύλης, εἴτ' ἓν δι' ἧς τὰ βαρέα κάτισιν ἰσομερῶς, τέτ' ἔσιν ἀφ' ὑψῶν ἴσων ἐν ἴσοις χρόνοις πρὸς τῷ ὁρίζοντι γίνονται.

ΛΥΣΙΣ. Ε᾽ςω ΒΠ = χ (χ. 105), καὶ Ππ = δχ, καὶ ΠΜ = υ· τῷ τοίνυν χρόνῳ, καθ᾽ ὃν διανύει τὸ σῶμα τὴν ἀπειροσὴν καμπύλην Μμ, ὄντος δκ, καὶ τῆς πρὸς τῷ Μ ταχύτητος = √χ (216), πορισθήσεται $\frac{\sqrt{(\delta\chi^2+\delta\upsilon^2)}}{\sqrt{\chi}}$ = δκ = δχ· κατὰ γὰρ τὴν φύσιν τῷ προβλήματος, ἐπεὶ τὸ σῶμα ἰσομερῶς κινεῖσθαι ὑποτίθεται, τὰ κατὰ κάθετον ὕψη Ππ εἰσὶν ὡς οἱ χρόνοι οἱ δαπανώμενοι εἰς διάνυσιν τῆς καμπύλης Μμ· ἄρσει ἄρα τῷ κλάσματος, τετραγωνισμῷτε καὶ μεταθέσει, ἔσαι $\delta\upsilon^2 = \chi\delta\chi^2 - \delta\chi^2 = (\chi - 1)\,\delta\chi^2$, ἐξαγωγῇ δὲ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, δυ = δχ √(χ — 1), ὁλοκληρώσει, υ + γ = Ο. $\delta\chi\,(\chi-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\,(\chi-1)^{\frac{3}{2}}$ (Α᾽πειρ. 206), προσιθεμένης καὶ ἀμεταβλήτου ποσότητος· ἐὰν δὲ γένηται χ — 1 = ψ, πορισθήσεται $\upsilon + \gamma = \frac{2}{3}\,\psi^{\frac{3}{2}}$ ἢ $\frac{9}{4}\,(\upsilon+\gamma) = \psi^3$, ἐξίσωσις τριτογενὴς ἐμφαίνουσα παραβολὴν, ἧς παράμετρος μὲν = $\frac{9}{4}$, τεταγμένη δὲ = υ + γ, ἀποτετμημένη δὲ = ψ· ἐὰν μέντοι ὑποτεθῇ γ = 0, ὥσπερ ἐνταῦθα προφανῶς ἐπιτρέπεται, ἔσαι $\frac{9}{4}\,\upsilon^2 = \psi^3$· ἄρα ἡ ζητουμένη καμπύλη ΒΜΝ ἔσι παραβολὴ τῶν τριτογενῶν (Τ᾽ψ. Γ. 268. 269), ἧς ἡ μὲν ἀποτετμημένη ΑΠ = ψ, ἡ δὲ τεταγμένη ΠΜ = υ, ἡ δὲ παράμετρος = $\frac{9}{4}$· ἀλλ᾽ ὅταν ἡ ΑΠ = ψ = 0, ἔσι χ = 1, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ἐξισώσεως χ — 1 = ψ· ἄρα τῶν χ ἀρχὴ ὐ γίνεται ἐκ τοῦ Β, ἀλλ᾽ ἐκ τοῦ Α, ὑποτιθεμένης ΑΒ = 1· ἡ δὲ τῆς παραβολῆς παράμετρος ἔσαι $\frac{9}{4}$. ΑΒ = $\frac{9}{4}$ α, ὑποτιθεμένης ΑΒ = 1 = α, καὶ τηνικαῦτα ἡ πρὸς τῷ Μ ταχυτὴς ἔσαι = √χ = √ΑΠ = √(ΑΒ + ΑΠ)· ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β ταχυτὴς ἔσαι = √ΑΒ = √α· ἵν᾽ ἓν τὸ σῶμα κατίῃ, καθ᾽ ὃν ἀπαιτεῖ τὸ πρόβλημα νόμον, πρὶν

ἢ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην κορυφῆς Β ἐφάψηται, εὐμοιρεῖν ἐπάναγκες ταχυτῆτος, ὅσην ἂν προσκτήσαιτο, ἐλευθέρως πίπτον ἀφ' ὕψος = ΑΒ· ἀλλὰ γενομένης α = 1, ἡ παράμετρος ἐστιν = $\frac{2}{4}$ α· ἄρα ἡ ταχύτης πρὸς τῇ τῆς καμπύλης ἀρχῇ Β ἴσθθαι ὀφείλει τῇ, ἣν ἂν κτήσαιτο, ἐλευθέρως καταπίπτον ἀφ' ὕψος = $\frac{2}{4}$ τῆς παραμέτρου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΙΚΟΣΤΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ κινήσεως τῶν προβαλλομένων σωματων.

229. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Α῎παν σῶμα πρὸς ὀρθὰς τῷ ὁρίζοντι ἀναῤῥιπτόμενον, πρῶτον μὲν ἄνεισιν, εἶτα κάτεισι πρὸς ὀρθὰς τῷ ὁρίζοντι.

ΔΕΙΞΙΣ. Φανερὸν ἐκ πείρας· ἀλλὰ κ᾽ ὅτω φύσει ὑπάρχειν ἀνάγκη· κ᾽ γὰρ, ἀρθείσης μὲν τῆς τοῦ μέσου ἐνσάσεως, ἀνελθεῖν δεῖ μέχρι τοσούτου ὕψους, ἐξ ὅσου κατελθεῖν, ἵνα κτήσηται τὴν ταχύτητα, ἣν ἔλαβεν ἐκ τῆς κάτωθεν ἐπὶ τὰ ἄνω προβαλλούσης δυνάμεως (193)· θεωρουμένης δὲ καὶ τῆς τοῦ μέσου ἐνσάσεως, ἀνελθεῖν αὖθις δεῖ μέχρις ἂν ᾖ, ἣν προσέλαβε, ταχύτης ἄρδην ἀφανισθῇ, εἴτε διὰ τὸν ἀνθισάμενον ἀέρα, εἴτε διὰ τὰς τοῦ βάρους συνεχεῖς ἐνεργείας· ἀνελθεῖν δεῖ πρὸς ὀρθάς· εἴγε ὑποτίθεται κινούμενον ὑπὸ καθέτου δυνάμεως· ἀφικόμενον δὲ, ἐς ὃ ἀνελθεῖν δεῖ, καθηρεμήσει ἐν ἀπαριαίῳ χρονικῷ διασήματι, εἴτ᾽ ἦν ἐν ᾧ περίεσιν αὐτῷ ἔτι βαθμὸς εἷς τῆς ἐκ τῶν κάτω ἐπὶ τὰ ἄνω ταχυτῆτος, ἴσος τῇ τε ἐνσάσει τοῦ μέσου, κ᾽ τῇ ἐκ τῆς βαρυτῆτος ἐμποιουμένῃ ἐπὶ τὰ κάτω ταχυτῆτι ἐν τούτῳ τῷ λεπτῷ· ἀλλ᾽ ἐν τῷ ἑφεξῆς λεπτῷ τῆς ἐκ τῶν κάτω ἐπὶ τὰ ἄνω ταχυτῆτος ἀφανιζομένης

πειθαρχῆσαι ἀνάγκη τῇ βαρύτητι μόνῃ, κατὸν κατὰ τὴν ἐκ τῆς βαρύτητος ταχύτητα κ᾽ φορὰν, ὅ ἐςι κατὰ κάθετον. Ο. Ε. Δ.

230. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Η᾽ καμπύλη, ἣν ἐν τῷ κενῷ καταγράφει σῶμα προϊέμενον κατὰ φορὰν, εἴτε ὁριζόντιον, εἴτε τῷ ὁρίζοντι πλαγίαν, ἔςι παραβολή.

ΔΕΙΞΙΣ. Η᾽ γὰρ προϊεῖσα δύναμις, μεταδοθεῖσα ἅπαξ τῷ κινητῷ Α (χ. 106), ἀεὶ ἡ αὐτὴ ἓσα ἐν τῷ κενῷ, εἰ τοῦτο κινήσῃ κατὰ τὴν φορὰν ΑΔ τὴν εἴτε κάθετον, εἴτε πλαγίαν τῇ τῆς βαρύτητος φορᾷ ΑΘ, πρῶτον μὲν αὐτὸ ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ μετακομίσει εἰς τὸ Β, διανύσαν τὴν ΑΒ, ἐν δυσὶ δὲ λεπτοῖς εἰς τὸ Γ διανύσαν τὴν ΑΓ = 2ΑΒ, ἐν τρισὶ δὲ, τὴν ΑΔ = 3ΑΒ κτ. κ᾽ δὴ τὰ διατρεχόμενα διαςήματα ἐκ τῆς προβλητικῆς δυνάμεως συγκροτήσουσι τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον ÷ 1 . 2 . 3 . 4 κτ.· ἀλλὰ τὰ ἐκ τῆς βαρύτητος διατρεχόμενα διαςήματα αὔξουσι κατὰ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4 κτ. (151)· τεθέντος ἓν ΑΕ = 1, ἔσαι ΑΖ, διάςημα ἐκ τῆς βαρύτητος ἐν δυσὶ λεπτοῖς δευτέροις διανυσθὲν, = 4ΑΕ, κ᾽ ΑΘ = 9ΑΕ κτ.· ἐὰν ἓν ἐπὶ τέτων τῶν ἐξῆς κειμένων δυνάμεων συναθῶσι παραλληλόγραμμα τὰ ΑΕΒΗ, ΑΓΖΙ, τὸ σῶμα ἔσαι κατὰ τὸ Η τελευτῶντος τοῦ πρώτου δευτέρου λεπτοῦ, κ᾽ κατὰ τὸ Ι ἐν τῷ τέλει τοῦ δευτέρου, κ᾽ κατὰ τὸ Κ ἐν τῷ τέλει τοῦ τρίτου (131)· διαγράψει ἄρα καμπύλην τὴν ΑΗΙΚ· λέγω δὴ ὡς ἔσιν αὕτη παραβολή· ἐπείπερ αἱ ἀποτετμημέναι ΑΕ, ΑΖ, ΑΘ εἰσὶν ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ (ἐκ κατασκευῆς)· ἀλλὰ αἱ τεταγμέναι ΕΗ, ΖΙ, ΘΚ εἰσὶν ἴσαι ἑκάσῃ ταῖς ἀντισοίχοις εὐθείαις ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ· ἄρα αἱ ἀποτετμημέναι ΑΕ, ΑΖ,

ΑΘ, εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα· ἥτις ἐστὶν ἰδιότης τῆς παραβολῆς (Τ'ψ. Γεωμ. 14) Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Δοθέντος τοῦ ΑΒ διαστήματος, ὃ διανύει τὸ προβαλλόμενον σῶμα ἐν ἐνὶ λεπτῷ δευτέρῳ, καὶ τοῦ ΑΕ, ὃ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διὰ τὴν βαρύτητα διατρέχει, εὑρεθήσεται ἡ παράμετρος τῆς καταγραφησομένης παραβολῆς τρίτη ἴσα ἀνάλογος τῇ τε ἀποτετμημένῃ ΑΕ, καὶ τῇ τεταγμένῃ ΕΗ = ΑΒ (Τ'ψ. Γ. 29).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Τὰ μέρη ΘΜ, ΜΝ, ΝΚ τῆς ὁριζοντίου ΘΚ, ἃ ἀντισοιχεῖ τοῖς τόξοις ΑΗ, ΗΙ, ΙΚ, τοῖς διανυομένοις ἐν χρόνοις ἴσοις, εἰσὶν ἴσα· καὶ γὰρ (Γεωμ. 127) αἱ παράλληλοι ΑΘ, ΒΜ, ΓΝ, ΔΚ ἴσον ἀλλήλων ἀπέχουσιν, ὅτι ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΙΚΟΣΤΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ προβολῆς τῶν ἐκ τῶν πυροβόλων ὅπλων σφαιρῶν.

Ἐχομένως τούτων εἰώθασιν οἱ Γεωμετρηταὶ τύπον τινὰ ὑποσυνάπτειν τῆς τῶν πυροβολικῶν σφαιρῶν προβολῆς.

231. Ἐὰν σῶμα τὸ Δ (κ. 107) ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Δ πέσῃ, ἕξει ταχύτητα, δι' ἧς ἂν διέλθῃ ἰσομερῶς ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ, ΒΔ = 2ΓΔ (176)· ἀλλὰ προείληφω τὸ Δ κατὰ τὴν φορὰν Δη σὺν τῇ αὐτῇ ταχυτῆτι· ᾖσιν τὰ ὕστερον διανυσθησόμενα διαστήματα Δη, ΒΔ ἔσονται ὡς οἱ χρόνοι Χ, χ οἱ πρὸς τοῦτο δαπανηθέντες (110)· ἔσαι ἄρα Δη: ΒΔ :: Χ : χ· καὶ Δη² : ΒΔ² :: Χ² : χ².

232. Ἔστω Ηη εὐθεῖα, καθ' ἣν τὸ Δ ἠνέχθη ἐν

τῷ χρόνῳ, ἐν ᾧ διήνυσε τὸ Δη· ὄντος δὲ τοῦ αὐτοῦ χρόνου Χ ὑπέρτε τῆς Ηη ἢ τῆς Δη, ὁ ὑπὲρ τῆς ΓΔ χρόνος χ ἔσαι ὁ αὐτὸς τῷ ὑπὲρ τῆς ΒΔ· ἔσαι τοίνυν Ηη : ΓΔ :: Χ² : χ² (151)· ἄρα Ηη : ΓΔ :: Δη² : ΒΔ²· ἄρα Ηη × ΒΔ² = ΓΔ × Δη² (Ζ)· ἔστω γοῦν ΔΑ = 2ΒΔ = 4ΓΔ· ὅθεν ΓΔ : ΒΔ :: ΒΔ : ΔΑ, ἢ δὴ ΓΔ × ΔΑ = ΒΔ²· ἐν τῇ Ζ γοῦν ἀντικαταστάσης ἀντὶ ΒΔ² τῆς δυνάμεως ταύτης, ἔσαι Ηη × ΓΔ × ΔΑ = ΓΔ × Δη², ἢ διαιρέσει διὰ ΓΔ, Ηη × ΔΑ = Δη²· ἀλλὰ Ηη = ΔΠ (Γεωμ. 127)· ἄρα ΔΠ × ΔΑ = Δη².

233. Ἐπεὶ δὲ Δη, ΒΔ ἀνάλογοί εἰσι τοῖς χρόνοις Χ, χ (231), δυνατὸν ἄρα λαβεῖν Χ ἀντὶ Δη· ἀλλὰ Δη² = ΔΠ × ΔΑ (232)· ἄρα Χ² = ΔΠ × ΔΑ· κληθείσης δὲ τῆς ΓΔ = α, ὅθεν ΔΑ = 4α, ἔσαι Χ² = ΔΠ × 4α (Μ).

234. Ἔστω ἤδη ΕΔ εὐθεῖα ὁριζόντιος, ἢ ἡ Δη φορὰ, καθ' ἣν τὸ Δ προεῖται, περιέξει μετὰ τῆς ΕΔ γωνίαν τὴν ὑπὸ ηΔΕ· κληθήτω δὴ ἡ ἀπτομένη ταύτης τῆς γωνίας = Η· ἐν ᾗ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΔηΟ, ἐκλαμβανομένης τῆς ΔΟ ὡς αὐτῆς ἀκτῖνος = ρ, ἔσαι (Γεωμ. 497) ΔΟ : ηΟ :: ρ : Η· ἄρα ηΟ × ρ = ΔΟ × Η· ἀλλὰ ά. δυνατὸν ὑποθέσθαι τὴν ἀκτῖνα, ἥτις ἐστὶ σαθερὰ, = 1· ἄρα (Ἀριθ. 78) ηΟ = ΔΟ × Η· ἢ Ηη = ηΟ — ΗΟ, = ΔΟ × Η — ΗΟ· β΄. Δη² = ηΟ² + ΔΟ² (Γεωμ. 349), ἢ ἀντικαταστάσει τοῦ Χ² ἀντὶ Δη², ἔσαι Χ² = ηΟ² + ΔΟ²· ἐὰν ἓν ληφθῇ ἡ δύναμις τῆς ηΟ, ἡ ἐχάτη ἐξίσωσις γενήσεται Χ² = ΔΟ² × Η² + ΔΟ² (Ο) ἐπεὶ ἓν Χ² = ΔΠ × 4α = ηΗ × 4α = ΔΟ × Η × 4α — ΗΟ × 4α, ἢ Ο γενήσεται ΔΟ × Η × 4α — ΗΟ × 4α = ΔΟ² × Η² + ΟΔ² (Ρ).

235. Ε'πὶ τούτοις δὲ, ἐὰν ἐπὶ τῆς ὁριζοντίᾳ ΔΕ λημφθῇ σημεῖον ἕτερον τὸ Ο', λογισμῷ χρησαμένοις ᾗ περὶ τῆ ΟΔ'η' τριγώνᾳ τῷ αὐτῷ, ᾧ ᾗ περὶ τῆ ΔΟη, εὑρεθήσεται ἐξίσωσις $\Delta O' \times H \times 4\alpha - HO' \times 4\alpha = O\Delta'^2 \times H^2 + \Delta O'^2$ ὁμοία τῇ P· δυνατὸν ἓν ἐν τῇ P ἀντὶ μὲν ΔΟ ἀντικατασῆσαι τὴν τρεπτὴν χ, ἀντὶ δὲ τῆς ΗΟ τὴν τρεπτὴν υ· ᾗ δὴ ἔσαι $\chi \times H \times 4\alpha - \upsilon \times 4\alpha = \chi^2 H^2 + \chi^2$ (N)· ὅθεν ἀρύεται τὰ τείνοντα εἰς τὴν προβολὴν τῶν πυροβολικῶν σφαιρῶν.

236. ΟΡΙΣΜΟΣ. Π λ ά τ ο ς καλεῖται τῆς διὰ προβολῆς καταγραφομένης παραβολῆς ἡ ὁριζόντιος εὐθεῖα ΔΕ, ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ τῆς προβολῆς σημείου μέχρι τοῦ σημείου Ε, καθ' ὃ ἡ παραβολὴ συναντᾷ τῇ ὁριζοντίῳ.

237. ΠΟΒΛΗΜΑ Α'. Τὴν ἰσχὺν τῆς κόνεως ὁρίσασθαι.

ΛΥΣΙΣ. Ι'σχὺς ἐνταῦθα καλεῖται τῆς κόνεως, καθ' ἣν τὸ Δ, προβαλλόμενον κατὰ τὴν Δη φορὰν, καταγράφει τὴν παραβολὴν ΔΗΕ· δύναται δὲ ὑποτεθῆναι κῦτη ἴση τῇ, ἣν ἂν κτήσαιτο κατιὸν ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Δ (190), ᾗ δὴ τὴν αὐτὴν, ἧς χρήζει ἐφ' ᾧ ἀνελθεῖν ἐκ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Γ· ἐμφαινέτω δ' ἓν ταύτην ἡ ΓΔ παρισαμένη διὰ α, ᾗ δὴ διὰ τῆς ἐξισώσεως N· ὠκῦν, εἰς εὕρεσιν τῆς δυνάμεως τοῦ α, ᾗ δὴ τῆς ἰσχύος τῆς κόνεως, ὑποτεθείῶω ἡ γωνία $\eta\Delta E = 45°$, ἧς ἁπτομένη ἔσαι αὐτὴ ἡ ἀκτὶς = 1 (Γεωμ. 498), ᾗ διηρήῶω ἡ N διὰ $4\chi H - \alpha\upsilon$· ὅθεν ἔσαι $\alpha = \frac{\chi^2 H^2 + \chi^2}{4\chi H - 4\upsilon} \cdot \Pi$.

Ὑποτιθεμένης δ' ἓν τῆς, ἧς σοχαζόμεθα, νύσσης ἐπὶ τῆς ὁριζοντίᾳ εὐθείας κατὰ τὸ Ε, ΗΟ = υ ἔσαι = ο, ᾗ τεθέντος ΔΕ = χ = 100 ὀργ., ἡ Π γενήσεται $\alpha =$

$\frac{10000 \times 1 + 10000}{400 \times 1 - 4 \times 0} = -50$· ἐὰν δὲ $\Delta E = \chi =$ 50, ἡ Π ἔσαι $\alpha = 25$, τοῦτ' ἔσιν ἐν γένει ἡ ἰσχὺς τῆς κόνεως ἴση ἐσὶν τῷ ἡμίσει πλάτει, ἢ τῇ ὁριζοντίῳ γραμμῇ, τῇ ἀποτελουμένῃ ἐκ προβολῆς, γινομένης διὰ γωνίας 45°, πορισθήσεται ἄρα ἡ ἰσχὺς α τῆς κόνεως ἐν προβολῇ διὰ γωνίας 45°, μετρουμένου τοῦ πλάτους, ᾧ λαμβανομένου αὐτοῦ τοῦ ἡμίσεως.

238. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Γνωσῶν ὄντων τῆς κατὰ τὴν κόνιν ἰσχύος α (237), τοῦ ὁριζοντίου διαστήματος ΔΟ $= \chi$, τῆς νύσσης Η, τῆς αὐτοῦ ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ὑψώσεως ΟΗ $= \upsilon$, εὑρεῖν τὴν γωνίαν, ἣν συσῆσαι μετὰ τοῦ ὁρίζοντος ὀφείλει ἡ θέσις τοῦ κανονίου, ἵν' ἡ σφαῖρα τύχῃ τῆς Η.

ΛΥΣΙΣ. Πορισθήσεται αὕτη ἡ γωνία διὰ τῆς ἀπτομένης Η, ἧς εἰς διορισμὸν τῆς δυνάμεως μεταθέσει γενέσθω ἡ Ν ἐξίσωσις· $H^2\chi^2 - \chi H 4\alpha = -\chi^2 - 4\alpha\upsilon$· διαιρέσει δὲ διὰ χ^2, $H^2 - \frac{4\alpha H}{\chi} = \frac{-\chi^2 - 4\alpha\upsilon}{\chi^2}$· ἀναπληρώσει δὲ τοῦ ἐλλείποντος τετραγώνου (Συμβ. Λογ. 464), $H^2 - \frac{4\alpha H}{\chi} + \frac{4\alpha^2}{\chi^2} = \frac{-\chi^2 - 4\alpha\upsilon}{\chi^2} + \frac{4\alpha^2}{\chi^2}$· ἐξαγωγῇ ῥιζῶν· $H - \frac{2\alpha}{\chi} = \pm\sqrt{\frac{-\chi^2 - 4\alpha\upsilon}{\chi^2} + \frac{4\alpha^2}{\chi^2}}$· ἄρα $H = \frac{2\alpha}{\chi} \pm \sqrt{\frac{-\chi^2 - 4\alpha\upsilon}{\chi^2} + \frac{4\alpha^2}{\chi^2}}$ (Σ)· ἐνταῦθεν . . .

239. Ἤτοι πρὸς τῷ ὁρίζοντι κεῖται ἡ νύσσα, ἢ ὑπερθεν, ἢ ἔνερθεν αὐτοῦ· ᾧ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει,

ἐπεὶ ἡ Ε νύσσα ὑποτίθεται πρὸς τῷ ὁρίζοντι, υ ἔσαι = 0, καὶ δὴ ἡ Σ ἐξίσωσις γενήσεται $H = \frac{2\alpha}{\chi} \pm \sqrt{\frac{4\alpha^2 - \chi^2}{\chi}}$ (Ψ)· ἀλλ' ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει, ἐὰν ὑποτεθῇ $\alpha =$ 50 ὀργ., καὶ τὸ ὁριζόντιον διάσημα $= \chi = 100$ ὀργ., ἡ Ψ ἔσαι $H - \frac{100}{100} \pm \sqrt{\frac{10000 - 1000}{100}} = 1$, = τῇ ἁπτομένῃ τῆς 45° γωνίας (Γεωμ. 498) τῆς ζητουμένης.

Ἀλλ' ἐὰν ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἦ $\chi = 50$, ἡ Ψ γενήσεται $H = \frac{100}{50} \pm \sqrt{\frac{10000 - 2500}{50}} = 2 \pm \sqrt{\frac{7500}{50}}$, $= 2 \pm \frac{8,660230}{50}$ (Συμβ. Λογ. 144) = 2 ± 1,73205· συναπτομένου μὲν ἑνὸς τῷ 2 τοῦ ἀριθμοῦ 1,73205, ἔσαι 3,73205 ἁπτομένη γωνίας 75°· ἀφαιρουμένου δὲ (ὃ δηλοῖ τὸ ±) ἔσαι 0,26795 ἁπτομένη γωνίας 15°· ἄμφω δὲ αἱ γωνίαι ἐπίσης τὸ πρόβλημα ἐπιλύουσι· ἐντεῦθεν ἄρα ...

240. α'. Τὸ πλάτος ὑπὸ γωνίαν 45° ἐπὶ δεδομένης ποσότητος κόνεως τὸ μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν δυνατῶν· καὶ γὰρ ὄντος $\alpha = 50$ ὀργ. ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi > 100$ ὀργ. ἂς εἶχε τὸ ἐν γωνίᾳ 45° πλάτος, $4\alpha^2 - \chi^2$ γενήσεται ἐν τῇ ἐξισώσει Ψ λειπτικὸν, καὶ $\pm \sqrt{\frac{4\alpha^2 - \chi^2}{\chi}}$ ποσὸν ἀνύπαρκτον· β'. ἐν γωνίᾳ 15°, καὶ 75° τὸ αὐτὸ διανύεται πλάτος, καὶ διὰ τοῦ Ψ τύπου ἰδεῖν ἔξεστιν ἐν γένει

δύω γωνίας ἰσοδιεξώσας τῶν 45° ἀποτελέσας ἴσα πλάτη· δυνατὸν ἄρα τυχεῖν τῆς νύσσης, διχῶς ἰθύναντας τὸ κανόνιον (τῷ ὁριζοντίῳ διασήματος, περὶ ἓ ὁ λόγος, ἐλάττονος ὄντος τῷ ἐν γωνίᾳ 45° πλάτυς), παρ' ὅσον ἡ μὲν μείζων ἢ 45° γωνία, ὑψηλότερον μεταίρυσα τὴν σφαῖραν, δεξιὰν αὐτὴν καθίσησιν οἴκυς κατερείπειν, ἡ δ' ἐλάττων ἢ 45° δεξιωτέρα ἐσὶ τὰς ἐχθρὰς λυμήνασθαι, εἴτε ὅτι ταχίσα διὰ τῆς ὁριζοντίυ αὐτῆς κινήσεως διαδραμεῖται, εἴτε ὅτι χρόνον ἐλάττονα μετὰ τὴν λάμψιν δαπανήσει, ἵνα διεκδράμῃ· γ΄. ἐπεὶ τὸ πλάτος τὸ ὁριζόντιον τὸ ἐν γωνίᾳ 15° ἔσιν = 50 ὀργ. (239), ἥμισυ τῷ ὑπὸ 45° ὁριζοντίυ πλάτυς, ἐμφαίνει αὐτὴν τὴν ἰσχὺν τῆς ακόνεως· ἔσιν ἄρα εὐχερέσερον ἀποπειρᾶσθαι τῆς κόνεως ἐν γωνίᾳ 15°, ἢ ἐν 45°, λαμβάνεσιν ὑπὲρ τῆς α ὅλον τὸ πλάτος· δ΄. τὰ πλάτη ἐν γωνίαις διαφόροις ἐλαττῶται, περαιτέρω μὲν τῶν 45° ἕως τῶν 90°, κατωτέρω δὲ τῶν 45° μέχρι τῷ 0· ἐν τύτοις γὰρ τοῖς ὅροις, εἴτ' ἓν κατὰ τὴν φορὰν ΔΑ, ἢ ΔΕ τὸ πλάτος ἔσαι μηδὲν, ὡς δῆλον· ε΄. ῥᾷσον κατιδεῖν, ὡς διὰ τῷ τύπυ Ψ πίνακά τις δύναται ἐκθέσθαι πάντων τῶν πλάτεων τῶν ἀποτελυμένων ὑπὸ πληρώματος κόνεως, ἧς ἡ ἰσχὺς δέδοται ἐν διαφόροις γωνίαις, ὃ πέπρακται ὑπὸ τῷ M. B, ἐν τῷ Γαλλικῷ αὐτῷ Πυροβολικῷ συγγράμματι.

241. Ε'ν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει κείσθω κατὰ τὸ H ἡ νύσσα, ᾗ ληφθέντος διὰ τῆς τριγωνομετρίας τῷ ὁριζοντίυ διασήματος ΔO = χ, ᾗ τῷ ὑψώματος HO = υ, ἀντικατασήτωσαν ἐν τῷ τύπῳ Σ αἱ δυνάμεις α, χ, υ, ᾗ τἄλλα πεπράχθω ὡς ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει.

Ε'ν δὲ τῇ τρίτῃ περιπτώσει ἔσω ἡ νύσσα ἐν τῷ M· ᾗ δὴ ἡ MO″, εἴτ' ἓν υ, ὡς ἐναντία τῇ HO, γενήσεται λειπτι-

κὴ, ὃ ποιήσει τὸν τύπον $H = \frac{2\alpha}{\chi} \pm \sqrt{\frac{-\chi^2 + 4\alpha\upsilon + 4\alpha^2}{\chi}}$.

τȣ́τȣ προϋποτεθέντος, τὰ λοιπὰ γενέσθω, ὡς πρότερον.

242. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ὑποτέθεινται μὲν (230) αἱ ἐν διαφόροις σημείοις Α, Η, Ι κτ. τῆς καμπύλης ΑΙΚΗ τῆς ὑπὸ βαρέος καταγραφομένης φοραὶ ΑΘ, ΒΜ, ΓΝ, κτ. παράλληλοι· ἔσονται δὲ ἀληθῶς, τȣ̃ μεταξὺ τȣ́των τῶν φορῶν διαςήματος ὡς μηδὲν ἐκλαμβανομένȣ, παραθέσει τȣ̃ διαςήματος, καθ' ὃ ἡ καμπύλη τȣ̃ τῆς γῆς κέντρȣ ἀπέχει, ἔνθα αἱ φοραὶ αὗται συμπεσȣ̃νται ἀλλήλαις (170), ȣ̓κ εἰσὶ μέντοιγε κυρίως παράλληλοι· ϗ γὰρ καμπύλη, ἣν καταγράφει ἡ προβολὴ, ȣ̓κ ἔςι κυρίως παραβολὴ, καίτοι ἐγγὺς ἐκείνης τῆς φύσεως προσπελάζȣσα.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Τȣ̃ βάρȣς τȣ̃ ἀέρος $\frac{1}{950}$ ὄντος τȣ̃ βάρȣς τȣ̃ ὕδατος, ϗ δὴ $\frac{1}{6650}$ τȣ̃ βάρȣς τῆς ὕλης, ἧς κατασκευάζȣσι τὰ πυροβολικὰ σφαιρίδια, δοκεῖ τὸ κατ' ἀρχὰς ȣ̓δεμίαν αἰσθητὴν ἐκ τȣ̃ ἀέρος αὐτοῖς ἐγγίνεσθαι ἔνςασιν· ϗ ȣ̓́τω προβαλλόμενα καταγράφειν παραβολήν· ȣ̓ μὴν ἀλλὰ ϗ ὅσα εἰδικὴν ἔχει βαρύτητα, οἷον λίθοι κτ, ἐν ἰσχύϊ προϊέμενα· δοκεῖ δὲ μάλιςα ȣ̓́τως ἔχειν, ϗ ὅτι ἐνιςάμενος ὁ ἀὴρ βραχύτι τῇ προβλητικῇ δυνάμει, ἐνίςαται ὡσαύτως ϗ τῇ τῆς βαρύτητος.

243. Ἐὰν μέντοι διανοηθῇ τις α΄. ὡς ἡ ταχύτης σφαίρας τινὸς, ἐξιȣ́σης τȣ̃ κανονίȣ, εἰ μὴ τῷ ἀέρι ἐπιβραδύνοιτο, διέτρεχε περίπȣ πόδας 1200 ἐν ἑνὶ δευτέρῳ, ὅτε πίπτȣσα διὰ τῆς βαρύτητος αὐτῆς ἐν ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ διανύει μόνον πόδας 15· β΄. ἡ πρὸς τὰς προβολὰς ἔνςασις τȣ̃ ἀέρος ἔςιν ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν

ταχυτήτων· γ΄. τῆς τῦ ἀέρος πυκνότητος αἰσθητῶς διαφόρυ ἔσης ἐν τῷ ὁρίζοντι ϗ ἐν διαφόροις ὕψεσιν, εἰς ἃ ἀνίασι τὰ προβαλλόμενα ἐν διαφόροις γωνίαις, ῥᾳδίως ἄντις καταναοήσειεν, ὡς ὁ ἀὴρ τὴν τῶν προβαλλομένων κίνησιν, ϗ δὴ τὴν ἐξ αὐτῶν διαγραφομένην καμπύλην, ὁποσῦν ἀλλοιοῖ.

Ἵνα δὲ κρίνειν ἔχῃ τις πόσον ὁ ἀὴρ μεταβάλλει τὴν ὑπὸ τῶν βαρέων καταγραφεῖσαν ἂν παραβολὴν, εἰ φέροιντο ἐν τῷ κενῷ, ὑπ' ὄψιν τῦ ἀναγνώστυ ᾠήθην δεῖν ὑποτεθέσθαι τὸν πίνακα τῶν ἐμμελῶς γενομένων πειραμάτων ἐν τοῖς βασιλικοῖς παιδευτηρίοις τῆς πυροτεχνίας.

Πίναξ.

Τῶν πλάτεων προβολῶν, γενομένων κατὰ τὸν ὀκτώβριον μῆνα τῦ 1771, κατὰ τὴν τῦ ἀέρος ἔνσασιν, ϗ τῶν αὐτῶν πλάτεων λογιωθέντων ἐν τῷ κενῷ, ἄνευ τῆς ἐκ τῦ ἀέρος ἐνσάσεως· αἱ ληφθεῖσαι σφαῖραι ἐν τύτοις τοῖς ἀποπειράμασιν ἦσαν διάμετρυ 11 δακτ. ϗ γραμ. 10, βάρος δὲ 142 λιτρῶν· προέθησαν δὲ διὰ κόνεως 3 λιτρῶν ϗ $\frac{3}{4}$

γωνίαι τῆς προβολ.	πλάτη. ἐν τῷ κενῷ.	πλάτη, οἷα παρετηρήθησαν.	διάρκεια πλάτεων ἐν τῷ κενῷ.	διάρκεια πλάτεων οἷα παρετηρήθη.
10 βαθμ.	253 ὀργ.	257 ὀργ.	$4\frac{3}{5}$ δευτ.	4 δεύτ.
		249		
		221		
		228		
20	476	440	$8\frac{3}{10}$	$7\frac{1}{5}$
		424		
		394		
		398		

30 βαθμ.	640 ὀργ.	451 ὀργ.	12 $\frac{1}{5}$ δευτ.	10 $\frac{3}{4}$ δεύτ.
		516		
		537		
		492		
40	728	569	15 $\frac{3}{5}$	14 $\frac{2}{5}$
		575		
		574		
		544		
43	738	506	16 $\frac{1}{2}$	14
		517		
		543		
		509		
45	739	490	17 $\frac{1}{5}$	15 $\frac{1}{5}$
		536		
		505		
		489		
50	728	481	18 $\frac{2}{5}$	16
		512		
		488		
		507		
60	640	457	21	19 $\frac{1}{3}$
		424		
		457		
		448		
70	470	349	22 $\frac{4}{5}$	22
		297		
		349		
		328		
75	370	298	23 $\frac{2}{5}$	22
		265		
		261		
		256		

244. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄. Ἐκ μόνης τῆς ὄψεως τὸ προτεθέντος πίνακος εὐχερῶς συνάγεται, ὅτι α΄. ἀδύνατον ἀπὸ πλάτους γωνίας τινὸς συναγαγεῖν τὸ πλάτος γωνίας ἄλ-

λης, εἰμὴ κατὰ προσέγγισιν· ἔτως ἓν τὸ πρῶτον ἄραντες τὸ κανόνιον ἐν γωνίᾳ κλίσεως, ἣν περιέχουσιν οἱ πίνακες ἐπὶ νύσσης, ἧς ἡ θέσις ἔγνωσαι, λείπεται παρατηρῆσαι, πόσον πλάτος ἔσι λίαν ἰσχυρὸν, ἢ λίαν ἀσθενὲς, ϗ διορθῶσαι τὸ διάπτωμα, αὔξοντας ἢ ἐλαττοῦντας τὴν κλίσιν τῦ κανονίυ, ἔς τ' ἂν τὸ προβαλλόμενον τύχῃ τῆς νύσσης· β'. ἐκ ἐλπισέον πάντως τεύξεσθαι τῆς νύσσης, εἰ ἐν ἑκάςῳ πλάτει μικρά τις εἴη ἔκτασις· ϗ γὰρ καίτοι ἐν τοῖς προεκτεθεῖσιν ὑποδείγμασιν, ὅσην ἐνῆν κατέθεντο τὴν φροντίδα, ἵν' αἱ ἐν τῇ αὐτῇ γωνίᾳ ἀπόπειραι τὰ αὐτὰ πλάτη ἀποτελῶσι, χρησάμενοι ἀεὶ τῇ αὐτῇ ποσότητι τῆς κόνεως κτ, ὐδέποτε μέντοι εὑρεῖν ἠδυνήθησαν δύω ἰσάλληλα πλάτη· εἰλήφθωσαν γὰρ τέσσαρα πλάτη, ἃ ἐγένοντο ἐν γωνίᾳ 45°, ὑφ' ἣν συνήθως τῆς κόνεως ἀπόπειρα γίνεται· εἰσὶν ἓν τέσσαρα πλάτη πάντη διάφορα, ὧν τὸ μέγισον διαφέρει τῦ ἐλαχίσου ὀργυιαῖς 47, εἴτ' ἓν $\frac{1}{10}$ περίπυ τῦ ἐλαχίσυ πλάτυς· ἀλλὰ ϗ ἔτως ἐπάναγκες εἶναι τὸ πρᾶγμα· παρὰ γὰρ τὰς διαφόρους αἰτίας, τὰς ἀπαντώσας ἐν τῇ ἀναφλέξει τῆς κόνεως, εἰσὶ ϗ αἱ μὴ ὡρισμένως γινόμεναι παραπληρώσεις· ἐκῦν ὅσῳ ἰσχυρότερον παραπληρῦται ἡ κόνις, τοσύτῳ τὸ προβαλλόμενον πόῤῥω χωρεῖ.

245. Ἀλλ' ἐξιέσης τῆς σφαίρας ἐκ τῦ κανονίυ ἐν δυσὶ πληρώμασι κόνεως ἴσοις, ἡ τῦ ἀέρος ἔνσασις διάφορος εἶναι δύναται, ϗ ἐν δυσὶν ὥραις διαφόροις ἀεὶ ἔσαι διάφορος· α'. ἀὴρ γὰρ θερμότερος, ἧττον ἔχει πυκνότητος, ϗ δὴ ἧττον ἐνίσαται ἀέρος ψυχροτέρυ· β'. ἠρεμῦντος, ἢ ἀντιπνέοντος, ἢ ϗ συντρέχοντος τῦ ἀνέμυ ταῖς φοραῖς τῶν σφαιρῶν, ἡ προβολὴ διαφόρως ἀλλοιωθήσεται, ἐλαττυμένη, ἢ αὐξομένη· ἀλλ' ὅ,τε ἀὴρ, ϗ αἱ πνοαὶ

τῶν ἀνέμων συνεχῶς μεταβάλλεσιν· ἆρα ὁρισθῆναι τὰ πλάτη ἐκ πάντων τῶν εἰρημένων ἀδυνάτως ἔχει δείκνυται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΙΚΟΣΤΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ τῆς κατ' ἀναλίκνισιν κινήσεως.

246. Βάρος τὸ Β (κ. 108) ἐξ ὕλης σερεᾶς, ἵν' ἐλάττονι ἀπαντᾷ τῇ τῦ ἀέρος ἐνσάσει, μίτῳ προσηρτημένον τῷ ΑΒ, καλεῖται σῶμα ἐκκρεμές· τὸ δὲ Β σημεῖον τῆς ΑΒ καθέτυ καλεῖται σημεῖον ἠρεμήσεως· ἐὰν ἓν τὸ Β ἀρθῇ φέρε, ἐκεῖθεν δὲ ἀφεθῇ, κατελεύσεται εἰς τὸ Β· εἶτα ταχυτῆτα τοσαύτην προσκτήσεται, ὅση ἂν οἷον ἦ ἀναβῆναι ὕψος τὸ ΒΔ, ἴσαν τῷ ἀφ' ἓ κατέπεσε ΓΒ (190), ἀπάσης ἄλλης αἰρομένης αἰτίας (99)· αὕτη ἓν ἡ ὅλη κίνησις ΓΒΔ τῦ ἐκκρεμῦς σώματος καλεῖται ἀναλίκνισις.

Καλῶνται ἀναλικνίσεις ἰσόχρονοι, ἡνίκα χρόνον ἴσον διαρκῶσι.

247. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Μόνης θεωρυμένης τῆς βαρύτητος, ἐὰν ἐγερθῇ τὸ σημεῖον τῆς ἠρεμήσεως Β, τὸ ἐκκρεμὲς ἀποτελέσει ἀναλικνήσεις ἀεὶ ἴσας ϗ ἀπείρυς τὸν ἀριθμόν.

ΔΕΙΞΙΣ. Καταπίπτον γὰρ ἐκ τῦ Γ ἐπὶ τὸ Β, προσκτᾶται ταχύτητα, ὅση ἀνελθεῖν δύναται ἐς τὸ Δ (190)· καταπίπτον δὲ ἐκ τῦ Δ ἐπὶ τὸ Β προσκτᾶται ταχύτητα, ὅση ἂν ἀνέλθοι ἐπὶ τὸ Γ, ϗ ὕτως ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. Ο. Ε. Δ.

248. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Αἰρομένης τῆς ἐκ τῦ ἀέρος ἐνσάσεως, ἐὰν ἀκίνητος ὑποτεθῇ ἡ γῆ, ϗ κατὰ διάμε-

τρον τετρημένη, λίθος ἄφετος εἰς τὴν κατὰ κάθετον ὀπὴν, πεσεῖται εἰς τὸ κέντρον τῆς γῆς, καὶ ἐν τῇ καθόδῳ προσκτήσεται ταχύτητα, ὅση ἀνελθεῖν δυνήσεται εἰς τὰς ἡμῖν ἀντίποδας· ἀφικόμενος δὲ ἐκεῖσε, καὶ πᾶσαν ἀποβαλὼν τὴν ταχύτητα, ἣν ἐκτήσατο πεσὼν ἀφ' ἡμῶν ἐς τὸ τῆς γῆς κέντρον, παλινδρομήσει αὖθις εἰς τὸ κέντρον, κἀκεῖ αὖθις κτησάμενος ταχυτῆτα ἱκανὴν, ἀνελεύσεται ὡς ἡμᾶς, καὶ τοῦτο ἐπ' ἄπειρον· καὶ γὰρ ἅπαν σῶμα βαρὺ τὴν αὐτὴν προσκτᾶται ταχυτῆτα, εἴτε πίπτον κατὰ κάθετον τὴν ΓΒ, ἢ διὰ τοῦ τόξου ΓΒ μέχρι τοῦ κέντρου τῆς ἠρεμήσεως (204), καὶ ἀεὶ κτᾶται ταχύτητα, δι' ἧς ἂν καὶ πέραν τοῦ κέντρου τῆς ἠρεμήσεως ἀνελθεῖν δύναται εἰς ὕψος ἴσον τῷ ἀφ' οὗ κατέπεσεν· ἀλλὰ κέντρον ἠρεμήσεως τῶν γηΐνων βαρέων ἐστὶν αὐτὸ τὸ κέντρον τῆς γῆς, ὡς εἰς τοῦτο ὠθούσης αὐτὰ τῆς βαρύτητος (170)· ἄρα ὁ λίθος ἀνελεύσεται εἰς ὕψος ἴσον τῷ, ἀφ' οὗ κατέπεσε, μετὰ τὸ ἀφικέσθαι εἰς τὸ κέντρον τῆς γῆς, καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον.

249. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ε'ἀν ἄρα βάρος τι τὸ Β ἧττον ὑψῶται μεθ' ἑκάστην ἀναλίκνισιν, καὶ τέλος καθηρεμῇ, τοῦτο γίνεται διὰ τὸν ἐνισάμενον ἀέρα, καὶ ἔτι τυχὸν διὰ τὸ τοῦ μίτου δύσκαμπτον.

250. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ε'ἀν ἐκκρεμὲς τὸ ΑΒ πλείω χρόνον δαπανᾷ εἰς τὰς ἑαυτοῦ ἀναλικνίσεις ἐν τῷ τύπῳ Π, ἢ ἐν τῷ τύπῳ ξ, τοῦτο γίνεται, ὅτι ἡ βαρύτης ἧττον ἐπενεργεῖ ἐν τῷ Π, ἢ ἐν τῷ ξ.

ΔΕΙΞΙΣ. Καθ' ἑαυτὸ δῆλον· μόνη γὰρ ἡ βαρύτης ἐμποιεῖ τὴν ταχύτητα τῶν ἀναλικνίσεων τοῦ ἐκκρεμοῦς, καὶ ἅπαν ἀποτέλεσμα ἀνάλογον εἶναι δεῖ τῇ ἑαυτοῦ αἰτίᾳ (87).

251. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ ἀναλικνίσεις βραδεῖαι γίνονται αἰσθητῶς ὑπὸ τὸν ἐξισωτὴν, καίτοι τῶν αὐτῶν ἐπι-

μελῶς τηρȣμένων περιςάσεων αὐτȣ̃ τε, ϗ ἐν τοῖς πόλοις· ἄρα τὰ σώματα εἰσὶν ἡττοβαρῆ ἐν τῷ ἰσημερινῷ, ἢ ἐν τοῖς πόλοις· διαπιςȣ̃νται δὲ τȣ̃το ϗ ἄλλαι δύω αἰτίαι, περὶ ὧν ἐρȣ̃μεν ἐν τοῖς ἑξῆς.

252. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Αἱ διάρκειαι ἑκάςης ἀναλικνίσεως δύω ἐκκρεμῶν ΑΒ, αβ (χ. 108), διαφόρων τὸ μῆκος, εἰσὶν ἐν ὑποδιπλασίονι λόγῳ τῶν μήκεων.

ΔΕΙΞΙΣ. Αἱ ταχύτητες τȣ̃ βάρȣς Β, ϗ τȣ̃ β, ἐν δυσὶν ὁμοίοις τόξοις ΓΒΔ, γβδ, εἰσὶν ὡς αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀκτίνων ΑΒ, αβ (216)· ἐχέτω ȣ̃ν ΑΒ : αβ :: 4 : 1· ἄρα ϗ ΓΔ : γδ :: 4 : 1· ἄρα τὸ διατρεχόμενον διάςημα ὑπὸ τȣ̃ Β ταχυτῆτι διπλῇ, ἔσεται τετραπλάσιον· δεήσει ἄρα διπλȣ̃ χρόνȣ, ἵνα διανυσθῇ τὸ ΓΔ, ἢ τὸ γδ· ἡ ἄρα διάρκεια τῆς τȣ̃ Β ἀναλικνίσεως ἔσεται πρὸς τὴν διάρκειαν τῆς τȣ̃ β ὡς 2 : 1 :: √ΑΒ : √αβ. Ο.Ε.Δ.

253. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀναλικνίσεων ἐκκρεμȣ̃ς τȣ̃ ΑΒ πρὸς τὸν τῶν τȣ̃ αβ, ἔςιν ἐν ἀντιςρόφῳ ὑποδιπλασίονι λόγῳ τῶν μήκεων, εἴτ' ȣ̃ν ὡς √αβ : √ΑΒ.

254. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐπεὶ ἡ διάρκεια τῆς ἀναλικνίσεως αὔξει κατὰ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τȣ̃ κατὰ τὸ ἐκκρεμὲς μήκȣς, εὑρεθήσεται μεταξὺ τῶν ἀπείρων ἀναλικνίσεων διαφόρων τὴν διάρκειαν, ἐκ μηκῶν τελȣμένων διαφόρων, ἀναλίκνισις, ἥτις διαρκέσει ἴσον ἑνὶ λεπτῷ δευτέρῳ· ἄρα ἐκκρεμὲς, ȣ̃ τὸ μῆκος τοιȣ̃τον, ὥςε ἑκάςην ἀναλίκνισιν, τελȣμένην ἐν τόξῳ τριῶν ἢ τεσσάρων μοιρῶν, διαρκεῖν ἓν λεπτὸν δεύτερον, καλεῖται ἐκκρεμὲς τῶν δευτέρων· ἐπεὶ δὲ ἑκάςῃ ὥρᾳ εἰσὶ λεπτὰ δεύ-

τερα 60 × 60 = 3600, τοσαύτας ἀναλικνίσεις ἀποτελεῖν ἀνάγκη τὸ τοιοῦτον ἐκκρεμὲς ἐν ἑκάστῃ ὥρᾳ.

Εἶπον, τόξῳ τριῶν ἢ τεσσάρων μοιρῶν· ἐπεὶ, ὡς αὐτίκα φανήσεται, αἱ κυκλικαὶ ἀναλικνίσεις ἐν ἐλαχίσοις μόνον τόξοις εἰσὶν ἰσόχρονοι.

Τὸ ἐκκρεμὲς τῶν δευτέρων λεπτῶν χρησιμώτατόν ἐσι τοῖς φιλοσοφοῦσιν εἰς καταμέτρησιν τῆς διαρκείας διαφόρων ἀκαριαίων φαινομένων ἐρανίων τε καὶ γηΐνων. Τὸ δὲ μῆκος αὐτῶν βραχύτι παιλλεται κατὰ τὰς διαφόρας χώρας τῆς γῆς· μεγεθυνομένων ἀναλόγως τῇ ἀπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ ἀποσάσει, καὶ τῇ πρὸς τὰς πόλας ἐγγίσει· εἴγε, ὡς ὀψόμεθα, ἡ βαρύτης τῶν σωμάτων αὔξει προϊοῦσιν ἀπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ πρὸς τὰς πόλας.

255. Ἰδὲ δὴ κατὰ τὰ εἰρημένα, ὅπως κατασκευάσομεν ἐκκρεμὲς ἁπλοῦν, χρήσιμον ἐν παντὶ χώρῳ.

α'. Εἰλήφθω μίτος μετάλλινος λεπτὸς, οὗ τῷ πέρατι προσδεδέσθω βάρος κυκλοτερὲς ὕλης πυκνοτάτης, οἷον μολίβδτυ, ἢ χρυσοῦ, ὡς εἶναι βραχεῖαν αὐτοῦ τὴν ἐπιφάνειαν πρός γε τὸ ποσὸν τῆς μάζης, ἢ τοῦ βάρους· ἵ τῇ ἀντισάσει τοῦ ἀέρος αἰσθητῶς μὴ μεταλλοιοῦσθαι τὰς ἀναλικνίσεις.

β'. Γενέσθω τὸ μῆκος τρίπυν ἀκριβῶς, ἐκ τοῦ σημείου καθ' ὃ προσήρτηται ὁ μίτος μέχριτοῦ κέντρου τοῦ βαρέος σώματος.

γ'. Ὑψόσθω τὸ βάρος Β ὑπὲρ τὸ τῆς ἡρεμήσεως σημεῖον Β δυσὶν ἢ τρισὶ περίπυ μοίραις, καὶ ἀριθμήσθωσαν αἱ ἐν ἑνὶ φέρε τεταρτημορίῳ ὥρας γενησόμεναι ἀναλικνίσεις.

Ποιείτω δὲ ἐν τέτῳ τῷ χρόνῳ ἀναλικνίσεις 909· φημὶ ἓν 900 ἀναλικνίσεις, εἴτ' ἓν τὸ τέταρτον τῶν 3600,

ἂς τὸ ἐκκρεμὲς διανύειν δεῖ ἐν τῷ τεταρτημορίῳ τῆς ὥρας, πρὸς 909, ἃς διανύει τὸ 3 ποδῶν ἐκκρεμὲς, ἔστιν ὡς $\sqrt{3} = 1,732$ ὡς ἔγγισα πρὸς την χ τετραγωνικὴν ῥίζαν τῆ μήκυς, τῆ τῶν δευτέρων λεπτῶν ἐκκρεμῦς, εἰτ' ἐν $\chi = 1,74$ ὡς ἔγγισα· ὁ τετραγωνισθὲν ἴσον ἔσαι 3,0276 ποσὶ, εἴτ' ἓν ποσὶ 3, ϗ γραμμαῖς 3, ϗ σίγμασι 11 ϗ $\frac{7}{10}$ σίγματος ὅτι ἔγγισα.

256. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ε'ὰν ΑΓ ὑποτεθῇ ἡμικυκλοειδὴς ἴση τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΑΤ = ΤΒ = ΓΒ, καὶ πρὸς τῷ Γ σημείῳ προσαρτηθῇ ἐκκρεμὲς τὸ Π, προσδεδεμένον νήματι ἴσῳ τῷ ΑΤΓ, τὸ βάρος Π ἀποχωρίσει κατὰ βραχὺ τὸ νῆμα ΠΤΓ ἀπὸ τῆς κυκλοειδῦς ΑΓ, ϗ γενόμενον κατὰ τὴν θέσιν ΓΤ ἐνειλίξει αὐτὸ τῶν ἡμικυκλοειδεῖ ΓΒ· ϗ ἕτω τὸ ἐκκρεμὲς Π ἀναλικνιωθήσεται καταγράφον τὴν κυκλοειδῆ ΑΤΒ διὰ τῶν δύω κυκλοειδικῶν πετάλων ΓΑ, ΓΒ· ἀχθεισῶν δὲ τῶν ἐν τῷ χήματι καταφαινομένων γραμμῶν, ἐκ τῆς κατὰ τὴν κυκλοειδῆ ἰδιότητος ἔσιν ἡ ἡμικυκλοειδὴς ΑΓ = 2. ΑΕ = ΓΝ (ὑψ. Γ. 340)· ἔσι δὲ τὸ τόξον ΑΤ ἴσον τῷ ΤΠ μήκει τῦ νήματος, ὑφ' ᾧ ἐνειλίσσεται, τῦ ἐκκρεμῦς Π ὄντος πρὸς τῷ Α. ἀλλαμὴν ΑΤ = 2 Αζ (ὑψ. Γ. αὐτόθ.) ἄρα ΠΤ = 2 Αζ = 2. ηΤ. ἔσι γὰρ ηΤ τῇ Αζ παράλληλος (ὑψ. Γ. 335), τὸ δὲ χῆμα ζΤηΑ ἔσι παραλληλόγραμμον· ἄρα ηΠ = ηΤ· ἔσι δὲ τὸ κυκλικὸν τόξον Αζ ἴσον τῇ τεταγμένῃ ζΤ = Αη (ὑψ. Γ. 333), ϗ ἐπείπερ ΑΔ = ΑζΕ, ἀνάγκη ὑπάρχειν Δη = Εζ = ΜΥ· τὰ γὰρ τόξα ΑΖ, ΔΜ ἴσων κύκλων ὄντα, ϗ ὑπὸ τῶν παραλλήλων Τζ, Αη, τῶν ἴσον ἀπεχόσων ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΠΜ, περιεχόμενα, εἰσὶν ἀναγκαίως ἴσα· ἄρα ζΕ = ΜΥ. ἀλλὰ τῶν γωνιῶν ζΑη, ΜΔη, ἡ μὲν μετρεῖται τῷ ἡμίσει τῦ τόξυ Αζ, ἡ

δὲ δευτέρα τῷ ἡμίσει τοῦ τόξου ΜΔ, ἄρα εἰσὶν αὗται μὲν ἰσάλληλοι, αἱ δὲ ζΑ, ΔΜ εὐθεῖαι παράλληλοι· ἐκεῖνο τὸ χῆμα ηΔΜΠ ἔσι παραλληλόγραμμον· ὅθεν ΠΜ = ηΔ = ΜΥ, τοῦτ' ἔσιν ἡ τεταγμένη ΠΜ ἰσοῦται τῷ ἀντιστοίχῳ κυκλικῷ τόξῳ ΥΜ· ἄρα

Α'. Η καμπύλη ΑΠΥ ἔσιν ἡμικυκλοειδὴς γεννωμένη ἐκ τῆς ἐξελίξεως τῆς ἡμικυκλοειδοῦς ΓΑ. τοιγαροῦν ἡ ἐξειλιγμένη τῆς κυκλοειδοῦς ἔσι κ) αὕτη κυκλοειδὴς, ὅπερ ἑτέρῳ λόγῳ δέδεικται ἡμῖν ἀλλαχοῦ (ὑψ. Γ. 339)

Β'. Ε'κκρεμὲς ἀναλικνιζόμενον μεταξὺ δύω πετάλων κυκλοειδικῶν ΑΓ, ΓΒ, ὧν ἑκάτερον ἴσον ἐσὶ τῷ μήκει τοῦ κατὰ τὸ ἐκκρεμὲς νήματος, κυκλοειδῆ καταγράφει.

Γ'. Αἱ τοιαυτώδες ἐκκρεμοῦς ἀναλικνίσεις εἰσὶν ἰσόχρονοι διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς κυκλοειδοῦς (226)

Δεῖ μέντοι τὰ πέταλα λίαν ὑπάρχειν ὁμαλὰ, καὶ ἐλασικῆς δυνάμεως ἄμοιρα, ἵνα μὴ τῶν ἀναλικνίσεων τὸ ἰσόχρονον τριβῇ τε κ) ἐλασικότητι παραλυμαίνηται.

Δ'. Ε'ὰν ἐκκρεμὲς καταγράφῃ κυκλικὸν τόξον μοιρῶν 3, ἢ 4, ἐπεὶ συμπίπτει τῷ κυκλοειδοῦς τόξῳ, αἱ αὐτοῦ ἀναλικνίσεις ἰσόχρονοι ἔσονται (254).

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ Δ'. ΤΟΜΟΥ.

ΠΙΝΑΞ ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΗΣ.

Τῶν ἐν τῷ Δ΄. Τόμῳ περιεχομένων.

ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΩΝ.

Σελ.

Κεφάλαιον Η΄. Περὶ τῶν μεγίσων καὶ ἐλαχίσων . 3
— — Θ΄. Περὶ ἐξειλιγμένων καὶ τῶν φιλεσῶν ἡμιδιαμέτρων 41
— — Ι΄. Περὶ τῶν Καυσικῶν δι' ἀνταναπλάσεως καὶ τῶν διὰ θραύσεως . . 64
— — ΙΑ΄. Περὶ τῶν σημείων τῆς καμπῆς καὶ τῆς ἀνακάμψεως 84

ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ.

Κεφάλαιον Α΄. Περὶ ἀπειροσῶν ἐχόντων μίαν τρεπτὴν ποσότητα 99
— — Β΄. Περὶ ἀπειροσῶν συνεζευγμένων . 103
— — Γ΄. Περὶ ἀπειροσῶν δυωνύμων . . 106
— — Δ΄. Ἐφαρμογὴ τῶν κανόνων εἰς τετραγωνισμὸν τῶν καμπύλων . . . 114
— — Ε΄. Περὶ εὐθύνσεως τῶν καμπύλων γραμμῶν 122
— — ς΄. Περὶ τετραγωνισμοῦ τῶν καμπύλων ἐπιφανειῶν 125
— — Ζ΄. Περὶ τῆς τῶν ςερεῶν καταμετρήσεως 127
— — Η΄. Περὶ ὁλοκληρ. ποσοτ. αἷς ἐνυπάρχουσιν ἡμίτ. καὶ συνημίτ. . . . 137
— — Θ΄. Περὶ τοῦ διὰ προσεγγίσεως ὁλοκληροῦν 140

Κεφάλαιον Ι΄. Διαφόρων ποσῶν διὰ προσεγγίσεως ὁλοκλήρωσις 159
— — ΙΑ΄. Περὶ τῆς τῶν δυωνύμων ἀπειρῶν ἀναγωγῆς 172
— — ΙΒ΄. Περὶ λογικῶν κλασμάτων . . 179
— — ΙΓ΄. Περί τινων μεταμορφώσεων ῥαδιουργουσῶν τὰς ὁλοκληρώσεις . . 191
— — ΙΔ΄. Περὶ ὁλοκληρώσεως τῶν δεικτικῶν ποσοτήτων 195
— — Περὶ ὁλοκληρ. ποσοτ. μεταβλητὰς περιεχουσῶν 197
— — Ις΄. Περὶ ἀπειροσῶν ἐξισώσεων . . 202
— — ΙΖ΄. Περὶ ἐξισ. καὶ ποσ. ἀπειροσῶν β΄. γ΄. κτ. τάξεως 216

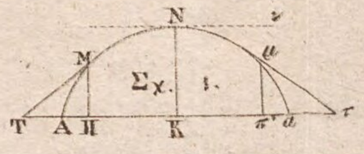
ΤΗΣ ΕΝ ΓΕΝΕΙ ΦΥΣΙΚΗΣ.

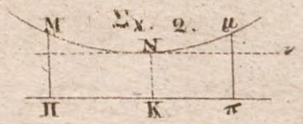
Εἰσαγωγή 227
Κεφάλαιον Α΄. Περὶ διαφορᾶς διαστήματος σώματος καὶ ὕλης 231
— — Β΄. Περὶ τόπου ἢ διαστήματος . . . 234
— — Γ΄. Περὶ φύσεως τοῦ σώματος καὶ τῆς ὕλης 236
— — Δ΄. Περὶ ὑπάρξεως σωμάτων . . . 238
— — Ε΄. Περὶ διαιρέσεως τῆς ὕλης . . . 240
— — ς΄. Περὶ τῆς ἐνεργείᾳ διαιρέσεως τῆς ὕλης 243
— — Ζ΄. Περὶ ἀπολύτου καὶ σχετικοῦ τῶν σωμάτων μεγέθους 245
— — Η΄. Περὶ τοῦ τῶν σωμάτων πορώδους . 248
— — Θ΄. Περὶ τοῦ τῶν σωμάτων ἀδιαχωρήτου 250
— — Ι΄. Περὶ τοῦ κενοῦ 251

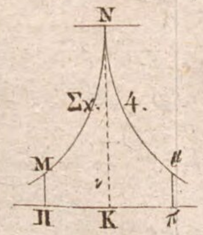
Κεφάλαιον ΙΑ΄. Περὶ τῆς τῶν σωμάτων πυκνότητος 253
— — ΙΒ΄. Περὶ ἀδρανείας τῶν σωμάτων . 255
— — ΙΓ΄. Περὶ κινήσεως 258
— — ΙΔ΄. Περὶ ταχυτῆτος 260
— — ΙΕ΄. Περὶ ποσῦ τῆς κινήσεως . . . 262
— — Ις΄. Περὶ κινήσεως ἁπλῆς καὶ συνθέτυ 265
— — ΙΖ΄. Περὶ ἰσοταχῆς κινήσεως . . . 275
— — ΙΗ΄. Περὶ κινήσεως τῶν βαρέων . . 281
— — ΙΘ΄. Περὶ τῆς ταχυνομένης κινήσεως τῶν βαρέων 287
— — Κ΄. Περὶ καθόδυ τῶν σωμάτων διὰ κεκλιμένυ ἐπιπέδυ 293
— — ΚΑ΄. Περὶ τῆς διὰ καμπύλων κινήσεως 301
— — ΚΒ΄. Περὶ κινήσεως τῶν προβαλλομένων σωμάτων 314
— — ΚΓ΄. Περὶ προβολῆς τῶν ἐκ τῶν πυροβόλων ὅπλων σφαιρῶν 316
— — ΚΔ΄. Περὶ τῆς κατ' ἀναλίκνισιν κινήσεως 326

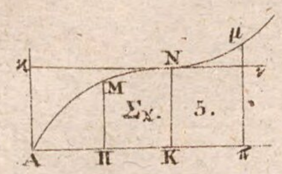
ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ.

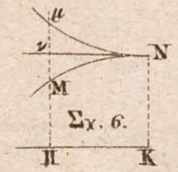
Σελ. 30. στίχ. 3, $+ - \frac{\beta^3}{\chi}$, Γρ. $+ \frac{\beta^3}{\chi} -$ Σελ. 46. στίχ. 23. Τίγωνον, Γρ. Τρίγωνον. — Σελ. 65. στίχ. 28. (κ. 46), Γρ. (κ. 42). — Σελ. 66. στίχ. 30. (κ. 17), Γρ. (κ. 43). — Σελ. 67. στίχ. 8. (κ. 16, 17), Γρ. (κ. 42, 43) — στίχ. 14. (κ. 16), Γρ. (κ. 42). — Σελ. 78. στίχ. 19. (κ. 28), Γρ. (κ. 54) — ὡσαύτως γράφε διορθῶν καὶ τὸ σελ. 79. στίχ. 22. — Σελ. 80. στίχ. 1. (κ. 27), Γρ. (κ. 53). — Σελ. 83. στίχ. 24. (κ. 29), Γρ. (κ. 55). — Σελ. 84. στίχ. 1. (κ. 30), Γρ. (κ. 56) — στίχ. 13. (κ. 33, 34), Γρ. (κ. 59, 60) — στίχ. 21. Τῆ 32, Γρ. Τῆ 58. — Σελ. 85. στίχ. 15. (κ. 31), Γρ. (κ. 57) — στίχ. 18. Τῆ 32, Γρ. Τῆ 58. — Σελ. 89. στίχ. 1 (κ. 30), Γρ. (κ. 56). — Σελ. 94. στίχ. 11. Ο' χ, Γρ. Η' χ. — Σελ. 113. στίχ. 13. (109 κτ.), Γρ. (190 κτ.). — Σελ. 120. στίχ. 13. Ε'ὰν ῆ, Γρ. Ε'ὰν ἦν. — Σελ. 123. στίχ. 10. (193), Γρ. (203). — Σελ. 124. στίχ. 16. (195), Γρ. (205). — Σελ. 126. στίχ. 19. (193), Γρ. (203). — Σελ. 139. στίχ. 7. Συνημ. (α + β) συνημ. α κτλ., Γρ. Συνημ. (α + β) = συνημ. α κτλ. — Σελ. 146. στίχ. 16. Καὶ τῆ $\frac{\alpha}{2}$, Γρ. Καὶ τῆ $\frac{\alpha}{3}$. — Σελ. 147. στίχ. 6. Τῶν πρώτης, Γρ. Τῆς πρώτης. — Σελ. 153. στίχ. 20. (210), Γρ. (251). — Σελ. 160. στίχ. 15. 256, Γρ. 246. — Σελ. 175. στίχ. 13. Η" ν διαφορὰ, Γρ. Η" ν ἡ διαφορά. — Σελ. 205. στίχ. 22. +, Γρ. =. — Σελ. 210. στίχ. 8. Τὸ Π, Γρ. Ο' Π — Σελ. 213. στίχ. 13. Υ'πὲρ τῆ θ'., Γρ. Υ'πὲρ τῆ θ. — Σελ. 232. στίχ. 19. Ποροσφυῶς, Γρ. Προσφυῶς. — Σελ. 239. στίχ. 14. Α" πτεσθει, Γρ. Α" πτεσθαι. — Σελ. 264. στίχ. 3. Τὸ μὲν, Γρ. Τὸ μέντοι. — Σελ. 266. στίχ. 8. Ε'ξ ἀρις., Γρ. Η' ἐξ ἀρις. — Σελ. 276. στίχ. 18. Διαδοχῆς, Γρ. Ε'κ διαδοχῆς. — Σελ. 279. στίχ. 22. Οὐδὲν, Γρ. Ε" ν.

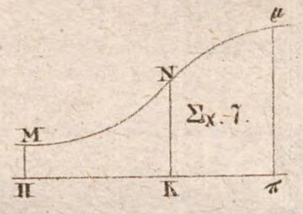


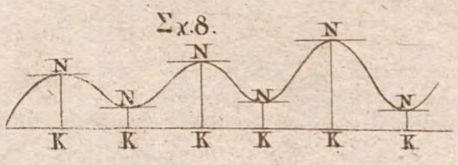


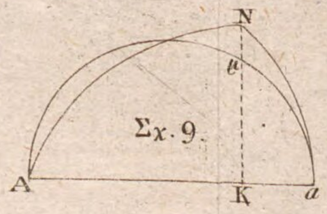


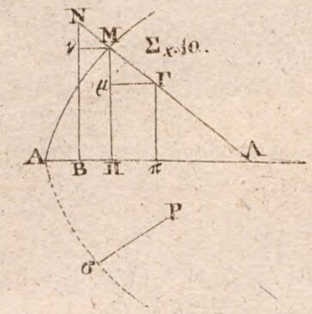


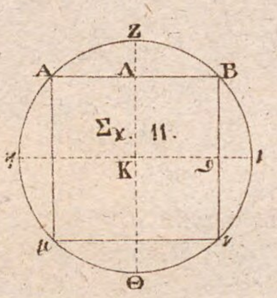


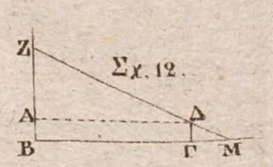


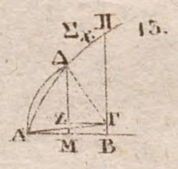


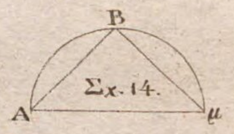


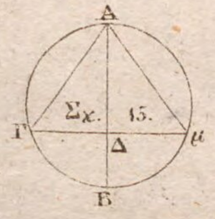


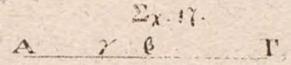


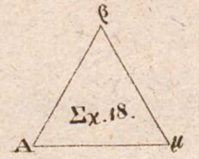


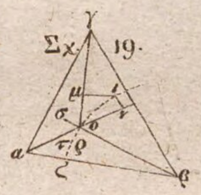


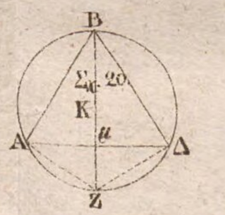


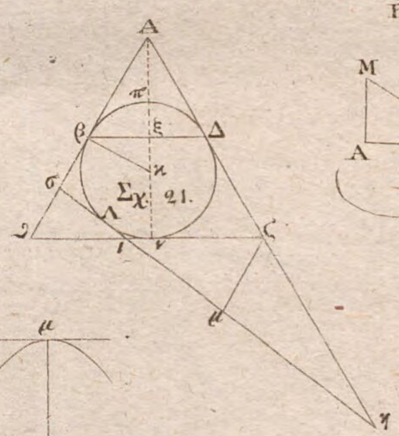


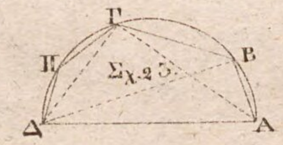


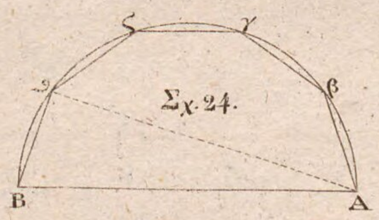


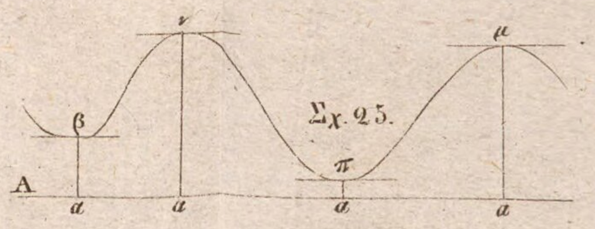


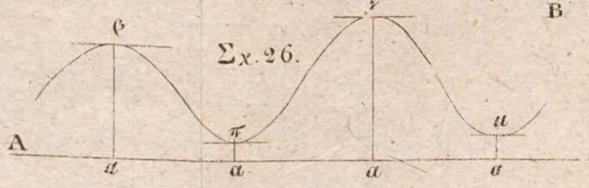




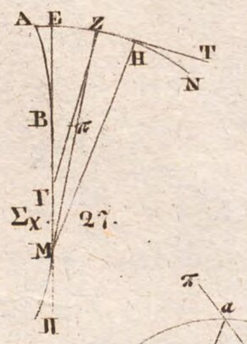


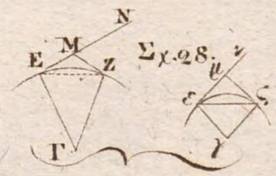


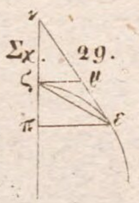


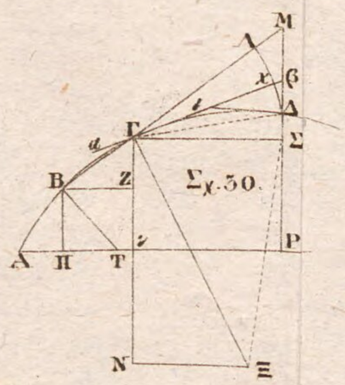


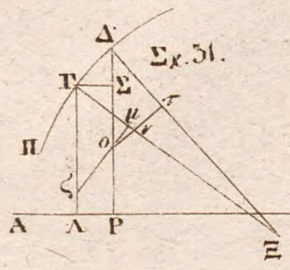
Παρὰ Ἰγνατίῳ Κύεν.

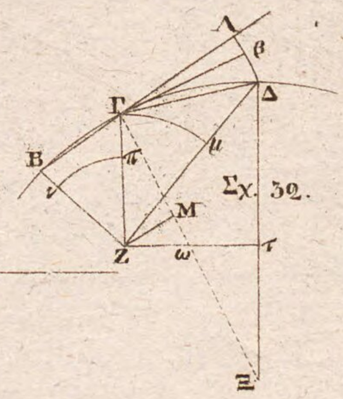


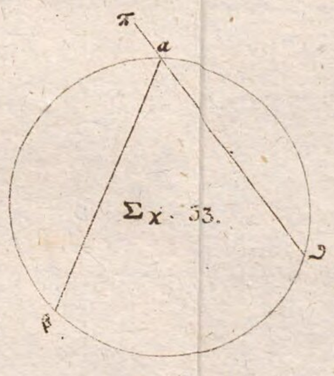


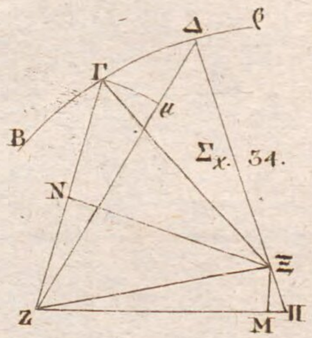


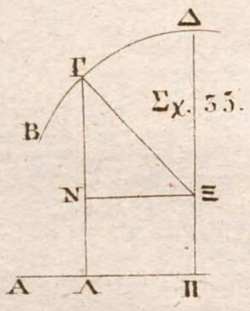


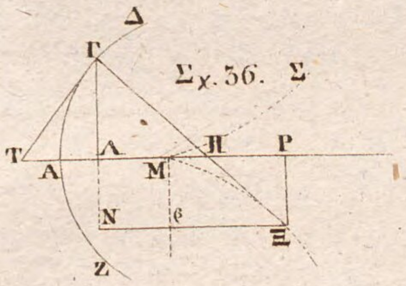


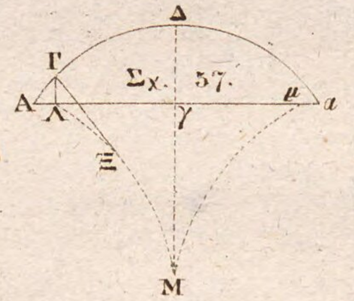


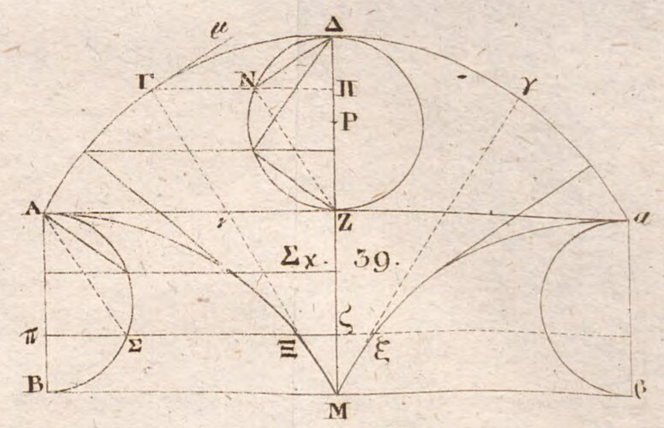


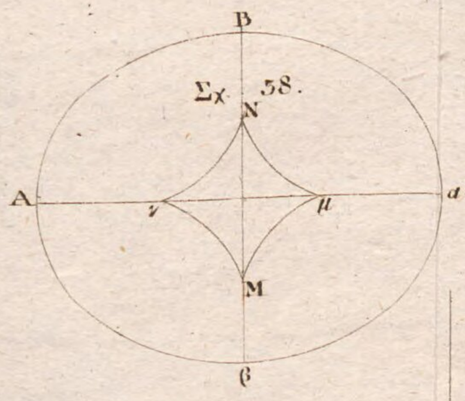


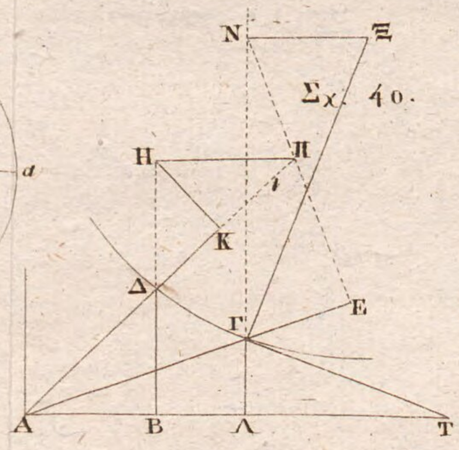


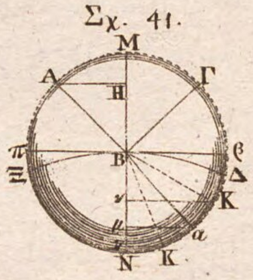




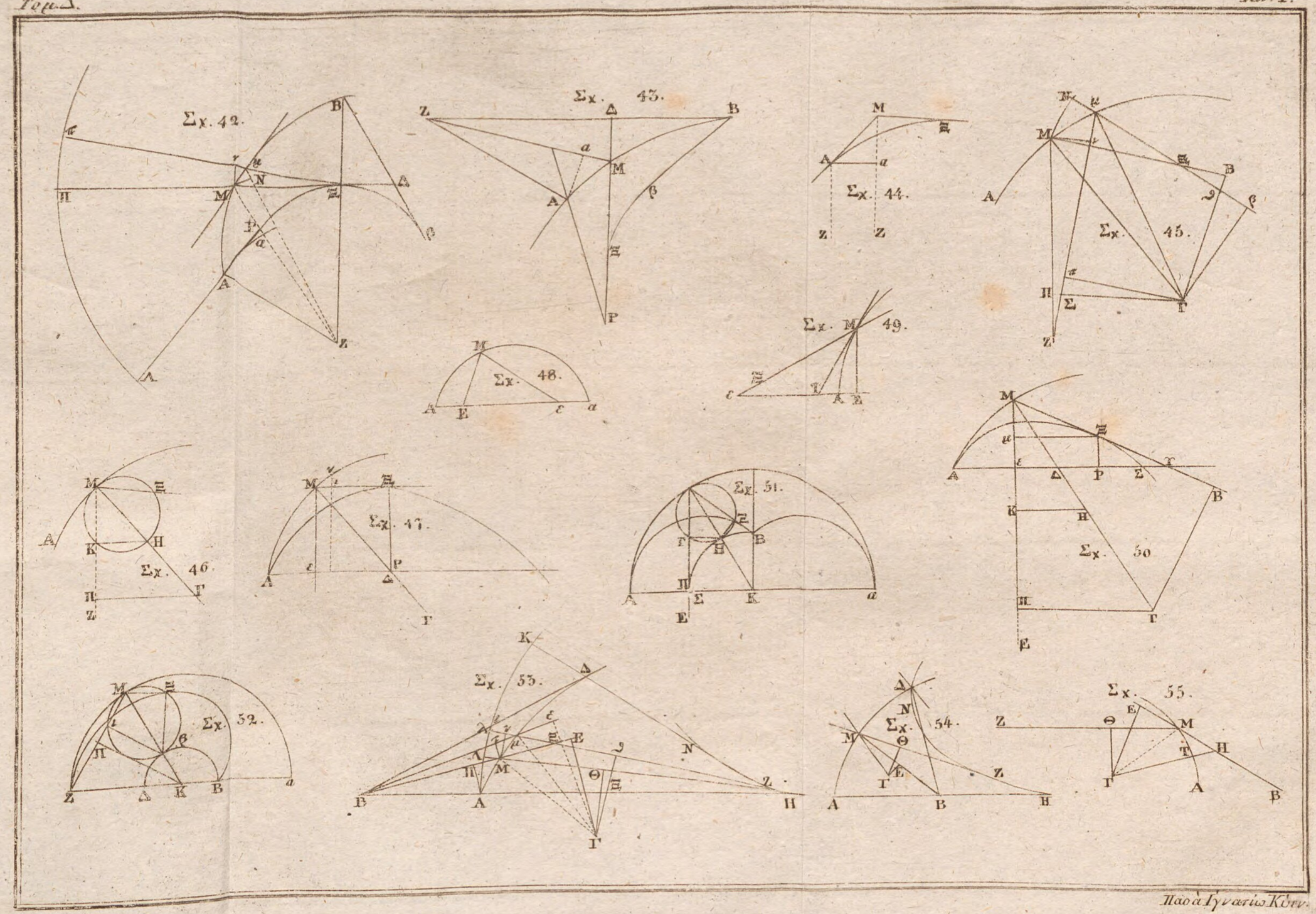




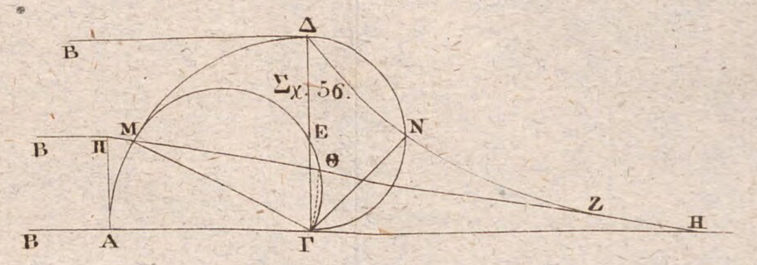


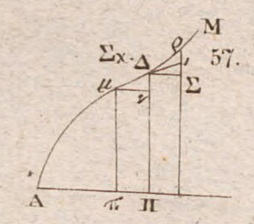


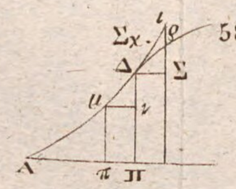
Παρά Ιγνατίω Κύρ

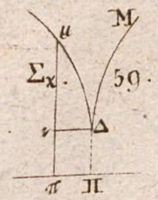


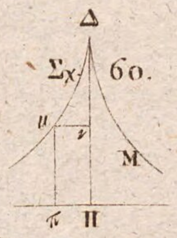
Παρὰ Ἰγνατίῳ Κύτν.

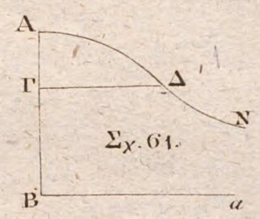


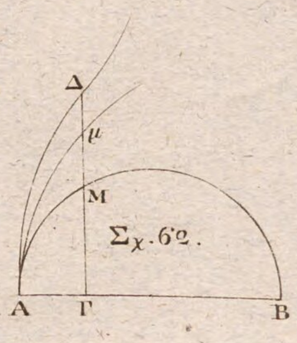


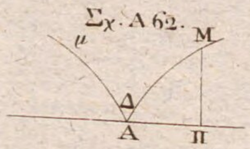


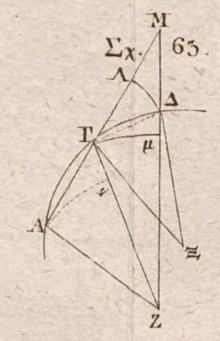


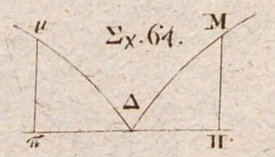


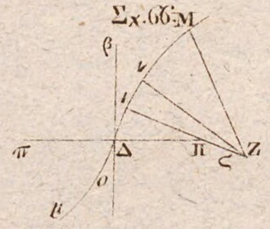


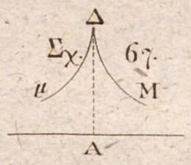


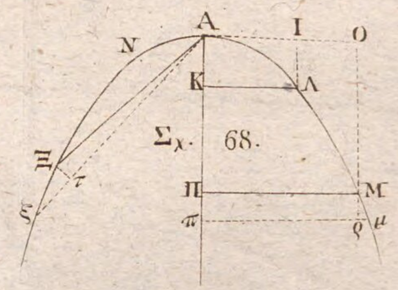


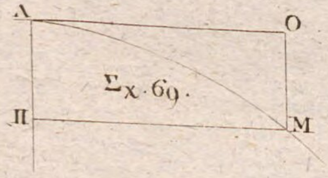


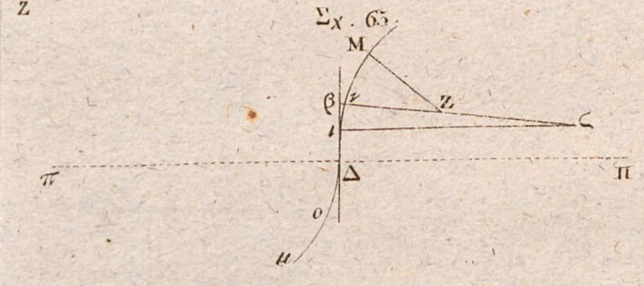


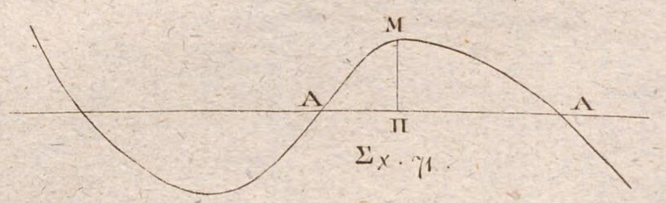


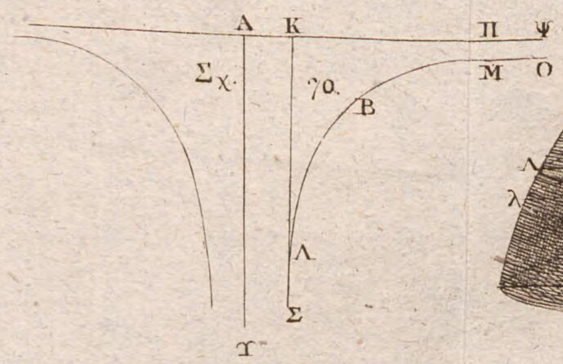


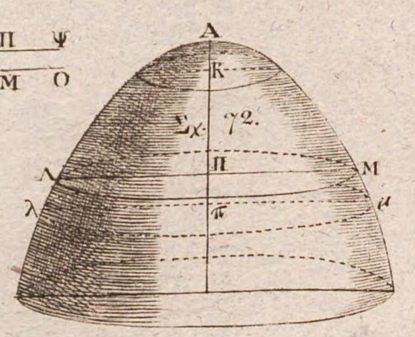




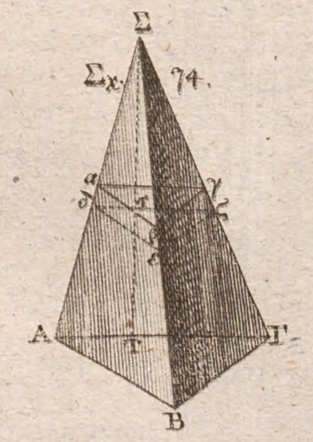




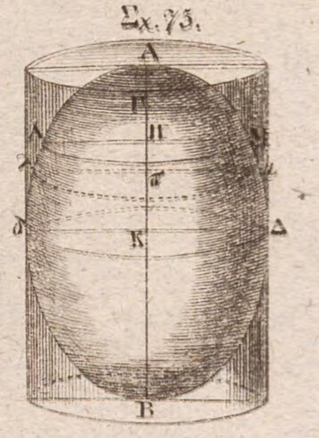




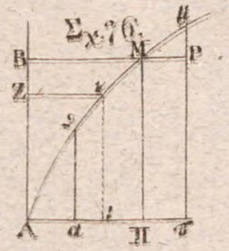
Παρά Ιγνατίω Κόση.



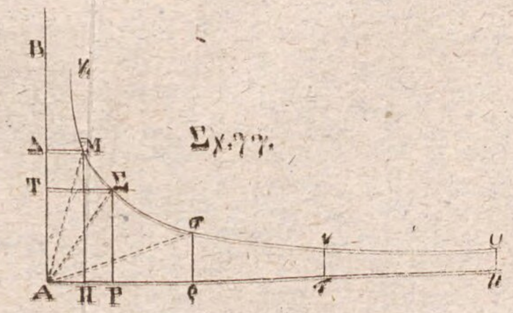
Σχ. 74.



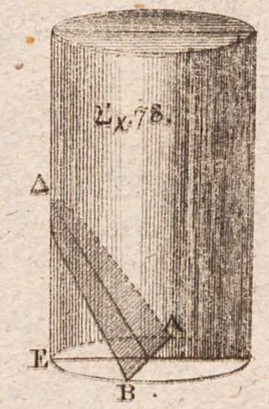
Σχ. 75.



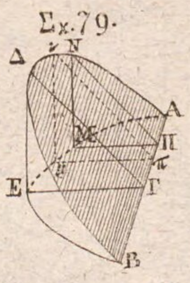
Σχ. 76.



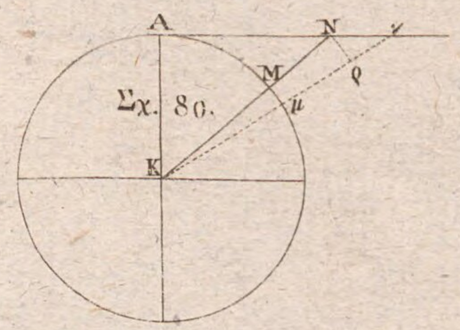
Σχ. 77.



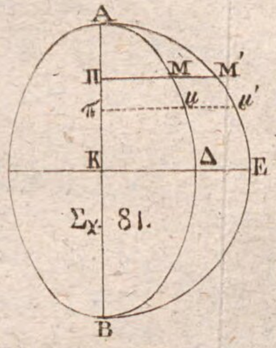
Σχ. 78.



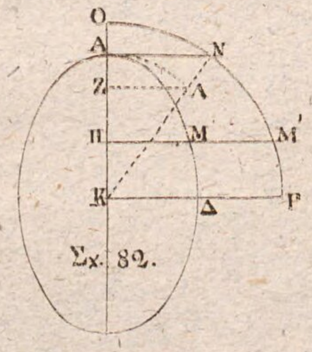
Σχ. 79.



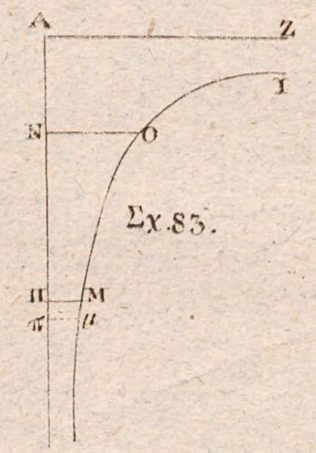
Σχ. 80.



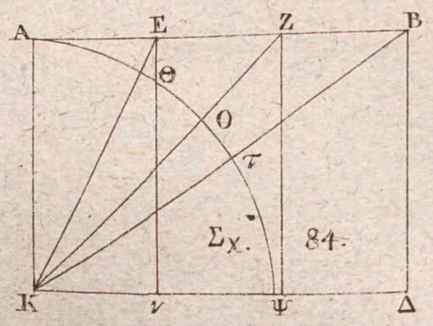
Σχ. 81.



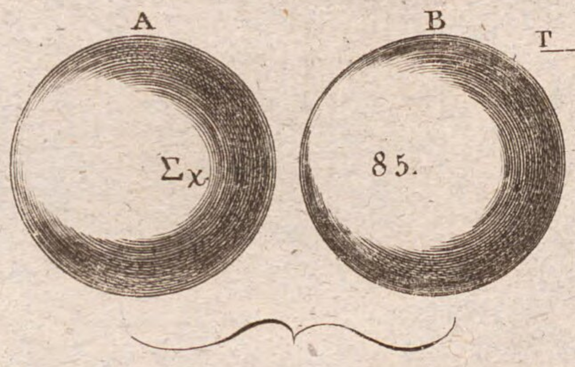
Σχ. 82.



Σχ. 83.

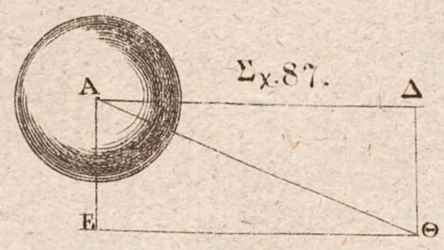


Σχ. 84.



Σχ. 85.

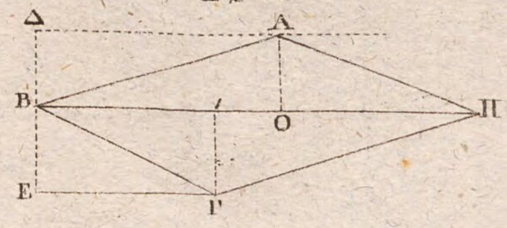
Σχ. 86.

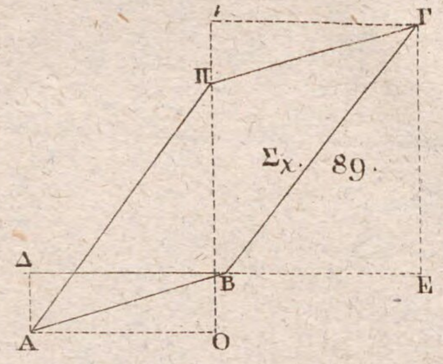


Σχ. 87.

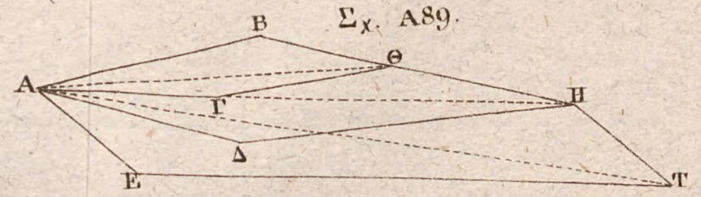
Παρὰ Ἰγνατίῳ Κωνστ.

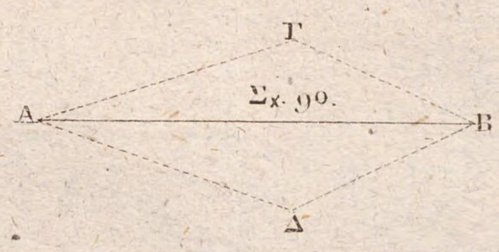
Σχ. 88.

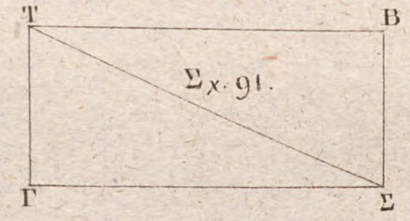


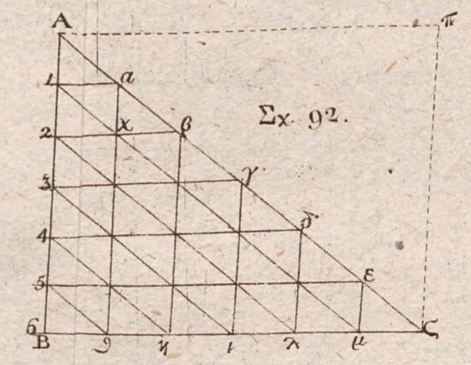


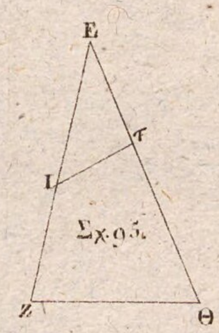
Σχ. Α89.

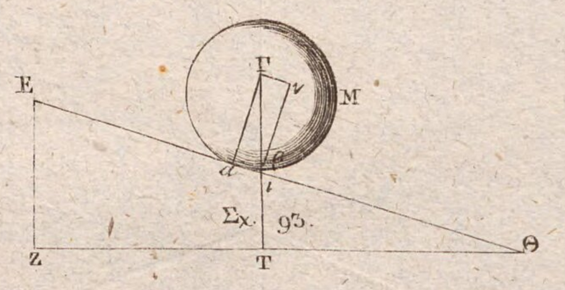


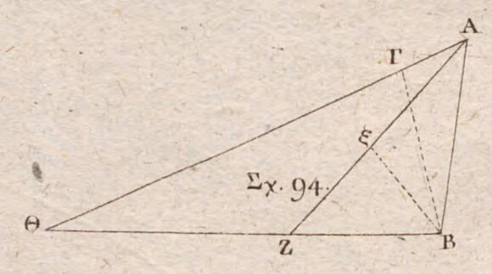


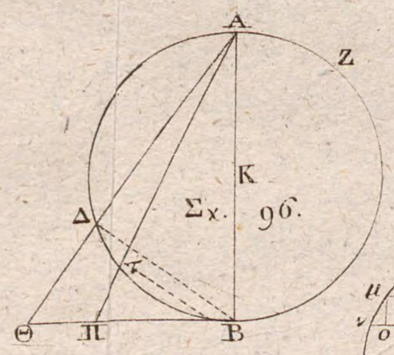


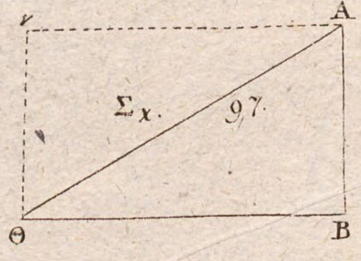


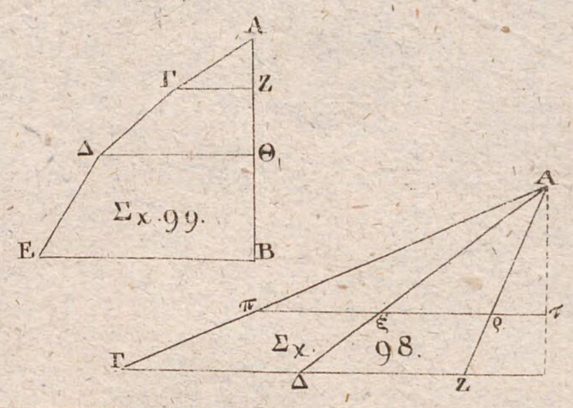


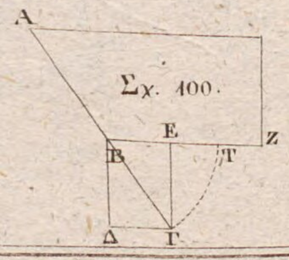


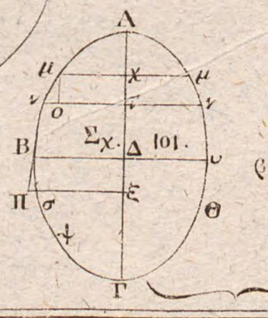


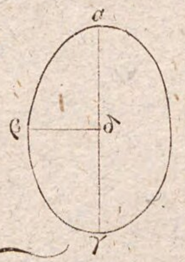




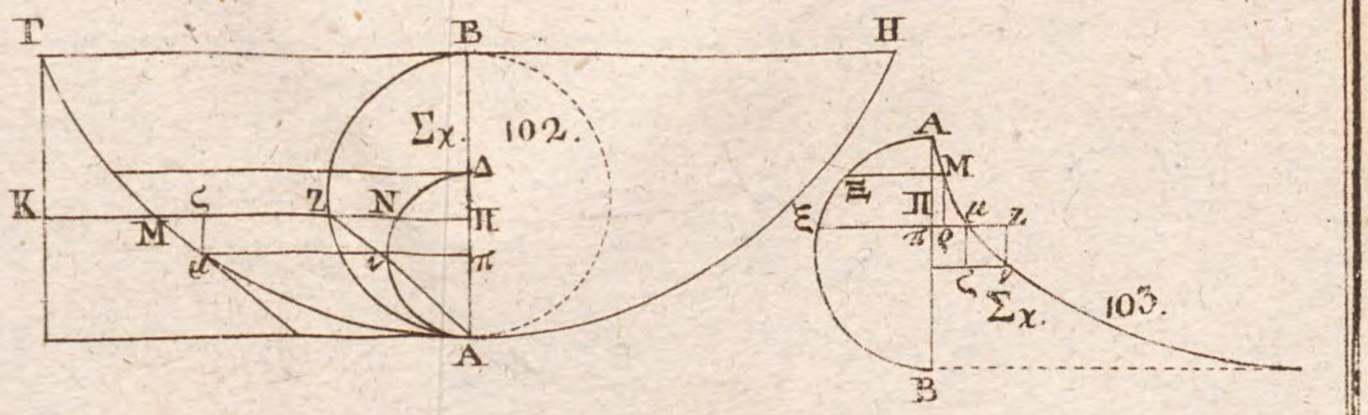


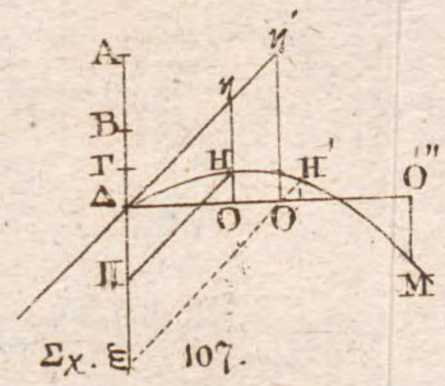


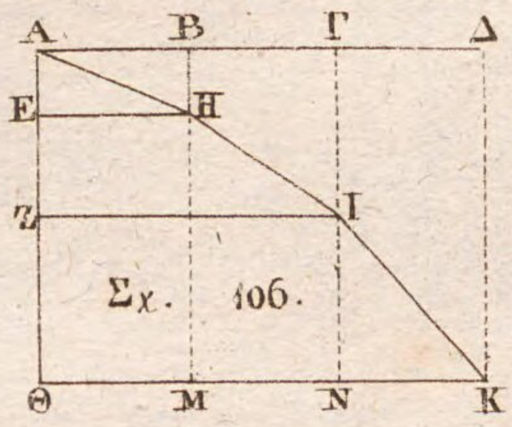


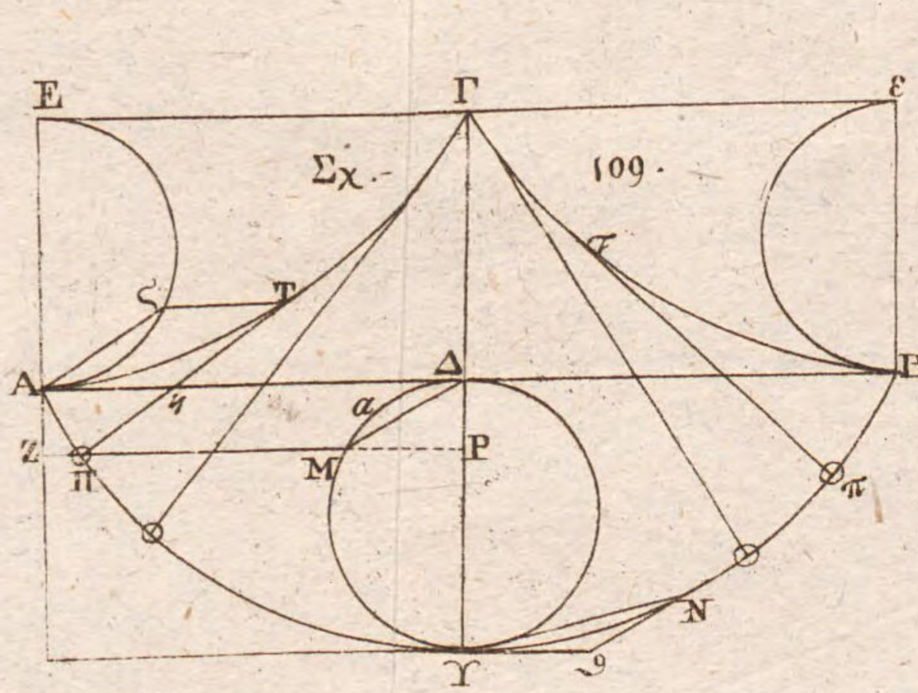


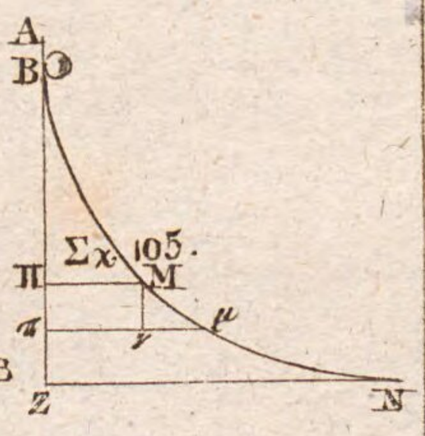
Παρά Ἰγνατίῳ Κύεν.

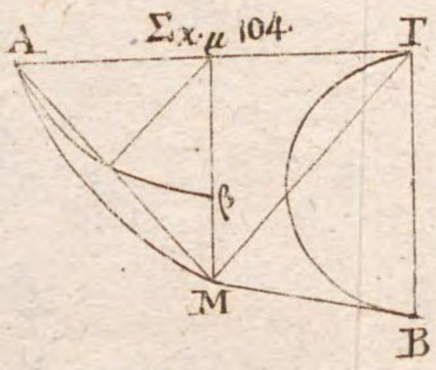

Γ
B
H
Σχ. 102.
Δ
K
ζ
Z
N
Π
M
μ
ν
π
A
A
M
Ξ
Π
μ
z
π
ρ
ζ
Σχ.
103.
B

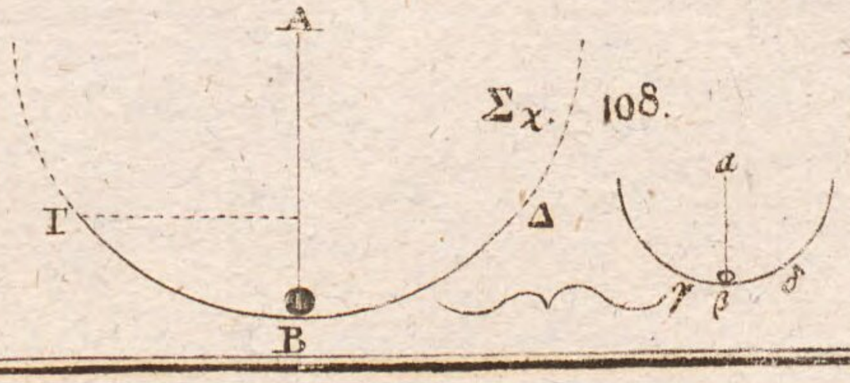

A
B
Γ
Δ
η
η'
H
H'
O''
O
O'
Π
M
Σχ. Ξ 107.


A
B
Γ
Δ
E
H
Z
I
Σχ. 106.
Θ
M
N
K


E
Γ
ε
Σχ. 109.
ζ
T
σ
A
Δ
B
η
α
Z
Π
M
P
π
N
Υ
φ


A
B
Σχ. 105.
M
Π
π
μ
γ
Z
N


A
Σχ. μ 104.
Γ
β
M
B


A
Σχ.
108.
Γ
Δ
a
γ
β
δ
B